Université Abdelmalek Essaadi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Licence d'Éducation des Sciences Mathématiques

Analyse Complexe

Professeur : Arij BOUZELMATE

2020/2021

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

FONCTION COMPLEXE D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Définition :

Une fonction complexe de variable complexe est une application de $\mathbb{C}$ ou d'une partie de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On note

$$f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longrightarrow f(z)$$

$z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ avec x et $y \in \mathbb{R}$.
$f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ avec P et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemples :

1/ $f(z) = 1 + z$. $\quad P(x,y) = 1 + x$, $Q(x,y) = y$.

2/ $f(z) = \bar{z} = x - iy$. $\quad P(x,y) = x$, $Q(x,y) = -y$.

3/ $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2+y^2}$. $\quad P(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

4/ $f(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$. $\quad P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = 0$.

5/ $f(z) = iz$. $\quad P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$.

1.1 Limite et continuité

Définition :

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$; $|z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$.
- f est continue en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Propriété :

Soit $l = A + iB$, (A et $B \in \mathbb{R}$), $\quad (z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0)$.

$$\begin{array}{ccc} f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) & \longrightarrow & l = A + iB \\ z & \longrightarrow & z_0 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{ccc} P(x,y) & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longrightarrow & (x_0,y_0). \end{array} \text{ et } \begin{array}{ccc} Q(x,y) & \longrightarrow & B \\ (x,y) & \longrightarrow & (x_0,y_0). \end{array}$$

Preuve :

$$|f(z) - l| = \sqrt{(P(x,y) - A)^2 + (Q/x,y) - B)^2} \longrightarrow 0 \quad (z \longrightarrow z_0)$$

$$P(x,y) - A \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad Q(x,y) - B \longrightarrow 0$$
$$(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0). \qquad (x,y) \longrightarrow (x_0,y_0).$$

Remarque :

Les opérations classiques sur les limites (somme, produit, quotient) connues dans R restent valables dans C. (même chose avec la continuité).

CHAPITRE 2

FONCTION HOLOMORPHE

Définition :

Soit A ouvert de $\mathbb{C}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in A$.

f est holomorphe en z_0 si $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe appartient à $\mathbb{C}$.

On dit aussi :

→ f admet une dérivée en z_0 par rapport à la variable complexe.

→ f dérivable en z_0.

Proposition :

f est dérivable en z_0 $\iff$ $\exists\, l \in \mathbb{C}$: $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)(l + \varepsilon(z))$

(f différentielle en z_0) $\quad \varepsilon(z) \longrightarrow 0$ quand $z \longrightarrow z_0$

Définition :

f est holomorphe dans A, si f est holomorphe en tout point de A.

Si $z \longrightarrow f'(z)$ est continue, ($\forall z \in A$) on dit que f est continûment différentiable ou de classe C^1 (sur A).

Théorème 1 :

$f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ $\simeq (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

f est holomorphe en z_0 (respectivement continûement différentielle) $\iff$ P et Q sont différentiables (respectivement continûment différentiables) en (x_0, y_0) et vérifient les conditions de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Preuve :

/

f holomorphe en z_0 $\quad \dfrac{f(z_0+u)-f(z_0)}{u} = f\ (z_0) + \varepsilon(u) \quad \varepsilon(u) \underset{(u}{\longrightarrow} \underset{0)}{0}$

$$f(z_0+u) - f(z_0) = u\left(f\ (z_0) + \varepsilon(u)\right).$$

Posons $u = h + ik$; $f\ (z_0) = A + iB$; $\varepsilon(u) = \varepsilon_1(h,k) - i\varepsilon_2(h,k)$ $(h,\ k,\ A,\ B,\ \varepsilon_1(h,k)$ et $\varepsilon_2(h,k)$ $\quad$ R)

alors $P(x_0+h, y_0+k) + iQ(x_0+h, y_0+k) - P(x_0,y_0) - iQ(x_0,y_0) = (h+ik)\left(A + iB + \varepsilon_1(h,k) + i\varepsilon_2(h,k)\right)$

en identifiant partie réelles =

$$\left\{\begin{array}{l} P(x_0+h,y_0+k) - P(x_0,y_0) = \underbrace{hA - kB}_{(Adx-Bdy)(h,k)} + h\varepsilon_1(h,k) - k\varepsilon_2(h,k). \\ Q(x_0+h,y_0+k) - Q(x_0,y_0) = hB - kA + h\varepsilon_2(h,k) + k\varepsilon_1(h,k). \end{array}\right.$$

et parties imaginaires

$=$ $\quad P$ et Q différentiables et $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = A,\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -B$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = B \quad , \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = A$$

d'où les conditions de **Cauchy**

$$\begin{aligned} f\ (z_0) = A + iB &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

donc si f est cont.diff $=$ $\quad f$ holomorphe et $f\ (z)$ cont.

$=$ $\quad f$ holomorphe et $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ sont continues.

$=$ $\quad P$ et Q continûment différentiables.

/

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(x_0+h,y_0+k) - P(x_0,y_0) &=& h\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + k\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) + \|(h,k)\|\ \varepsilon_1(h,k) \quad \varepsilon_1 \underset{(h,k)}{\longrightarrow} \underset{(0,0)}{0} \\ Q(x_0+h,y_0+k) - Q(x_0,y_0) &=& h\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) + k\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) + \|(h,k)\|\ \varepsilon_2(h,k) \quad \varepsilon_2 \underset{(h,k)}{\longrightarrow} \underset{(0,0)}{0} \\ &=& -h\dfrac{\partial P}{\partial y}(\ ,\ ) + k\dfrac{\partial P}{\partial x}(\ ,\ ) + \|(h,k)\|\ \varepsilon_2(h,k) \end{array}\right.$$

alors

$$
\begin{aligned}
f(z_0+u)-f(z_0) &= h\frac{\partial P}{\partial x}(\ ,\ ) + k\frac{\partial P}{\partial y}(\ ,\ ) - ih\frac{\partial P}{\partial y}(\ ,\ ) + ik\frac{\partial P}{\partial x}(\ ,\ ) + \|(h,k)\|\,[\varepsilon_1(h,k)+i\varepsilon_2(h,k)].\\
&= (h+ik)\left(\frac{\partial P}{\partial x}(\ ,\ ) - i\frac{\partial P}{\partial y}(\ ,\ )\right) + (h+ik)\left(\frac{\|(h,k)\|}{(h+ik)}\bullet(\varepsilon_1+i\varepsilon_2)\right),
\end{aligned}
$$

avec $\dfrac{\|(h,k)\|}{(h+ik)}$ est de norme 1 et $\varepsilon_1+i\varepsilon_2 \to 0$ quand $(h,k)\to 0$.

Donc $f\ (z_0)$ existe et vaut $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$ et le résultat en découle.

Exemples : $I : z \longrightarrow z.$

I est holomorphe dans C et z C, $I\ (z) = 1$

$z \longrightarrow \bar{z}$ n'est holomorphe en aucun point, car les conditions de Cauchy ne sont pas vérifiées.

$\bar{z} = x - iy$; $P(x,y) = x$; $Q(x,y) = -y$; $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 1 = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -1.$

Propriétés :

Si f et g sont holomorphes en z_0 C, λ C, alors :

$f+\lambda g$ et $f.g$ sont holomorphes en z_0 ; et

$$
\begin{aligned}
(f+\lambda g)\ (z_0) &= f\ (z_0)+\lambda g\ (z_0).\\
(f.g)\ (z_0) &= f\ (z_0).g(z_0)+f(z_0).g\ (z_0).
\end{aligned}
$$

Preuve :

La preuve est analogue à celle des applications de R $\longrightarrow$ R en revenant à la définition de la dérivée.

