Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Cours Analyse II

Arij BOUZELMATE

Filières: **SMP-SMC**

1. **Définitions**
2. **Propriétés des Intégrales Généralisées**
3. **Calcul Pratique des Intégrales Généralisées**
4. **Intégrales Généralisées des Fonctions à Signe Constant**
5. **Intégrales Absolument Convergentes**

On s'intéresse dans ce chapitre à généraliser la notion d'intégrale d'une fonction définie sur l'un des intervalles suivants.

- $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.
- $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.
- $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$.

On dit qur l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie.

Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$ est appelée intégrale généralisée ou impropre de la fonction f sur $[a, b[$.

Définition

Soit f une fonction continue sur $]a,b]$.
On dit qur l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt$ existe et est finie.

Définition

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$.
On dit qur l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ sont convergentes pour tout $c\in]a,b[$.
On pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt$.

Exercice

Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

Solution : La fonction $t \to e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.
Soit $x \in [0, +\infty[$, alors

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente et on a $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$.

Exercice

Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Solution : La fonction $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$, donc le problème se pose uniquement en 0.
Soit $x \in]0, 1]$, alors

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x \to 0^+} 2 - 2\sqrt{x} = 2$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente et on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

Exercice

Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

Solution : La fonction $t \to \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$. On a

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \to -\infty} [\arctan t]_x^0 = \frac{\pi}{2}.$$

et

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \to +\infty} [\arctan t]_0^x = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ sont convergentes.

Par suite, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Remarque

Dans le cas où $a = -\infty$ *et* $b = +\infty$*, l'existence de* $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\, dt$ *ne prouve pas la convergence de* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$*. Par exemple, il suffit de considérer une fonction impaire continue.*

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, dt$ *diverge alors que* $\int_{-x}^{x} t\, dt = 0$*, pour tout* $x > 0$*.*

Proposition

Soit f *une fonction continue sur* $[a, b[$ *avec* b *fini.*

Si f *est prolongeable par continuité en* b*, alors* $\int_{a}^{b} f(t)\, dt$ *est convergente.*

Remarque

En posant $f(b) = \lim_{x \to b} f(x) = l$ *et désignant par F la primitive de* f *qui s'annule en a, la fonction F est continue en b et on a*

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x \to b} F(x) - F(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Dans ce cas, on dit q'il y a une fausse intégrale généralisée.

Remarque

On a aussi $\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente dans les deux cas suivants.*

- f *est continue sur* $]a, b]$ *(a fini) et prolongeable par continuité en a.*
- f *est continue sur* $]a, b[$ *(a et b sont finis) et prolongeable par continuité en a et b.*

Exercice

Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 t \ln t \, dt$.

Solution : La fonction $x \to x \ln x$ est continue sur $]0, 1]$. Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$, alors elle admet un prolongement par continuité en 0.

Par suite, $\int_0^1 t \ln t \, dt$ est convergente, c'est à dire $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_x^1 t \ln t \, dt$ existe et est finie.

On a

$$\begin{aligned}
\int_x^1 t \ln t \, dt &= \int_x^1 \left(\frac{t^2}{2}\right)' \ln t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} \, dt \\
&= -\frac{x^2}{2} \ln x - \int_x^1 \frac{t}{2} \, dt = -\frac{x^2}{2} \ln x - \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^1 \\
&= -\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4} \to -\frac{1}{4} \text{ quand } x \to 0^+
\end{aligned}$$

Linéarité

Proposition

Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_a^b g(t)\,dt$ *sont convergentes, alors l'intégrale généralisée* $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt$*, où* $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$*, est convergente et on a*

$$\int_a^b \Big(\alpha f(t) + \beta g(t)\Big)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt.$$

Relation de Chasles

Proposition

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente si et seulement si les intégrales* $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ *sont convergentes pour tout* $c \in]a,b[$ *et on a*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Utilisation des Primitives

Définition

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$.
Si F est une primitive de f, $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,dt$, pour $a < c < b$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to b^-} F(x)$ existent.
On définit alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Changement de Variable

Théorème

Soient $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ *continue et* $g\ :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ *une bijection de classe* C^1*. Alors,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *est convergente si et seulement si* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\Big(g(t)\Big)\,g'(t)\,dt$ *est convergente et on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f\Big(g(t)\Big)\,g'(t)\,dt.$$

Exercice

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Solution : On pose $t = \sin x$, alors $dt = \cos x\, dx$. La fonction $\sin : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-1,1[$ est une bijection de classe C^1. Donc,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}\, dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{|\cos x|}\, dx.$$

Comme la fonction cos est positive sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $|\cos x| = \cos x$ pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par suite $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \pi$.

