Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Cours Analyse II

Arij Bouzelmate

Filières: **SMP-SMC**

Plan du Cours

1. **Séries Numériques**
2. **Intégrale Simple**
3. **Intégrales Généralisées**
4. **Equations Différentielles du Premier Ordre**
5. **Equations Différentielles Linéaires du Second Ordre à Coefficients Constants**

Définition

Soit $(u_n)_n$ *une suite de nombres réels.*
On appelle série de terme général u_n *notée par* $\sum_{n\geq 0} u_n$, *la suite numérique* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

S_n *s'appelle la somme partielle de rang n de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Remarque

On a $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Définition

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite finie* S *quand* n *tend vers* $+\infty$.

S *est appelée la somme de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et on note* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *est appelé reste d'ordre* n *de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$. *Dans le cas de convergence,* $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est divergente si* S *est infini ou si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

Remarque

Etudier la nature d'une série revient à étudier sa convergence ou sa divergence.

Exemple

La série géométrique

La série numérique de la forme $\sum_{n \geq 0} a^n$ *est une série géométrique. Sa somme partielle de rang n est :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & si\ a \neq 1, \\ n+1, & si\ a = 1. \end{cases}$$

La série $\sum_{n \geq 0} a^n$ *est convergente si* $|a| < 1$ *et a pour somme* $\dfrac{1}{1-a}$.
La série $\sum_{n \geq 0} a^n$ *est divergente si* $|a| \geq 1$.

Proposition

La nature d'une série ne change pas par modification d'un nombre fini de ses termes.

Proposition

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont deux séries convergentes et si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} \left(\lambda u_n + v_n\right)$ *est convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lambda u_n + v_n\right) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque

On a :

(i) *Si* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ *sont de même nature.*

(ii) *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ *sont de même nature.*

(iii) *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *divergent, on ne peut rien affirmer quant à la nature de* $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ *comme le prouvent les exemples où* $v_n = -u_n$ *d'une part et* $v_n = u_n$ *d'autre part.*

Condition Nécessaire de Convergence

Théorème

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$
Lorsque u_n *ne tend pas vers* 0*, on dit que* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge grossièrement.*

Preuve : La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

Il suffit donc de remarquer que $u_n = S_n - S_{n-1}$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$. $\square$

Remarque

La réciproque du résultat précédent est fausse.

Exemple

Considérons la suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ *mais la série* $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *n'est pas convergente car la somme partielle de rang* n

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{n+1}$$

tend vers $+\infty$ *quand* $n \to +\infty$.

Définition

On dit qu'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ *est une série à termes positifs si et seulement si* $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
On dit qu'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ *est une série à termes positifs à partir d'un certain rang si et seulement si il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \geq N$.

Proposition

Pour qu'une série de nombres réels positifs soit convergente, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée.

Preuve : C'est une conséquence du fait que toute suite croissante majorée est convergente.
En effet. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique et $(S_n)_n$ sa somme partielle.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0.$$

Donc, la suite $(S_n)_n$ est croissante et comme elle est majorée, alors elle est convergente, c'est à dire, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente. $\square$

Proposition

Soient $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries à termes positifs.*

(i) *S'il existe* $M > 0$ *tel que* $u_n \leq M v_n$ *et* $\sum_n v_n$ *est convergente, alors* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

(ii) *Si* $u_n \sim v_n$ *au voisinage de* $+\infty$*, alors* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *sont de même nature.*

Exercice

Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$.

Solution : On pose $v_n = \frac{1}{n(n-1)}$, $n \geq 2$. Sa somme partielle définie par

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n},$$

est convergente vers 1 quand $n \to +\infty$. Ce qui veut dire que la série $\sum_n v_n$ est convergente.

Et comme

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = v_n \quad \text{pour tout } \ n \geq 2,$$

alors, d'après le principe de comparaison, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Exercice

Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n - 1}{7^n + 4}$.

Solution : On pose $u_n = \frac{3^n - 1}{7^n + 4}$, $n \geq 1$. On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et $u_n \sim \left(\frac{3}{7}\right)^n$ au voisinage de $+\infty$.

Comme la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{3}{7}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$), alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Règle de d'Alembert

Proposition

Soit $\sum_n u_n$ *une série à termes strictement positifs telle que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ *tende vers* $l \in [0, +\infty]$. *Alors,*

(i) *Si* $l < 1$, *la série* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

(ii) *Si* $l > 1$, *la série* $\sum_n u_n$ *est divergente.*

Exercice

Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!}$*, où a est un réel strictement positif fixé.*

Solution : On pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$, $n \geq 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0$, alors d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Règle de Cauchy

Proposition

Soit $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs telle que la suite* $(\sqrt[n]{u_n})_n$ *tende vers* $l \in [0, +\infty]$. *Alors,*

(i) *Si* $l < 1$, *la série* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

(ii) *Si* $l > 1$, *la série* $\sum_n u_n$ *est divergente.*

Exercice

Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} n^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$.

Solution : On pose $u_n = n^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$, $n \geq 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ et

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} = n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, alors d'après la règle de Cauchy, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Remarque

Dans les deux règles, si $l = 1$, *on ne peut rien conclure.*

Exemple Fondamental : Séries de Riemann

Proposition

La série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.

Remarque

La série $\sum_n \frac{1}{n}$ *est appelée série harmonique. Elle est divergente.*

Séries de Riemann

Règle de Riemann

Proposition

Soit $\sum_{n} u_n$ *une série à termes positifs.*

(*i*) *Si* $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}u_n = l$ *(finie) et* $\alpha > 1$, *alors la série* $\sum_{n} u_n$ *est convergente.*

(*ii*) *Si* $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}u_n = +\infty$ *ou* $l \neq 0$ *et* $\alpha \leq 1$, *alors la série* $\sum_{n} u_n$ *est divergente.*

Exercice

Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

Solution : On pose $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$, $n \geq 1$.
Soit $1 < \alpha < 2$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} u_n = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2} \ln(n) = 0.$$

Donc, d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Séries Absolument Convergentes

Définition

Une série $\sum_n u_n$ *est dite absolument convergente si et seulement si* $\sum_n |u_n|$ *est convergente.*

Théorème

Toute série absolument convergente est convergente.

Exercice

Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2}$.

Solution : On pose $u_n = \frac{\cos n}{n^2}$, $n \geq 1$. Alors, pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors d'après le principe de comparaison, la série $\sum_n |u_n|$ est convergente, càd $\sum_n u_n$ est absolument convergente. D'où, $\sum_n u_n$ est convergente.

Remarque

La réciproque du théorème est fausse. Dans ce cas, une série convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.

Proposition

S'il existe $\alpha > 1$ *tel que* $\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} u_n = 0$*, alors la série* $\sum_n u_n$ *est absolument convergente.*

Définition

La série $\sum_n u_n$ *est dite alternée si le terme général* $u_n = (-1)^n a_n$ *avec* $a_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Critère Spécial des Séries Alternées

Théorème

Soit $\sum_n (-1)^n a_n$ *une série alternée.*
Si la suite $(a_n)_n$ *est décroissante et convergente vers* 0, *alors la série alternée* $\sum_n (-1)^n a_n$ *est convergente.*

Exercice

Etudier la nature de la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, *où* $\alpha > 0$.

• Si $\alpha > 1$. Comme $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente car c'est une série de Riemann $(\alpha > 1)$. Alors, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est absolument convergente. Par suite, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.

• Si $0 < \alpha \leq 1$. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente par application du critère spécial des séries alternées.

On déduit que la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente $\forall \alpha > 0$.