Conséquence :

$z \longrightarrow z^2$, $z \longrightarrow z^n$ et plus généralement $z \longrightarrow a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ sont holomorphes dans C.

Propriété :

f et g sont holomorphes en z_0, $g(z_0) = 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est holomorphe en z_0 et $\left(\dfrac{f}{g}\right)(z_0) = \dfrac{f\ (z_0)g(z_0) - f(z_0)g\ (z_0)}{\left(g(z_0)\right)^2}$.

Théorème 2 :

Soit Ω un domaine de C (Ω ouvert connexe). Si $f\ (z) = 0$ z Ω, alors f est constante sur Ω.

Preuve :

$$
\begin{aligned}
f(z) = P + iQ &= f\ (z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0\\
&= \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0
\end{aligned}
$$

$$= \begin{cases} dP = 0 \text{ (dans } \Omega \text{ connexe)} & = \quad P = \text{constante} \\ dQ = 0 \text{ (dans } \Omega \text{ connexe)} & = \quad Q = \text{constante} \end{cases} = \quad f = \text{constante.}$$

Corollaire :

Si f admet une primitive F dans un domaine de C (c'est-à-dire : $F(z) = f(z)$), alors les autres primitives sont la forme $F + \lambda$ ou λ C.

2.1 Fonctions harmoniques conjuguées

Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ holomorphe dans D = $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ satisfont aux conditions de Cauchy (x, y) D.

On suppose ici que P et Q admettent des dérivées partielles secondes continues dans D.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{on verra plus tard} \quad f \text{ holomorphe dans } D \\ D \text{ domaine} \end{array} \right\} = \quad f \text{ indéfiniment dérivable dans } D \;.$$

En dérivant les conditions de Cauchy, on obtient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \,;\, \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} \quad = \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \,;\, \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \quad = \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

Définition :

Dans R^2 , $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ s'appelle équation de **laplace**, et une solution de cette équation s'appelle fonction harmonique.

Donc ici, P et Q sont deux fonctions harmoniques dans D.

Remarque :

P et Q harmoniques ; $P + iQ$ holomorphe.

Contre exemple :

$$\begin{array}{lll} P(x, y) = x & ; & \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \\ Q(x, y) = -y & ; & \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \end{array}$$

P et Q sont harmoniques, mais $P(x, y) + iQ(x, y) = x - iy = \bar{z}$ n'est jamais holomorphe.

Définition :

On dit que deux fonctions harmoniques dans D, P et Q forment un couple de fonctions harmoniques conjuguées si elles constituent la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe $f(z)$.

Problème :

Étant donnée $P(x,y)$ harmonique dans D "un ouvert convexe ou étoilé", trouver une fonction holomorphe f qui admet P pour partie réelle (c'est-à-dire chercher Q : $f(z) = P + iQ$ soit holomorphe).

(On suppose P de classe C^2).

$$P \text{ harmonique} \quad = \quad \omega = -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy \text{ (de classe } C^1\text{) est fermée (dans } D \text{ domaine ouvert étoilé ou convexe)}$$

$$= \quad \omega \text{ est exacte}$$

$$= \quad Q \text{ tel que : } \omega = dQ$$

$$= \quad -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy.$$

Conclusion :

P et Q sont diﬀérentiables et on a les conditions de Cauchy, d'où $f(z) = P + iQ$ est holomorphe.
Pour obtenir Q ; on intègre les conditions de Cauchy.

Exemple :

Soit $P(x,y) = x^2 - y^2$.
Chercher f holomorphe dans C tel que P soit sa partie réelle.
$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, donc P est harmonique.
?Q tel que : $P + iQ$ soit holomorphe.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (1).$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2).$$

$$(1) \quad = \quad \int \frac{\partial Q}{\partial y}dy = \int \frac{\partial P}{\partial x}dy + C(x) = \quad Q(x,y) = \int 2x dy + C(x).$$

$$= \quad Q(x,y) = 2xy + C(x). \quad = \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2y + C'(x).$$

$$(2) \quad = \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \text{ d'où } C'(x) = 0 = \quad C(x) = K \quad \mathbb{R}.$$

$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + K)\cdots$, (exprimer $f(z)$ en fonction de z).

2.2 Différentielle d'une fonction complexe

Soit f holomorphe dans D ; $z = x + iy$.
Posons (par définition) $dz = dx + idy$.

Définition :

On appelle différentielle de f au point z, l'application : $df = f'(z)\, dz$.

Proposition :

Si $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ alors $df = dP + idQ$.

Preuve :

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \\
df &= f'(z)\, dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\right)(dx + idy) \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}dx - \frac{\partial Q}{\partial x}dy + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy\right) \\
&\quad \downarrow \ \text{(conditions de Cauchy)} \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \\
&= dP + idQ.
\end{aligned}
$$

CHAPITRE 3

FONCTIONS EXPONENTIELLE COMPLEXE ET LOGARITHME COMPLEXE

3.1 Exponentielle complexe

Définition :

La fonction exponentielle complexe est définie sur C par :

$$e^z = e^x(\cos\ y + i\ \sin\ y) \text{ où } z = x + iy, \quad x, y \quad \mathbb{R}.$$

e^z a pour partie réelle $P(x, y) = e^x\ \cos\ y$ et pour partie imaginaire $Q(x, y) = e^x\ \cos\ y$.

Propriété :

La fonction e^z est holomorphe C et $(e^z) = e^z$.

Preuve :

$P(x, y) = e^x\ \cos\ y$ et $Q(x, y) = e^x\ \sin\ y$ vérifient les conditions de Cauchy :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial(e^x\ \cos y)}{\partial x} = e^x\ \cos y \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial(e^x\ \sin y)}{\partial y} = e^x\ \cos y \end{aligned}\right\} = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial(e^x\ \cos y)}{\partial y} = -e^x\ \sin y \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial(e^x\ \sin y)}{\partial x} = e^x\ \sin y \end{aligned}\right\} = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

P et Q sont différentiables, comme produits de fonctions différentielles (sur $\mathbb{R}^2$).

$$(e^z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial(e^x\ \cos y)}{\partial x} + i\frac{\partial(e^x\ \sin y)}{\partial x} = e^x\ \cos y + i\ e^x\ \sin y = e^z$$

3.2 Logarithme complexe

3.2.1 1/ Résolution de l'équation en Z

$e^Z = z$ où $z = 0$, donné
$Z = X + iY$ (inconnue)
$z = r(\cos\theta + i\, sin\theta)$; $|z| = r$.
On cherche Z en fonction de z , $Z = f(z)$.

$$e^Z = z \qquad e^X\,(\cos Y + i\,\sin Y) = r\,(\cos\,\theta + i\,\sin\theta)$$

$$\begin{cases} e^X = r \\ Y = \theta + 2k\pi \quad ; \quad k \quad \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = Log r \\ Y = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

Il existe donc une infinité de solutions, qui sont :

$$Z = X + iY = Log r + i\,(\theta + 2k\pi), \quad k \quad \mathbb{Z}$$

on peut dire que e^Z n'est pas bijective de $\mathbb{C} \underset{z \longrightarrow e^Z}{\longrightarrow} \mathbb{C}$

3.2.2 2/ Fonction logarithme complexe $Log z$

Définition :

la fonction $Log z$ pour $z = 0$ est définie par :

$$Log z = Log r + i\theta\,;\ -\pi < \theta\ 6\ \pi,\ r > 0$$

cette fonction est bien définie, car $z = 0$, θ unique argument de z dans $]-\pi, \pi]$; donc pour $z = 0$, $Log r + i\theta$ est unique.

