Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Cours Analyse II

Arij Bouzelmate

Filières: **SMP-SMC**

Définition

Soit ϕ *une fonction de trois variables à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
On appelle équation différentielle du premier ordre, une relation de la forme $\phi(x, y, y') = 0$ *faisant intervenir une variable* x, *une fonction* $y = y(x)$ *et sa dérivée* $y'(x)$.
Une fonction f *dérivable est dite solution de cette équation sur* $I \subset \mathbb{R}$ *si* $\phi(x, f(x), f'(x)) = 0$ *pour tout* $x \in I$.

Exemple

L'équation $x^3y' - 2 = 0$ *est une équation différentielle du premier ordre. Elle admet* $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ *comme solution sur* $I = \mathbb{R}^*$.

Equation à Variables Séparées

Définition

L'équation différentielle du premier ordre à variables séparées est de la forme

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Méthode de Résolution : On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad &\Rightarrow \quad g(y)\,dy = f(x)\,dx \\ &\Rightarrow \quad \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Le problème se ramène à deux intégrations.

Exercice

Résoudre l'équation différentielle $x\,y' - 2y = 0.$

Solution : On a

$$\begin{aligned} x\,y' - 2y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + cte = \ln x^2 + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}x^2. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle $x\,y' - 2y = 0$ est

$$y = Cx^2; \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Cas Particulier : Equation Autonome

Définition

L'équation autonome est un cas particulier d'équation séparable, elle est de la forme

$$y' = g(y).$$

Méthode de Résolution : L'équation autonome est indépendante de x. On a alors,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = g(y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = dx \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx = x + cte. \end{aligned}$$

Exercice

Résoudre l'équation $y' = y^2 + y$.

Solution : On a

$$\begin{aligned}
y' = y^2 + y \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y^2 + y \Rightarrow \frac{dy}{y^2+y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+y} = x + cte \\
&\Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = x + cte \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| - \ln|y+1| = \ln\left| \frac{y}{y+1} \right| = x + cte \\
&\Rightarrow \quad \left| \frac{y}{y+1} \right| = e^{cte}\, e^x \Rightarrow \frac{y}{y+1} = Ce^x;\ C \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad y = Ce^x(y+1) \Rightarrow y = \frac{Ce^x}{1 - Ce^x};\ \ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle $y' = y^2 + y$ est

$$y = \frac{C}{e^{-x} - C};\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Equation Homogène

Définition

L'équation différentielle du premier ordre homogène est de la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Méthode de Résolution : On pose $u = \dfrac{y}{x}$; alors $y = u\,x$ et $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u = f(u) \quad &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u \\ &\Rightarrow \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \qquad \text{(séparation des variables)} \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + cte. \end{aligned}$$

On pose $g(u) = \displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u}$, alors $\ln|x| = g(u) + cte$. Ceci donne $|x| = e^{cte} e^{g(u)}$. D'où, $x = Ce^{g(u)}$; $C \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$y = u\,x = Cu\,e^{g(u)}; \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Exercice

Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Solution : L'équation différentielle $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$.

On pose $u = \dfrac{y}{x}$; alors $y = u\,x$ et $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$
\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} + u = f(u) = \frac{u}{1+u^2} \quad & \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u = \frac{-u^3}{1+u^2} \\
& \Rightarrow \quad \frac{-(1+u^2)}{u^3}du = \frac{dx}{x} \\
& \Rightarrow \quad -\int \frac{(1+u^2)}{u^3}\,du = \int \frac{dx}{x} \\
& \Rightarrow \quad -\int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} + u = \frac{u}{1+u^2} \quad & \Rightarrow \quad \ln|x| = \frac{1}{2u^2} - \ln|u| + cte \\
& \Rightarrow \quad |x| = \frac{e^{cte}}{|u|} e^{1/(2u^2)} \\
& \Rightarrow \quad x = \frac{C}{u} e^{1/(2u^2)}; \;\; C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ est :

$$
y = u\,x = Ce^{1/(2u^2)} = Ce^{x^2/(2y^2)}.
$$

C'est une forme implicite impossible à résoudre sous la forme $y = f(x)$.

Définition

L'équation différentielle du premier ordre linéaire est de la forme

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x); \qquad (E).$$

avec $a(x)$, $b(x)$ *et* $f(x)$ *sont des fonctions continues sur un même ensemble.*
La fonction $f(x)$ *est appelée second membre de l'équation* (E).
L'équation sans second membre associée est :

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = 0; \qquad (E_h).$$

Exemple

(i) *L'équation* $x\,y' + (\cos x)y = 2x^2$ *est linéaire.*

(ii) *L'équation* $y'\,y + xy = 2x - 1$ *n'est pas linéaire.*

Méthode de Résolution : On considère l'équation E_h avec $a(x) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \quad &\Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b(x)}{a(x)}\,y \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx + cte
\end{aligned}$$

Soit $A(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx$. Alors, $\ln|y| = -A(x) + cte$. Donc,
$|y| = e^{cte}e^{-A(x)}$ et par suite, $y = \pm e^{cte}e^{-A(x)}$.
Par conséquent, $y_h(x) = Ce^{-A(x)};\ \ C \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation sans second membre (E_h).

