Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Cours Analyse II

Arij BOUZELMATE

Filières: **SMP-SMC**

Primitive d'une Fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie sur I telle que F est dérivable et $F' = f$ sur I.

Exemple

On a :

1− *La fonction* $x \to \ln|x|$ *est une primitive de la fonction* $x \to \dfrac{1}{x}$ *sur* $\mathbb{R}^*$.

2− *La fonction* $x \to e^x$ *est une primitive de la fonction* $x \to e^x$ *sur* $\mathbb{R}$.

Existence des Primitives

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors,

(i) *f admet des primitives sur I.*

(ii) *Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors la fonction $F_1 - F_2$ est constante.*

Intégrale d'une Fonction Continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $[a, b]$.

On appelle intégrale de f de a à b, le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ défini par :

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque

Le réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ ainsi défini ne dépend pas de la primitive choisie.

Propriété

Proposition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors,

(i) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$

(ii) $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0.$

Théorème Fondamental de l'Analyse

Théorème

Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors, la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in I$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarque

Une primitive de f sur I n'est pas nécessairement celle qui s'annule en un certain point, à titre d'exemple, la fonction exponentielle.

Interprétation Géométrique

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

$1-$ Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ représente l'aire délimitée par l'axe des abscisses et la courbe C_f entre les abscisses a et b.

$2-$ Si f est de signe quelconque sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ représente la différence entre l'aire des domaines situés au dessus de l'axe des abscisses et en dessous de l'axe des abscisses.

Propriétés de l'Intégrale Simple

Linéarité

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et α, β deux réels. Alors,

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\ dt = \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt.$$

Relation de Chasles

Proposition

Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b, c des éléments de I. Alors,

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt.$$

Remarque

Les réels a, b, c ne sont pas nécessairement rangés dans l'ordre croissant.

Exercice

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2} |t-1|\,dt$.

Solution : En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} |t-1|\,dt &= \int_{-2}^{1} |t-1|\,dt + \int_{1}^{2} |t-1|\,dt \\
&= \int_{-2}^{1} (1-t)\,dt + \int_{1}^{2} (t-1)\,dt \\
&= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_{1}^{2} = 5.
\end{aligned}$$

Positivité de l'Intégrale

Proposition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$

Croissance de l'Intégrale

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$. Alors,

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

Inégalité de Schwarz

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Alors

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$

Proposition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

1. *Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$.*
2. *Si f n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt > 0$.*

Proposition

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, il existe deux réels m et M tels que

$$m \leq f(t) \leq M \quad \textit{pour tout } t \in [a,b]$$

et

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).$$

Inégalité de la Moyenne

Proposition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Première Formule de la Moyenne

Proposition

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a).$$

Le nombre $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est appelé la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Deuxième Formule de la Moyenne

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec g positive sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

Sommes de Riemann

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.\end{aligned}$$

En particulier, si f est continue sur $[0,1]$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^1 f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Primitives des Fonctions Usuelles

1. $$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln|u| + cte.$$
2. $$\int u'(x) e^{u(x)}\, dx = e^u + cte.$$
3. $$\int u'(x) u^\alpha(x)\, dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte, \quad \alpha \neq -1.$$
4. $$\int u'(x) \cos(u(x))\, dx = \sin u + cte.$$

Primitives des Fonctions Usuelles

1. $\displaystyle\int u'(x)\sin(u(x))\,dx = -\cos u + cte.$
2. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u^2}\,dx = \arctan u + cte.$
3. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arcsin u + cte.$
4. $\displaystyle\int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arccos u + cte$

Intégration Par Changement de Variable

Théorème

soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et soit $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ de classe C^1 avec $g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\Big(g(t)\Big)g'(t)\,dt.$$

La transformation $x = g(t)$ s'appelle changement de variable.
On effectue les trois substitutions suivantes :

(i) $x = g(t)$.

(ii) $dx = g'(t)dt$

(iii) On change les bornes d'intégration.

Exercice

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt.$

Solution : On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin t}{\cos t} \, dt.$$

On pose $x = g(t) = \cos t$, et alors $dx = g'(t)\, dt = -\sin t \, dt$. D'où

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt &= -\int_{g(0)}^{g\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{dx}{x} \, dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{x} \, dx \\ &= -[\ln x]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

Propriété

Proposition

Soit $a > 0$ *et soit* f *une fonction continue sur* $[-a, a]$.