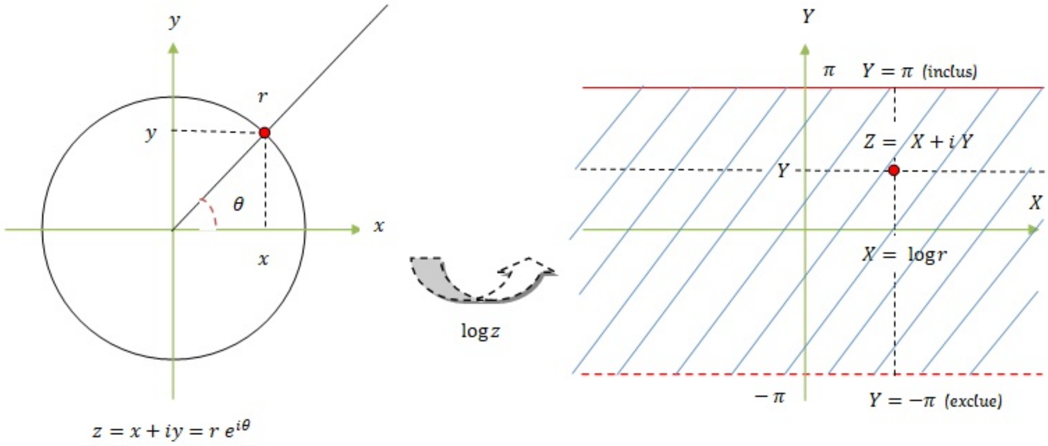
Remarque :

On ne peut pas définir $Log z$ si $-\pi\ 6\ \theta\ 6\ \pi$. Sinon, en prenant $z_0 = r\ e^{-i\pi}$ et $z_1 = r\ e^{i\pi}$
On a : $z_0 = z_1$ et $Log z_0 = Log z_1$.

$$z_0 = z_1 \qquad \begin{matrix} Log z_0 = r - i\pi \\ = \\ Log z_1 = r + i\pi \end{matrix}$$

Conclusion :

$$\begin{array}{rcll} Log : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ z & \longrightarrow & Log r + i\theta \quad , & -\pi < \theta\ 6\ \pi \\ & & (X + iY) & \end{array}$$



3.2.3 Continuité de la fonction $Logz$

$$\begin{array}{rcl} Log : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & Logr + i\theta \quad ; \quad -\pi < \theta \leqslant \pi. \end{array}$$

Problème :

$$z \longrightarrow z_0 \overset{?}{=} \quad Logz \longrightarrow Logz_0$$

En coordonnées polaires : $z_0 = (r_0,\ \theta_0)$, $z = (r, \theta)$ $\quad \theta_0 \in]-\pi, \pi]$

<u>1^{er} Cas</u> : $\theta_0 \in]-\pi, \pi[$.

$$\begin{array}{rcl} z \longrightarrow z_0 & = & (r, \theta) \longrightarrow (r_0, \theta_0) = \quad r \longrightarrow r_0 \text{ et } \theta \longrightarrow \theta_0 \text{ dans }]-\pi, \pi[\\ & = & Logr \longrightarrow Logr_0 \text{ et } \theta \longrightarrow \theta_0 \text{ dans }]-\pi, \pi[\\ & = & Logr + i\,\theta \longrightarrow Logr_0 + i\,\theta_0 \\ & = & Logz \longrightarrow Logz_0 \end{array}$$

<u>$2^{\acute{e}me}$ Cas</u> : $\theta_0 = \pi$

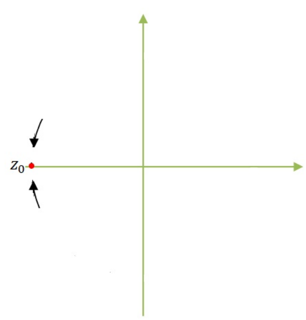
quand $z \longrightarrow z_0$, alors $\mathfrak{Im}\, z > 0$ ou $\mathfrak{Im}\, z \leqslant 0$. (dans un voisinage de z_0).

si $\mathfrak{Im}\, z > 0$ alors $\theta \longrightarrow \pi$

si $\mathfrak{Im}\, z \leqslant 0$ alors $\theta \longrightarrow -\pi$

alors $Log\ r + i\ \theta \longrightarrow \ Logr + i\pi$ ou $Log\ r - i\pi$

$Logz \longrightarrow \ Logz_0$ pas de continuité au point z_0 tel que $\theta_0 = \pi$



Proposition :

Soit Δ le demi axe des $x \leqslant 0$ $\quad (\theta = \pi)$ alors $Log\ z$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \ \Delta$

Dérivabilité : $Log\ z$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \ \Delta$ et $(Log\ z) \ = \dfrac{1}{z}$

Preuve :

On pose : $Log\ z = Z \qquad z \longrightarrow z_0 = \quad Z \longrightarrow Z_0$.

$$\frac{Logz - logz_0}{z - z_0} = \frac{Z - Z_0}{e^Z - e^{Z_0}} = \frac{1}{\frac{e^Z - e^{Z_0}}{Z - Z_0}} \underset{Z \to Z_0}{\longrightarrow} \frac{1}{(e^Z)_{Z_0}} = \frac{1}{e^{Z_0}} = \frac{1}{z_0}$$

$$\frac{Logz - Log\ z_0}{z - z_0} \longrightarrow \frac{1}{z_0}$$

Remarque :

On n'a pas toujours $Logzz \ = Logz + Logz$, sauf si arg z + arg $z \ = \theta + \theta \quad] - \pi, \pi]$.

Si par exemple, $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$, $\dfrac{\pi}{2} < \theta \ \leqslant \pi$, alors $\pi < \theta + \theta \ \leqslant 2\pi$, alors l'argument de $z\ z$ qui appartient à $] - \pi, \pi]$ est $\theta + \theta \ - 2\pi$, $(-\pi < \theta + \theta \ - 2\pi \leqslant 0)$, donc :

$$\begin{aligned} Logzz &= Log(rr\ ) + i\ (\theta + \theta \ - 2\pi) \\ &= Logr + Logr \ + i\ \theta + i\ \theta \ - i\ 2\pi \\ &= Logz + Logz \ - i\ 2\pi \end{aligned}$$

Définition :

Soit $\alpha \quad \mathbb{R}$ et considérons $]\alpha,\ \alpha + 2\pi]$.

On appelle détermination du logarithme complexe définie dans $]\alpha,\ \alpha + 2\pi]$ la fonction $\log\ z = Log\ r + i\ \theta$ où $\alpha < \theta \leqslant \alpha + 2\pi$.

