Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Cours Analyse II

Arij Bouzelmate

Filières: **SMP-SMC**

Equations Différentielles Linéaires du Second Ordre à Coefficients Constants

Définition

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x), \qquad (E)$$

avec a, b, c des réels et f une fonction de x.
L'équation sans second membre associée à l'équation (E) est

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad (E_h)$$

Résolution de l'Equation Sans Second Membre (E_h)

Définition

Deux fonctions y_1 et y_2 sont dites linéairement indépendantes si

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Théorème

L'équation sans second membre (E_h) possède deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2.
De plus, toute solution y de (E_h) est de la forme

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x); \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de l'Equation Sans Second Membre (E_h)

Méthode de Résolution : Pour résoudre l'équation sans second membre (E_h), on cherche une solution de la forme $y(x) = e^{\lambda x}$.
En remplaçant dans l'équation, on trouve l'équation caractéristique

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0; \qquad (E\,C).$$

La résolution de l'équation (E_h) dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.
Cas1 : $\Delta > 0$
L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \ \text{ et } \ \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

La solution générale de l'équation (E_h) est

$$y_h(x) = C_1\, e^{\lambda_1 x} + C_2\, e^{\lambda_2 x}, \qquad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Cas2 : $\Delta = 0$

L'équation caractéristique admet une racine réelle double $\lambda = \dfrac{-b}{2a}$.

La solution générale de l'équation (E_h) est

$$y_h(x) = e^{\lambda x}\Big(C_1 x + C_2\Big), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Cas3 : $\Delta < 0$

L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \;\text{ et }\; \lambda_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

On pose $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, alors la solution générale de l'équation (E_h) est $y_h(x) = e^{\alpha x}\Big(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\Big), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$

Application

Exercice

Résoudre l'équation $y'' + y' - 2y = 0.$

Solution : L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$
Comme $\Delta = 9 > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$. Donc, la solution générale est

$$y(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-2x}, \qquad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice

Résoudre l'équation $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Solution : L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0.$
Comme $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine réelle double $\lambda = -3$. Donc, la solution générale est

$$y(x) = e^{-3x}\Big(C_1\, x + C_2\Big), \qquad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice

Résoudre l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0.$

Solution : L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$
Comme $\Delta = -4 < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i.$
Donc, la solution générale est

$$y(x) = e^{-x}\Big(C_1 \cos x + C_2 \sin x\Big), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Théorème

Soient y_h la solution générale de l'équation sans second membre (E_h) et y_p une solution particulière de l'équation (E). Alors, la solution générale y de (E) est donnée par

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Recherche d'une Solution Particulière de l'Equation Avec Second Membre Classique

1− $ay'' + by' + cy = P_n(x)\,;\quad P_n$ un polynôme de degré n.
On cherche une solution particulière y_p telle que

$$y_p(x) = \begin{cases} Q_n(x), & \text{si } c \neq 0, \\ x\,Q_n(x), & \text{si } c = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ x^2\,Q_n(x), & \text{si } c = b = 0. \end{cases}$$

avec Q_n un polynôme de degré n.

Recherche d'une Solution Particulière de l'Equation Avec Second Membre Classique

2− $ay'' + by' + cy = e^{mx} P_n(x)$; P_n un polynôme de degré n et $m \in \mathbb{R}^*$.
On cherche une solution particulière y_p telle que

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{mx} Q_n(x), & \text{si } m \text{ n'est pas racine de } (EC), \\ e^{mx} x Q_n(x), & \text{si } m \text{ est racine simple de } (EC), \\ e^{mx} x^2 Q_n(x), & \text{si } m \text{ est racine double de } (EC). \end{cases}$$

avec Q_n un polynôme de degré n.
3− $ay'' + by' + cy = e^{mx}\Big(\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)\Big)$; $\omega \neq 0$.
On cherche une solution particulière y_p telle que

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{mx}\Big(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\Big), & \text{si } m + i\omega \text{ n'est pas racine de } (EC), \\ x\, e^{mx}\Big(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\Big), & \text{si } m + i\omega \text{ est racine de } (EC). \end{cases}$$

Exercice

Résoudre l'équation différentielle du second ordre $y'' - 4y = x\,e^{2x}$.