(i) *Si* f *est paire, alors on a* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt.$

(ii) *Si* f *est impaire, alors on a* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$

Intégration Par Parties

Théorème

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Exercice

Calculer $\int_1^x \ln t \, dt$.

Solution : On a

$$\begin{aligned}
\int_1^x \ln t \, dt &= \int_1^x \ln t \, (t)' \, dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x (\ln t)' \; t \, dt \\
&= x \ln x - \int_1^x \frac{1}{t} \, t \, dt = x \ln x - \int_1^x dt \\
&= x \ln x - [t]_1^x = x \ln x - x + 1.
\end{aligned}$$

Pour intégrer une fonction rationnelle de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes réels, on effectue la décomposition en fractions simples et puis on intègre chaque élément obtenu ; c'est à dire la partie entière, les éléments de première espèce et de seconde espèce suivants.

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + cte, & \text{si } n \neq 1, \\ \ln|x-a| + cte, & \text{si } n = 1. \end{cases}$

- $\displaystyle\int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2+bx+c)^n}\,dx; \qquad b^2 - 4c < 0.$

On écrit $x^2 + bx + c$ sous la forme $(x-p)^2 + q^2$ $(q \neq 0)$ et on fait le changement de variable $x = p + qt$. On obtient

$$\int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \beta' \int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt + \gamma' \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt.$$

On pose $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt$.

Calcul de J_n :

$$J_n = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,dt = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + cte, & \text{si } n \neq 1, \\ \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1) + cte, & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Calcul de I_n :

Pour $n = 1$, $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + cte$.

Maintenant pour calculer I_{n+1}, il suffit de calculer I_n en utilisant une intégration par parties.

On a pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,(t)'\,dt = \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt \\ &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n\left(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt\right) \\ &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right].$$

Par suite,

$$\begin{cases} I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n + \dfrac{1}{2n}\left[\dfrac{t}{(t^2+1)^n}\right], & n \geq 2, \\ I_1 = \arctan t + cte. \end{cases}$$

Soit f une fonction rationnelle.
Les intégrales suivantes se ramènent aux intégrales des fonctions rationnelles.

1$-$**Intégrale de la forme** $\displaystyle\int f(e^x)\,dx$

On pose $t = e^x$, alors $x = \ln t$ et $dx = \dfrac{1}{t}\,dt$. On a donc,

$$\int f(e^x)\,dx = \int \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

2$-$**Intégrale de la forme** $\displaystyle\int f(\cos x)\sin x\,dx$

On pose $t = \cos x$, alors $x = \arccos t$, $dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et $\sin x = \sqrt{1-t^2}$. On a donc,

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(t)\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\int f(t)\,dt.$$

3−**Intégrale de la forme** $\int f(\sin x) \cos x \, dx$

On pose $t = \sin x$, alors $x = \arcsin t$, $dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$ et $\cos x = \sqrt{1-t^2}$. On a donc,

$$\int f(\sin x) \cos x \, dx = \int f(t) \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \int f(t) \, dt.$$

4−**Intégrale de la forme** $\int f(\tan x) \, dx$

On pose $t = \tan x$, alors $x = \arctan t$, $dx = \dfrac{1}{1+t^2} \, dt$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. On a donc,

$$\int f(\tan x) \, dx = \int \frac{f(t)}{1+t^2} \, dt.$$

5$-$**Intégrale de la forme** $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ (f est une fonction de deux variables)

On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors $x = 2\arctan t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. On a donc,

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Remarque

On peut calculer aussi $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$ *en utilisant les changements suivants :*

- *On pose* $t = \cos x$ *si* $f(\sin x, \cos x)\, dx$ *est invariante en changeant* x *en* $-x$.
- *On pose* $t = \sin x$ *si* $f(\sin x, \cos x)\, dx$ *est invariante en changeant* x *en* $\pi - x$.
- *On pose* $t = \tan x$ *si* $f(\sin x, \cos x)\, dx$ *est invariante en changeant* x *en* $\pi + x$.

Exercice

Calculer $\int \cos^3 x \, dx.$

Solution : On a $\cos^3(\pi - x)\, d(\pi - x) = \cos^3 x \, dx$, ce qui veut dire que $\cos^3 x \, dx$ est invariante en changeant x en $\pi - x$.

On pose $t = \sin x$, alors $dt = \cos x \, dx$ et on a

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \, dx \\ &= \int (1 - t^2)\, dt = t - \frac{t^3}{3} + cte \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + cte. \end{aligned}$$