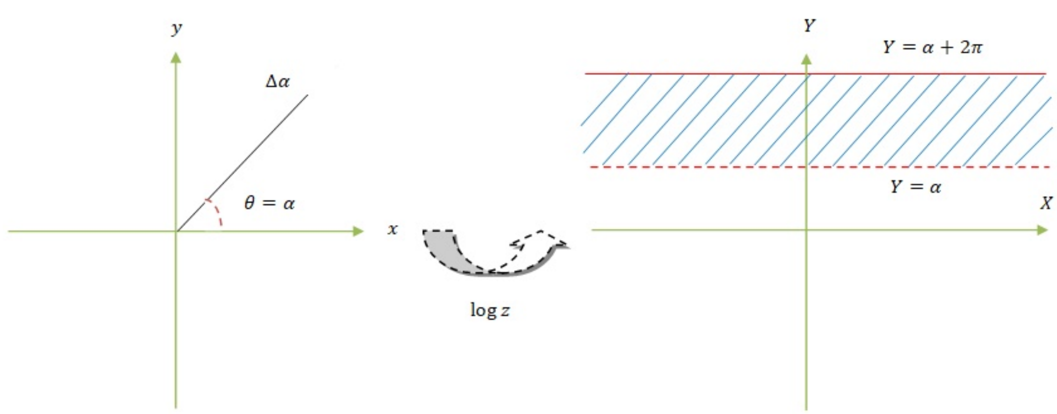
si $\alpha = -\pi$, on a la fonction $Log\ z$ qu 'on appelle détermination principale du logarithme complexe.

$\log\ z$ a des propriétés analogues à celle de $Log\ z$:

Ce sont toutes des fonctions inverses de la fonction exponentielle complexe.

$$e^{\log\ z} = z$$

$\log\ z$ holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha$ et sa dérivée est $\dfrac{1}{z}$, où Δ_α : demain correspondant à $\theta = \alpha$.



Exemple :

la fonction $\log\ z$ relative à l'intervalle $]0, 2\pi]$ est définie par :

$$\log z = Logr + i\,\theta \quad , \quad 0 < \theta \leqslant 2\pi.$$

CHAPITRE 4

FONCTION PUISSANCE

Définition :

Soit $m \in \mathbb{C}$, On appelle détermination principale de la fonction puissance, la fonction $z^m = e^{m Log z}$, $z \in \mathbb{C}^*$.
($Log\ z$ = détermination principale du logarithme complexe)

Exemple :

Calcul de i^i.
$i = 1.(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \Rightarrow Log\ i = i\frac{\pi}{2} \Rightarrow i^i = e^{i Log i} = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Propriétés :

a/ $\forall m, m' \in \mathbb{C}$; $\forall z \in \mathbb{C}^*$, on a : $z^m . z^{m'} = z^{m+m'}$.

b/ $z^{-m} = \dfrac{1}{z^m}$.

c/ $(z^m)' = m\, z^{m-1}$.

Preuve :

Rappelons d'abord que $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ $e^z . e^{z'} = e^{z+z'}$ (à voir en T.D).

a/ $z^m . z^{m'} = e^{m Log z} . e^{m' Log z} = e^{(m+m') Log z} = z^{m+m'}$.

b/ faire $m' = -m$ dans a/.

c/ $(z^m)' = (e^{m Log z})' = (m Log\ z)'\, e^{m \log z} = \dfrac{m}{z} z^m = m\, z^{m-1}$.

Exemple :

$z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} Log z} = e^{\frac{1}{2}(Log r + i\theta)} = e^{\frac{1}{2} Log r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\,(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2})$.
$z^{\frac{1}{2}}$ coïncide avec une racine de $X^2 = z$, celle qui a pour argument $\dfrac{\theta}{2}$, avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.

- On note $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$ (notation valable dans ce cas avec $-\pi < \theta \leqslant \pi$ et Log).

Définition :

On appelle détermination de la fonction puissance définie dans $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ pour l'exposant m quelconque dans $\mathbb{C}$ la fonction : $z^m = e^{m \log z}$ où $\log z$ détermination définie dans $]\alpha, \alpha + 2\pi]$

Exemple :

détermination de $z^{\frac{1}{2}}$ définie dans $]\pi, 3\pi]$, c'est-à-dire : $\theta = \arg\ z \in]\pi, 3\pi]$: $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\ (\cos\frac{\theta}{2} + i\ \sin\frac{\theta}{2})$ avec $\pi < \theta \leqslant 3\pi \Longrightarrow \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2} \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$

Soit α l'argument de z compris entre $-\pi$ et π, alors $\theta = \alpha + 2\pi$ donc $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + \pi$

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{r}\left(\cos(\tfrac{\alpha}{2} + \pi) + i\ \sin(\tfrac{\alpha}{2} + \pi)\right) \\ &= -\sqrt{r}(\cos\tfrac{\alpha}{2} + i\ \sin\tfrac{\alpha}{2}) \\ &= -\sqrt{z} \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $z^{\frac{1}{2}}$ (détermination dans $]\pi, 3\pi]$) $= -z^{\frac{1}{2}}$ (détermination dans $]-\pi, \pi]$)

CHAPITRE 5

FONCTIONS CIRCULAIRES ET HYPERBOLIQUES D'UNE VARIABLE COMPLEXE

On sait que :

$$x \quad \mathrm{R}: \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

On peut prolonger cette écriture au cas complexe et poser par définition :

$$z \quad \mathrm{C}: \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

d'où $e^{iz} = \cos z + i \ \sin z$.

On vérifie immédiatement que les formules classiques (dans R) restent valables (dans C) ; $z, z \quad \mathrm{C}$:

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= 1 \\ \cos(z + z\ ) &= \cos z \ \cos z \ - \sin z \ \sin z \\ \sin(z + z\ ) &= \sin z \ \cos z \ + \cos z \ \sin z \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on peut définir les fonctions hyperboliques d'une variables complexe en posant :

$$z \quad \mathrm{C}: \mathrm{ch}\ z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \ ; \ \mathrm{sh}\ z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

On a les relations suivantes :

$$\cos z = \mathrm{ch}\ iz \quad \text{et} \quad i \ \sin z = \mathrm{sh}\ iz$$

Proposition :

Les fonctions $\cos z$, $\sin z$, $\mathrm{ch}z$ et $\mathrm{sh}z$ sont toutes holomorphes dans C et on a :

$$\begin{aligned} (\cos z) &= -\sin z \\ (\sin z) &= \cos z \\ (\mathrm{ch}z) &= \mathrm{sh}z \\ (\mathrm{sh}z) &= \mathrm{ch}z \end{aligned}$$

Preuve :

Utiliser la définition de ces fonctions.

CHAPITRE 6

FONCTION COMPLEXE D'UNE VARIABLE RÉELLE

Définition :

On appelle fonction complexe d'une variable réelle une application de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$.
On note :

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longrightarrow & F(x) \end{array}$$

$F(x) \in \mathbb{C}$, donc $F(x) = f(x) + i\,g(x)$ avec $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>Limite</u> : $F(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} L = A + iB \iff f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} B$.

<u>Continuité</u> : F est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \iff f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$.

C'est-à-dire : F est continue en $x_0 \iff f$ et g sont continues en x_0.

<u>Dérivation</u> : $x \longrightarrow F(x) = f(x) + i\,g(x)$ est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ existe et $\in \mathbb{C}$, on la note $F'(x_0)$.