Intégration Par Parties

Théorème

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $]a,b[$.
On suppose que $\lim_{x\to a^+} f(x)g(x) = L^+$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)g(x) = L^-$ existent. Alors, $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ est convergente et on a

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = L^- - L^+ - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Exercice

Calculer $\int_0^1 (\ln t)^2 \, dt$.

Solution : On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\ln t)^2 \, dt &= \int_0^1 (t)'(\ln t)^2 \, dt = -\lim_{t\to 0^+} t(\ln t)^2 - \int_0^1 t\frac{2}{t}\ln t \, dt \\ &= -2\int_0^1 \ln t \, dt = -2\int_0^1 (t)' \ln t \, dt \\ &= 2\lim_{t\to 0^+} t\ln t + 2\int_0^1 t\frac{1}{t} \, dt = 2.\end{aligned}$$

Critère de la Convergence Majorée

Proposition

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continue et positive. Alors,* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente si et seulement s'il existe* $M \geq 0$ *(M indépendante de x) tel que* $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \leq M$ *pour tout* $x \in [a, b[$.

Critère de Comparaison

Proposition

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continues et positives.*

S'il existe $M > 0$ *tel que* $f(x) \leq Mg(x)$ *pour tout* $x \in [a, b[$ *et si* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ *est convergente, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente.*

Critère d'Equivalence

Proposition

Soit f, $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ *continues et positives telles que* $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, *alors on a*

(*i*) *Si* $l \neq 0$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente si et seulement si* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ *est convergente.*

(*ii*) *Si* $l = 0$ *et* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ *est convergente, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente.*

Remarque

Si f *est continue et positive sur* $[a,+\infty[$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l > 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *est divergente.*

Exemple Fondamental : Intégrales de Riemann

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Exercice

Eudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$

Solution : On a pour tout $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente, alors d'après le critère de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente.
D'autre part, comme la fonction $t \to e^{-t^2}$ est continue sur $[0,1]$, alors $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ est une intégrale simple. On déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente car c'est la somme de deux intégrales convergentes.

Exercice

Eudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt,\ \ \alpha > 0.$

Solution : La fonction $t \to t^{\alpha-1}e^{-t}$ n'est pas définie en 0 car $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln t}$.

On a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{t^{\alpha-1}} = \lim\limits_{t\to 0} e^{-t} = 1$. Donc, $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}$ au voisinage de 0.
Comme $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\alpha}}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente car $1-\alpha < 1$, alors d'après le critère d'équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$ est convergente.

Définition

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *continue.*

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est absolument convergente si* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ *est convergente.*

Théorème

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *continue.*

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Remarque

La réciproque du théorème est fausse. Dans ce cas, une intégrale généralisée convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.

Exercice

Eudier la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\, dt$.

Solution : On a pour tout $t \geq 1, \quad 0 \leq \left|\dfrac{\sin t}{t^3}\right| \leq \dfrac{1}{t^3}$.

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\, dt$ est une intégrale de Riemann convergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^3}\right| dt$ est convergente. Ce qui veut dire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\, dt$ est absolument convergente.

Critère de Riemann

Proposition

(i) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur* $[a,+\infty[$ *telle que* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}f(x) = k$ *existe.*

- *Si* $\alpha > 1$, *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *est absolument convergente.*
- *Si* $\alpha \leq 1$ *et* $k \neq 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *est divergente.*

(ii) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur* $]a,b]$ *telle que* $\lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^{\alpha}f(x) = k$ *existe.*

- *Si* $\alpha < 1$, *alors* $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\,dt$ *est absolument convergente.*
- *Si* $\alpha \geq 1$ *et* $k \neq 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\,dt$ *est divergente.*

Exercice

Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$.

Solution : La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2, +\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$. Donc, d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$ est absolument convergente. Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$ est convergente.

Exercice

Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2-1}$.

Solution : La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $]-1,0]$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{2}$. Donc, d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2-1}$ est divergente.