Solution : On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' - 4y = 0$.
L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 4 = 0$.
Elle admet deux racines réelles $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$.
Donc, la solution générale de l'équation $y'' - 4y = 0$, est

$$y_h(x) = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-2x} : \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Application

Le second membre de l'équation $y'' - 4y = x\,e^{2x}$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = 2$ et $n = 1$.
Comme 2 est racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{2x}\,x\,(ax+b)$.
C'est à dire $y_p(x) = e^{2x}\left(ax^2 + bx\right)$.
On pose $u(x) = ax^2 + bx$. Alors, $y_p(x) = e^{2x}\,u(x)$.
On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' - 4y = x\,e^{2x}$, on trouve

$$8ax + 2a + 4b = x.$$

D'où par identification, $a = \dfrac{1}{8}$ et $b = \dfrac{-1}{16}$.

Donc, la solution particulière est

$$y_p(x) = e^{2x}\left(\frac{x^2}{8} - \frac{x}{16}\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' - 4y = x\,e^{2x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \left(\frac{x^2}{8} - \frac{x}{16} + C_1\right)e^{2x} + C_2\,e^{-2x} : \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Principe de Superposition

Si le second membre de l'équation (E) est de la forme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),$$

on cherche une solution particulière $y_{P_i}(x)$ de l'équation

$$ay'' + by' + cy = f_i(x); \qquad (E_i).$$

Une solution particulière $y_p(x)$ de (E) est alors donnée par

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_n}(x).$$

Résolution de l'Equation Avec Second Membre Quelconque

Remarque

Lorsque le second membre n'est pas l'une des formes indiquées précédemment, on cherche une solution particulière de (E) *en utilisant la méthode de variation des constantes.*

Recherche d'une Solution Particulière : Méthode de Variation des Constantes

Soit y_h la solution générale de l'équation sans second membre (E_h). Donc, $y_h(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$, où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (E_h).
la méthode de variation des constantes consiste à remplacer les deux constantes C_1 et C_2 par des fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ et chercher une solution particulière de (E) de la forme

$$y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x).$$

Puisqu'on cherche une solution particulière, on impose la condition suivante :

$$C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0.$$

Ce qui donne

$$y'(x) = C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x).$$

On calcule ensuite $y''(x)$, on remplace dans l'équation (E) et on utilise le fait que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation sans second membre. On trouve

$$C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = \frac{f(x)}{a}.$$

Il faut donc résoudre le système suivant dont les inconnus sont $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$.

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Comme y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, alors le déterminant appelé le Wronskien $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$ est non nul.

Recherche d'une Solution Particulière : Méthode de Variation des Constantes

Les deux solutions du système sont

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{f(x)}{a} & y_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{-f(x)\,y_2(x)}{aW}$$

et

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \dfrac{f(x)}{a} \end{vmatrix}}{W} = \frac{f(x)\,y_1(x)}{aW}.$$

On obtient donc les fonctions C_1 et C_2 en intégrant les fonctions C_1' et C_2'.
Par suite on trouve $y_p(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x)$.

Exercice

Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \qquad x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[; \qquad (E)$$

Solution : On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$y'' + y = 0.$$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 1 = 0$.
Elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.
Donc, la solution générale de l'équation $y'' + y = 0$, est

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Application

Remarquons que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, on utilise la méthode de variation des constantes et on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = C_1(x)\ \cos x + C_2(x)\ \sin x.$$

Puisqu'on cherche une solution particulière, on impose la condition suivante :

$$C_1'(x)\ \cos x + C_2'(x)\ \sin x = 0.$$

Ce qui donne

$$y_p'(x) = -C_1(x)\ \sin x + C_2(x)\ \cos x.$$

On calcule ensuite $y_p''(x)$, on remplace dans l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ et on utilise le fait que $\cos x$ et $\sin x$ sont deux solutions de l'équation $y'' + y = 0$. On trouve

$$-C_1'(x)\ \sin x + C_2'(x)\ \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

On résout donc le système suivant dont les inconnus sont $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array} \right.$$

On a le Wronskien $W = \begin{vmatrix} \cos & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Les deux solutions du système sont

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{W} = \frac{-\sin x}{\cos x}.$$

et

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{W} = 1.$$

Donc, puisque $\cos x > 0, \ \forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$C_1(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = \ln(\cos x)\,.$$

et

$$C_2(x) = \int dx = x.$$

Donc, la solution particulière de l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ est

$$\begin{aligned} y_p(x) &= C_1(x)\ \cos x + C_2(x)\ \sin x \\ &= \ln(\cos x)\cos x + x\sin x. \end{aligned}$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ est

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \ln(\cos x) \cos x + x \sin x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$y(x) = \Big(\ln(\cos x) + C_1 \Big) \cos x + (x + C_2) \sin x; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$