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x) + i\,g(x)) - (f(x_0) + i\,g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + i\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

. Donc F admet une dérivée en x_0, si et seulement si, f et g admettent des dérivées en x_0 et on a :

$$F'(x_0) = f'(x_0) + i\,g'(x_0)$$

. <u>Intégration</u> : Soit F continue sur $[a, b]$, par définition, on pose :

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + i \int_a^b g(x)\,dx$$

.

Remarque :

Les opérations classiques sur les limites, continuité, dérivabilité et intégration (de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) restent valables (de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$).

On a aussi $\overline{\int_a^b F(x)\,dx} = \int_a^b \overline{F(x)}\,dx$.

CHAPITRE 7

INTÉGRATION COMPLEXE

Définition :

Soient ω et η deux formes différentielles de degré 1 de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Soit γ un courbe continûment différentiable (ou de classe C^1)

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & (x(t), y(t)) \end{array}$$

par définition :

$$\int_\gamma \omega + i\,\eta = \int_\gamma \omega + i \int_\gamma \eta$$

$\alpha = \omega + i\,\eta$ est appelée forme différentielle de degré 1 à valeurs complexes.
Soit $f(z)$ une fonction <u>continue</u> (de la variable complexe z).
On pose $dz = dx + i\,dy$ et $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$; $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f(z)\,dz & = & [P(x,y) + i\,Q(x,y)][dx + i\,dy] \\ & = & [P(x,y)dx - Q(x,y)dy] + i[P(x,y)dy + Q(x,y)dx] \end{array}.$$

C'est de la forme $\omega + i\eta$
Par définition :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma [P(x,y)\,dx - Q(x,y)\,dy] + i \int_\gamma [P(x,y)\,dy + Q(x,y)\,dx]$$

Donc si γ est une courbe paramétrée par : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $a \leqslant t \leqslant b$.
alors :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b [P(x(t),y(t))\,x'(t) - Q(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt + i \int_a^b [P(x(t),y(t))\,y'(t) + Q(x(t),y(t))\,x'(t)]\,dt$$

$z(t) = x(t) + i\,y(t)$ alors $z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$.
On obtient :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt. \quad (t \longrightarrow (x(t), y(t)) \text{ est un paramétrage de } \gamma).$$

($2^{iéme}$ membre : intégrale d'une fonction complexe de variable réelle t).

Exemple :

Calcul de $I = \displaystyle\int_{C^+} \frac{1}{z-a}\,dz$, où C^+ <u>cercle de centre a</u> et de rayon r ; $C(a,r)$. $a = x_0 + i\,y_0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

C^+ est paramètre par $\phi : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & (x(t),y(t)) \end{array}$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + r\cos t \\ y(t) = y_0 + r\sin t \end{cases}$$

$z(t) = x(t) + i\,y(t) = (x_0 + r\cos t) + i\,(y_0 + r\sin t) \Rightarrow z'(t) = x'(t) + i\,y'(t) = -r\sin t + i\,r\cos t$

donc $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{r\cos t + i\,r\sin t}(-r\sin t + i\,r\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{i(r\cos t + i\,r\sin t)}{r\cos t + i\,r\sin t}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2i\pi.$

Propriété 1 : Linéarité

f, g des fonctions complexes définies sur le même domaine, $\lambda \in \mathbb{C}$.γ un chemin, ou courbe de classe C^1.

$$\int_\gamma (f+g)(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz. \quad \int_\gamma (\lambda f)(z)\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Preuve :

Utiliser la définition de l'intégrale complexe.

Propriété 2 : Changement de variables : $z = z(w)$

$$z : \begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & C \\ w & \longrightarrow & z = z(w) \end{array}$$

z holomorphe par rapporté à w et z **bijection**, alors :

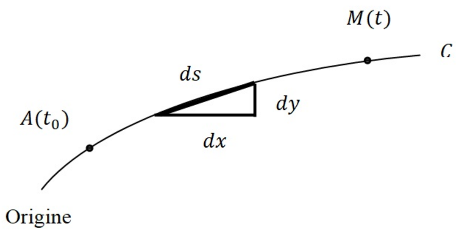
$$\int_C f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z(w))\,\frac{dz}{dw}\,dw. \qquad (dz = z'(w)\,dw)$$

Propriété 3 : Majoration d'une intégrale

$C = \overset{\frown}{AB}$, s abscisse curviligne sur C orienté de A vers B, on a :

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{s_A}^{s_B} |f(z(s))|\,ds$$

Définition de l'abscisse curviligne :



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{si} \quad s = s(t) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \Rightarrow ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Définition :

l'abscisse curviligne $s(t)$ du point $M(t)$ est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$

$$s(t) = \int_{\overset{\frown}{AM}} ds = \int_{t_0}^{t} s'(u)\, du = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du$$

$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow (\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 = 1 \Rightarrow$ le vecteur tan à C en M est $\begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ (il est unitaire)

Preuve :

de 3/ $\int_C f(z)\, dz$ est indépendante du paramètre choisi pour décrire C

On choisit le paramètre abscisse curviligne.

$$I = \int_C f(z)\, dz = \int_{s_A}^{s_B} f(z(s))\, z'(s)\, ds$$

$|z'(s)| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1 \Rightarrow z'(s) = e^{i\,\phi(s)}$, $\phi(s)$ = argument de $z'(s)$

$I \in \mathbb{C} \Rightarrow I = A\, e^{i\alpha}$ avec $A = |I| \in \mathbb{R}$.

$f(z(s)) = r(s)\, e^{i\omega(s)}$; $r(s)$ module, $\omega(s)$ argument de $f(z(s))$.

$$I = \int_{s_A}^{s_B} r(s)\, e^{i\omega(s)}\, e^{i\phi(s)}\, ds (= Ae^{i\alpha})$$

$$\Rightarrow A = \int_{s_A}^{s_B} r(s)\, e^{i(\omega(s)+\phi(s)-\alpha)}\, ds$$

$$= \int_{s_A}^{s_B} r(s)\, \cos(\omega(s) + \phi(s) - \alpha)\, ds \text{ , car } A \in \mathbb{R} \text{ (partie imaginaire = 0)}$$

$$\Rightarrow |I| = \left|\int_C f(z)\, dz\right| = A \leq \int_{s_A}^{s_B} r(s)\, |\cos(\omega(s) + \phi(s) - \alpha)|\, ds$$

$$\leq \int_{s_A}^{s_B} r(s)\, ds = \int_{s_A}^{s_B} |f(z(s))|\, ds.$$

D'où le résultat.

Corollaire :

si $M = \sup_{z \in C = \overset{\frown}{AB}} |f(z)|$ et si L est la longueur de larc $C = \overset{\frown}{AB}$, alors $\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq M.L$

Preuve :

$L = s_B - s_A$.

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{s_A}^{s_B} |f(z(s))|\,ds \leqslant \int_{s_A}^{s_B} M\,ds = M(s_B - s_A) = M.L$$

Propriété 4 :

Soit f_n une suite de fonctions complexes continues sur D ($\gamma \subset D$) qui converge uniformément vers une fonction f dans D, alors :

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Preuve :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $n > n_0 \Longrightarrow \sup_{z\in D}|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L}$, L = longueur de D

alors : $n \leqslant n_0 \Longrightarrow |\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz| = |\int_\gamma (f_n(z) - f(z))\,dz| \leqslant \sup_{z\in\gamma}|f_n(z) - f(z)|.L = \frac{\varepsilon}{L}.L = \varepsilon$

Définition :

Un domaine du plan complexe est dit simplement connexe, si pour toute courbe fermée simple C située dans D, l'intérieur de C est tout entier dans D.