Remarque

L'équation linéaire sans second membre est à variables séparées.

Théorème

Soient y_h la solution générale de l'équation (E_h) et y_p une solution particulière de l'équation (E). Alors, la solution générale y de (E) est donnée par

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Maintenant, pour chercher une solution particulière de (E), on applique une méthode générale appelée méthode de la variation de la constante.

Méthode de la Variation de la Constante

Soit y_h la solution générale de l'équation sans second membre (E_h).
Donc, $y_h(x) = Ce^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$ et $A(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx$.
La méthode de la variation de la constante consiste à remplacer la constante C par une fonction $C(x)$ et chercher une solution particulière de l'équation avec second membre (E) de la forme $y(x) = C(x)e^{-A(x)}$.
On calcule y', on remplace y et y' par leurs expressions dans l'équation (E) et on utilise le fait que $e^{-A(x)}$ est solution de (E_h), on trouve

$$C'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)},$$

ce qui implique

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)}\,dx + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution générale de l'équation avec second membre (E) est

$$y(x) = C(x)e^{-A(x)} = e^{-A(x)} \int \frac{f(x)}{a(x)} e^{A(x)}\, dx + ke^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R},$$

c'est à dire

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

avec

$$y_h(x) = ke^{-A(x)}; \;\; k \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (E_h) et

$$y_p(x) = e^{-A(x)} \int \frac{f(x)}{a(x)} e^{A(x)}\, dx$$

est une solution particulière de (E).

Exercice

Résoudre l'équation linéaire $(1+x^2)y' + xy = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Solution : On commence par résoudre l'équation sans second membre $(1+x^2)y' + xy = 0$.

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y' + xy = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{1+x^2}y \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-x}{1+x^2}dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-x}{1+x^2}\,dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = \frac{-1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x^2)y' + xy = 0 \Rightarrow \ln|y| &= \frac{-1}{2}\ln(1+x^2) + cte = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + cte\\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $(1+x^2)y' + xy = 0$ est

$$y_h(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $(1+x^2)y' + xy = \dfrac{x}{1+x^2}$ est de la forme

$$y_p(x) = k(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $(1+x^2)y' + xy = \dfrac{x}{1+x^2}$, on trouve que

$$k'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation $(1+x^2)y' + xy = \dfrac{x}{1+x^2}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Equation de Bernoulli

Définition

L'équation de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)\,y^m, \qquad m \in \mathbb{R}.$$

Méthode de Résolution : D'abord, on remarque que $y = 0$ est solution de l'équation Bernoulli.
Maintenant, pour chercher une solution générale non identiqument nulle y de l'équation de Bernoulli, on distingue deux cas.

• Si $m = 1$, l'équation devient $a(x)y' + \Big(b(x) - f(x)\Big)y = 0$. La solution générale est

$$y(x) = Ce^{-B(x)}; \qquad C \in \mathbb{R}; \qquad \text{où} \qquad B(x) = \int \frac{b(x) - f(x)}{a(x)}\,dx.$$

- Si $m \neq 1$, on a

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)\,y^m \quad \Rightarrow \quad a(x)y'y^{-m} + b(x)y^{1-m} = f(x)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a(x)}{1-m}\left(y^{1-m}\right)' + b(x)y^{1-m} = f(x).$$

On pose $u = y^{1-m}$, alors l'équation devient

$$\frac{a(x)}{1-m}u' + b(x)u = f(x).$$

On s'est ramené donc à une équation linéaire du premier ordre en u avec

$$u = y^{1-m}.$$

Exercice

Résoudre l'équation de Bernoulli $x\,y' + y = x^2y^2$.

Solution : On a $y = 0$ est solution de l'équation de Bernoulli.
On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle.
On a

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow xy'y^{-2} + yy^{-2} = x^2 \Rightarrow -x\left(\frac{1}{y}\right)' + \frac{1}{y} = x^2.$$

On pose $u = \dfrac{1}{y}$; alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$-xu' + u = x^2.$$

Résolution d'une Equation de Bernoulli

On commence par résoudre l'équation sans second membre $-xu' + u = 0$.

$$\begin{aligned}
-xu' + u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \\
&\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \ln|u| = \ln|x| + cte \\
&\Rightarrow |u| = e^{cte}|x| \\
&\Rightarrow u = \pm e^{cte} x.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $-xu' + u = 0$ est

$$u_h(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Résolution d'une Equation de Bernoulli

La solution particulière de l'équation $-xu' + u = x^2$ est de la forme

$$u_p(x) = k(x)x.$$

On calcule u_p' et on remplace dans l'équation $-xu' + u = x^2$, on trouve que $k'(x) = -1$, par suite

$$u_p(x) = -x\,x = -x^2.$$

Donc, la solution générale de l'équation $-xu' + u = x^2$ est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx - x^2; \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation de Bernoulli est

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{kx - x^2}; \qquad k \in \mathbb{R}.$$