Exemple :

- Le plan comlexe est simplement connexe ($\mathbb{C}$).
- Tout disque de rayon non nul est simplement connexe.
- $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.
- Les couronnes ne sont pas simplement connexes.

Théorème de Cauchy :

Soit f continûment différentiable dans un domaine D ; C une courbe fermée simple située dans D, ainsi que son intérieur. (c'est vérifiée si D est simplement connexe), alors $\int_C f(z)\,dz = 0$.

Preuve :

Soit Δ le domaine limité par C. $(C = \partial\Delta)$

$f(z)\,dz = (P\,dx - Q\,dy) + i\,(Q\,dx + P\,dy)$.

$\int_C P\,dx - Q\,dy = \int_{\partial\Delta} P\,dx - Q\,dy = \iint_\Delta d(P\,dx - Q\,dy)$. (Formule de Green-Riemann).

Calculons $d(P\,dx - Q\,dy)$

$d(P\,dx - Q\,dy) = dP \wedge dx - dQ \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx - \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy = -\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}_{=0} dx \wedge dy = 0$ (car f holomorphe vérifie les conditions de Cauchy).

Donc $\int_C P\,dx - Q\,dy = 0$.

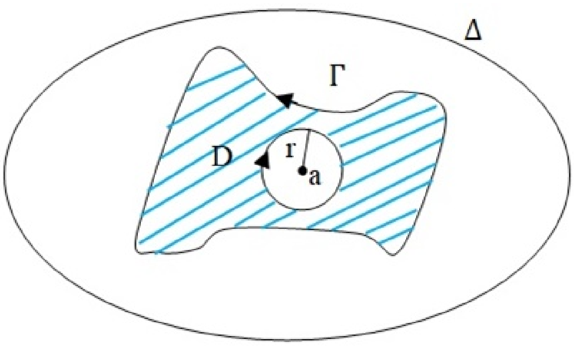
De même on trouve : $\int_C Q\,dx + P\,dy = 0$ (formule de Green Riemann + conditions de Cauchy).

D'où $\int_C f(z)\,dz = 0$.

Exemple :

Soit Γ un chemin de classe C^1 (par morceaux) fermé simple de $\mathbb{C}$, et a un point intérieur à Γ.

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz = 2i\pi \text{ (}\Gamma\text{ n'est pas forcément un cercle).}$$



$$\boxed{\partial D = \Gamma^+ \cup \gamma^-}$$

$\frac{1}{z-a}$ est continûement différentiable à l'extérieur de la boule $B(a,r)$.

$$\begin{aligned}
\text{Théorème de Cauchy} \quad &= \int_{\partial D} \frac{1}{z-a}\,dz = 0\\
&= \int_{\Gamma^+\cup\gamma^-} \frac{1}{z-a}\,dz = 0\\
&= \int_{\Gamma^+} \frac{1}{z-a}\,dz - \int_{\gamma^+} \frac{1}{z-a}\,dz = 0
\end{aligned}$$

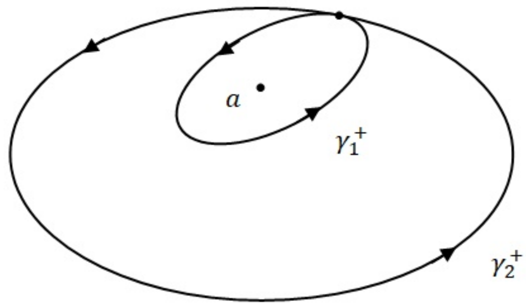
donc $\int_{\Gamma^+} \frac{1}{z-a}\,dz = \int_{\gamma^+} \frac{1}{z-a}\,dz \underset{\text{déja calculée}}{=} 2i\pi$

Remarque 1 :

l'exemple veut dire que $\int_{\Gamma^+} \frac{1}{z-a}\,dz$ est indépendante de la courbe Γ entourant le point a.

Remarque 2 :

si Γ a un point double (Γ n'est pas forcément une frontière) alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz = 2$. (indice de a par rapport à Γ).



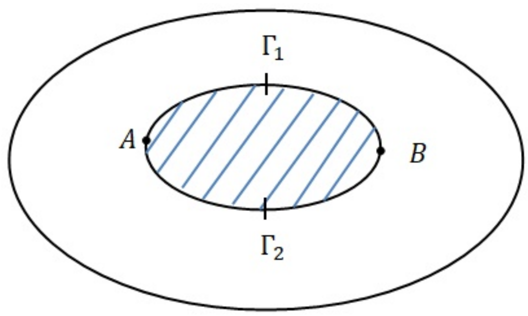
$\Gamma^+ = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^+$

$\int_{\Gamma^+} = \int_{\gamma_1^+} + \int_{\gamma_2^+} = 2\,(2i\pi)$

Conséquence 1 :

Si f est continûment différentiable dans un domaine D simplement connexe, A et B deux points de D, $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$ est indépendante du chemin suivi pour aller de A à B.

Preuve :



Appliquer le théorème de Cauchy à $A\Gamma_1 B\Gamma_2 A = C$.

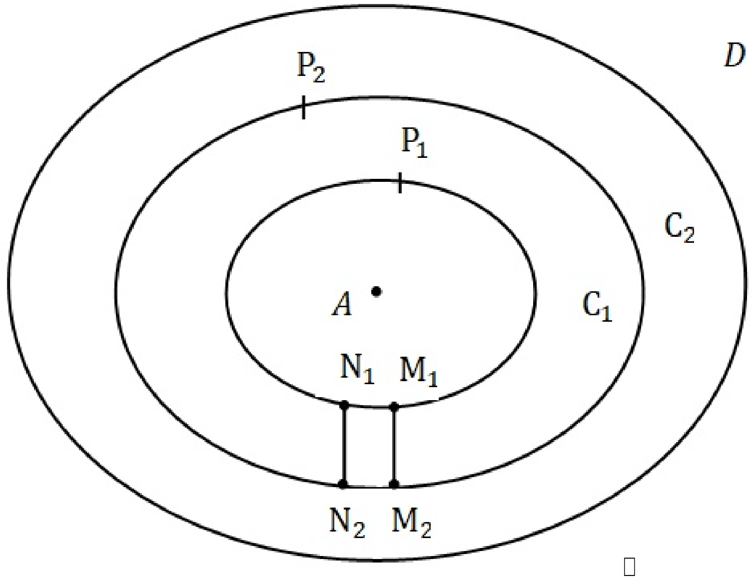
$\oint_C f(z)\,dz = 0 \Longrightarrow \int_{A\Gamma_1 B} f(z)\,dz = \int_{A\Gamma_2 B} f(z)\,dz.$

Conséquence 2 :

Soit D un domaine simplement connexe, f continûment différentiable dans $D \setminus \{A\}$; $A \in D$.
C_1 et C_2 deux courbes fermées simples dont l'intérieur de chacune contient A et sont situées dans D, alors :

$\oint_{C_1^+} f(z)\,dz = \oint_{C_2^+} f(z)\,dz.$

Preuve :



$C = M_1P_1N_1N_2P_2M_2M_1$ vérifie l'hypothèse du théorème de Cauchy, donc $\int_C f(z)\,dz = 0$.

mais $\int_C f(z)\,dz = \int_{M_1\widehat{P_1}N_1} f(z)\,dz + \int_{N_1N_2} f(z)\,dz + \int_{N_2\widehat{P_2}M_2} f(z)\,dz + \int_{M_2M_1} f(z)\,dz$.

Si on fait tendre M_1 vers N_1 sur C_1 et M_2 vers N_2 sur C_2, alors : $M_1\widehat{P_1}N_1 \longrightarrow C_1^+$, $N_2\widehat{P_2}M_2 \longrightarrow C_2^-$ et $M_2M_1 \longrightarrow N_2N_1$ ainsi on obtient le résultat voulu.

Remarque :

la conséquence 2/ signifie que $\int_{C_i} f(z)\,dz$ est indépendante de la courbe C_i qui entoure le point A dans D.

Conséquence 3 :

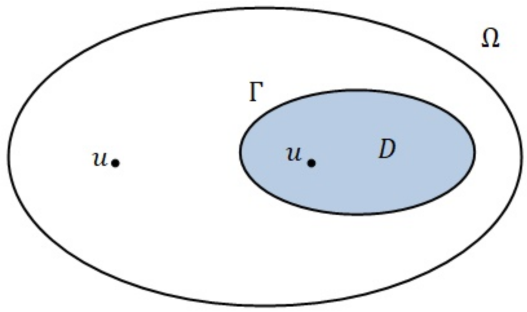
Soit f continue différentielle dans $D \setminus \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$; $A_i \in D$, $i = 1, 2, \cdots, n$.
D domaine simplement connexe.
C = courbe fermée simple situé dans D, dont l'intérieur contient tous les points A_i.
C_i courbe fermée simple à l'intérieur de C entourant A_i et laissant A_j ($j \neq i$) à son extérieur, alors :

$$\int_{C_1^+} f(z)\,dz + \cdots \int_{C_n^+} f(z)\,dz$$

7.1 Formule intégrale de Cauchy

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f continûment dérivable dans Ω.
D un domaine borné contenu dans Ω dont la frontière Γ est continûment différentiable par morceaux.
Soit $u \in \Omega - \Gamma$, alors :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{z-u}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \text{ est extérieur à } D \\ f(u) & \text{si} \quad u \text{ est intérieur à } D \end{cases}$$



Remarque :

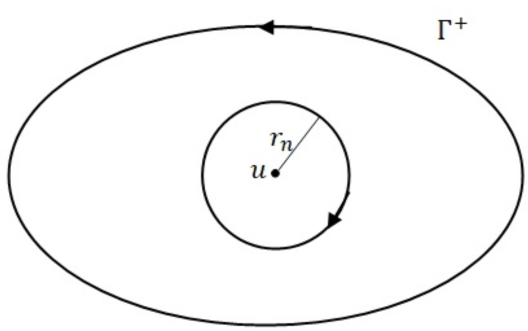
la formule est déjà établie si $f = 1$.

Preuve :

1) Si u est extérieur à D, donc $\dfrac{f(z)}{z-u}$ est continûment différentielle dans $\bar{D}$.

$= \displaystyle\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-u}\,dz = 0$ (théorème de Cauchy).

2) Si u est intérieur à D.



Soit $r_n > 0$ tel que $B(u, r_n) \subset D$

alors $\dfrac{f(z)}{z-u}$ est continûment différentielle dans $\Omega \setminus B(u, r_n)$.

Soit $C_n = \partial B(u, r_n)$, d'après le théorème de Cauchy :

$$\int_{\Gamma^+ \cup C_n^-}\frac{f(z)}{z-u}\,dz = 0$$

$= \displaystyle\int_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{z-u}\,dz = \int_{C_n^+}\frac{f(z)}{z-u}\,dz$, $\quad r_n > 0$ et on fait tendre $r_n \longrightarrow 0$ sur C_n, on pose : $z = u + r_n e^{it}$.

$$\begin{aligned}\int_{C_n^+}\frac{f(z)}{z-u}\,dz &= \int_0^{2\pi}\frac{f(u+r_ne^{it})}{r_ne^{it}}\,r_nie^{it}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} i\,f(u+r_ne^{it})\,dt\end{aligned}$$

on pose $g_n(t) = f(u - r_n e^{it})$, g_n est continue ...

Montrons que $g_n \xrightarrow{\text{c.u}} g$ sur $[0, 2\pi]$ où $g(t) = f(u)$. c.u : convergence uniforme

Continuité de f en u : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon : |u + r_n e^{it} - u| = r_n < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(u + r_n e^{it}) - f(u)| < \varepsilon$ vraie $\forall t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n > N_\varepsilon,\ r_n < \eta_\varepsilon \Longrightarrow \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(u + r_n e^{it}) - f(u)| < \varepsilon \\
&\Longrightarrow \quad f(u + r_n e^{it}) \xrightarrow{\text{c.u}} f(u) \text{ par rapport à } t \text{ dans } [0, 2\pi] \\
&\Longrightarrow \quad g_n \xrightarrow{\text{c.u}} g \text{ sur } [0, 2\pi] \\
&\Longrightarrow \quad \int_0^{2\pi} g_n(t)\, dt \longrightarrow \int_0^{2\pi} g(t)\, dt \\
&\Longrightarrow \quad \int_0^{2\pi} f(u + r_n e^{it})\, dt \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(u)\, dt = 2\pi f(u) \\
&\Longrightarrow \quad \int_{C_n^+} \frac{f(z)}{z-u}\, dz \longrightarrow i \int_0^{2\pi} f(u)\, dt = 2i\pi f(u) \text{ (en multipliant par } i.
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-u}\, dz = 2i\pi f(u)$.

D'où la formule.

7.2 Fonction analytique d'une variable complexe

Définition :

$f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ est **analytique** en z_0 si au voisinage de z_0 f est développable en série de $z - z_0$. c'est-à-dire s'il existe un disque $B(z_0, r)$ ouvert centré en z_0 et une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ convergente dans ce disque tels que :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

Conséquence :

1- D'après le principe des zéros isolés, si un tel dériveloppement de f au voisinage de z_0 existe, il est unique.

2- f analytique en $z_0 \Longrightarrow f$ holomorphe en z_0. car : $\forall z \in B(z_0, r) : f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$

$$\begin{aligned}
f^{(p)}(z) &= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n (z - z_0)^{n-p} \\
&= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n (z - z_0)^{n-p} \\
&= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} (z - z_0)^q
\end{aligned}$$

Définition :

A ouvert de $\mathbb{C}$; f est analytique en A, si elle est analytique en tout point de A.

7.3 Analyticité d'une série entière

Proposition :

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$ (R rayon de convergence), alors $S(z)$ est analytique dans la boule $B(0,R)$ et pour $z_0 \in B(0,R)$ on a : $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)$ pour $|z-z_0| < R - |z_0|$, et le rayon de convergence de $\sum_n \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}$ est $> R - |z_0|$.

7.4 Développements

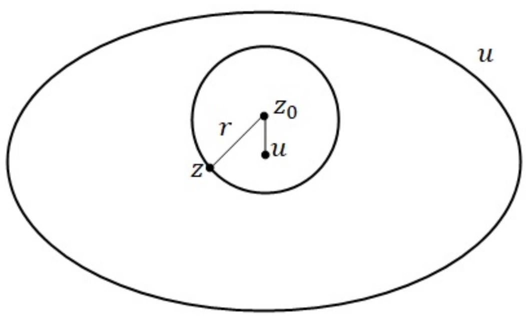
7.4.1 Développement de Taylor

Théorème :

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continûment dérivable (U ouvert de $\mathbb{C}$) alors f est analytique dans U.
(f de classe $C^1 \Rightarrow f$ de classe C^{∞})

Preuve :

$\gamma = C(z_0, r)$ (cercle de centre z_0 de rayon r) $\gamma \subset U$.



la formule intégrale de Cauchy donne

$$f(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-u}\,dz \ , \ z \in \gamma$$

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z-z_0+z_0-u} = \frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{u-z_0}{z-z_0}\right)}\right) = \frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{1-q}\right)_{|q|<1} = \frac{1}{z-z_0}.\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

$$\frac{1}{z-u} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \left(\text{car } z \in \gamma \Rightarrow \left|\frac{u-z_0}{z-z_0}\right| < 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{z-u} = \sum_{n=0}^{\infty} f(z)\frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

la série est normalement convergente par rapport à z sur γ (dans $C(0,r)$ boule fermée).

$$\left| f(z)\frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \right| \leq \sup_{z\in\gamma}|f(z)|\,\frac{|u-z_0|^n}{|z-z_0|^{n+1}} = \frac{M}{r}\left(\frac{|u-z_0|}{r}\right)^n$$

$|u - z_0| < r \Rightarrow \frac{|u-z_0|}{r} < 1$ donc $\sum \frac{|u-z_0|^n}{r^n}$ converge (série à termes positifs) donc on peut intégrer par rapport à z terme à terme et on a :

$$\begin{aligned} f(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-u}\,dz &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f(z)\frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma f(z)\frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(u-z_0)^n\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz. \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(u-z_0)^n}$ avec $\boxed{a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz}$

Ce dérivable s'appelle **développement de Taylor** de f (au voisinage de z_0).

Corollaire :

f continûment dérivable $\Longrightarrow$ f indéfiniment dérivable. (dans $\mathbb{C}$) (car : analytique $\Longrightarrow$ indéfiniment dérivable).

Remarque : Inégalité de Cauchy

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} M\,d\theta = \frac{M}{r^n} \text{ où } M = \sup_{z\in\gamma}|f(z)|.$$

Preuve :

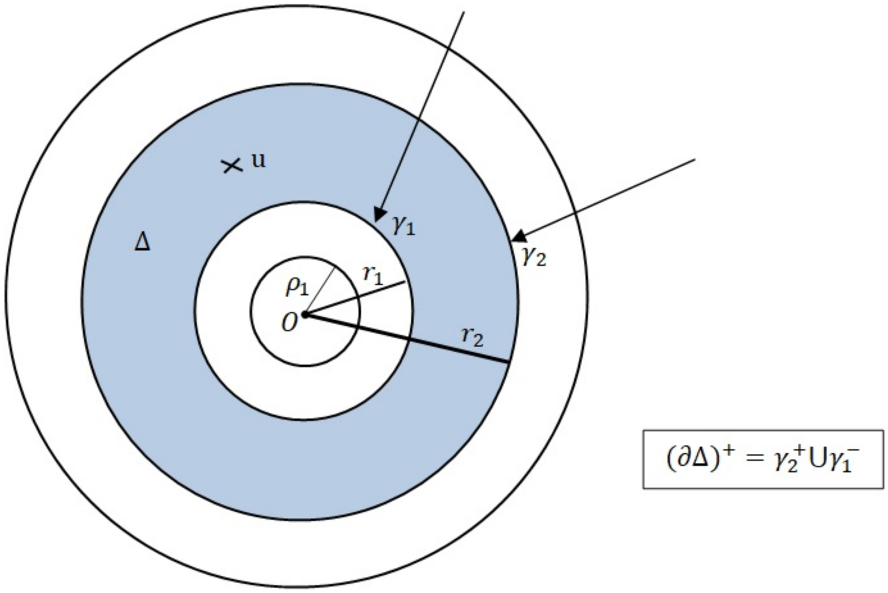
En posant le changement de variables : $z = z_0 + re^{i\theta} \Longrightarrow dz = rie^{i\theta}\,d\theta$

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}}\,rie^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{(e^{i\theta})^n}\right|\,d\theta \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\sup_{z\in\gamma}|f(z)|\int_0^{2\pi} d\theta. \quad |e^{i\theta}| = 1 \\ &\leqslant \frac{M}{r^n}. \end{aligned}$$

7.4.2 Développement en série de Laurent

Existence :

Soient $0 < \rho_1 < \rho_2$ et considérons la couronne $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$.
Soit f dérivable dans Ω.
On considère r_1 et r_2 tels que : $\rho_1 < r_1 < r_2 < \rho_2$.
$\gamma_1 = C(0, r_1)$, $\gamma_2 = C(0, r_2)$, Δ couronne $(0, r_1, r_2)$.



la formule intégrale de Cauchy appliquée à $(\partial\Delta)^+ = \gamma_2^+ \cup \gamma_1^-$ donne

$$f(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2^+} \frac{f(z)}{z-u}\,dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1^+} \frac{f(z)}{z-u}\,dz = I_2 - I_1$$

$z \in \gamma_2 \implies |z| > |u|$, alors sur γ_2 on a : $\frac{1}{z-u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{z^{n+1}}$ et $\sum_n f(z)\frac{u^n}{z^{n+1}}$ est normalement convergente sur γ_2

$z \in \gamma_1 \implies |z| < |u|$, alors de même sur γ_1 on a : $\frac{1}{z-u} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{u^{n+1}}$ et $\sum f(z)\frac{z^n}{u^{n+1}}$ est normalement convergente sur γ_1.

Posons $n+1 = -m$, alors sur γ_1 : $\frac{1}{z-u} = -\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{u^m}{z^{m+1}}$

donc $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2^+} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \sum_{n=-\infty}^{-1} u^n \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1^+} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$

$$f(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n u^n \text{ avec } \begin{cases} a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1^+} \frac{f(z)}{z^{n+1}} & \text{si } n < 0 \\ a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2^+} \frac{f(z)}{z^{n+1}} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Définition :

les séries de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ s'appellent **séries de Laurent**, dans notre exemple on a :

$$\forall u \in \Delta \quad f(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n u^n$$

C'est le dérivée de Laurent d'une fonction f continûment dérivable dans une couronne.

Unicité : $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n e^{in\theta}$.

Evaluons $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} f(re^{i\theta})\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-ip\theta}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n e^{in\theta}\right) d\theta = \int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n e^{i(n-p)\theta}\,d\theta$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a_n r^n e^{i(n-p)\theta}\,d\theta$$

et la seule intégrale qui n'est pas nulle est celle telle que $n = p$.

donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} f(re^{i\theta})\,d\theta = \int_0^{2\pi} a_p r^p\,d\theta = 2\pi a_p r^p$

$\Rightarrow\ a_p = \dfrac{1}{2\pi r^p}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} f(re^{i\theta})\,d\theta.$

$\Rightarrow\ a_p = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,r)} \dfrac{f(z)}{z^{p+1}}\,dz.$

Les coefficient a_p sont déterminés d'une façon unique d'où l'unicité du développement.

Corollaire :

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, D le plus grand disque ouvert de centre z_0 contenu dans U. Soit f continûment dérivable dans $U\backslash\{z_0\}$, alors il existe une série de Laurent unique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ qui converge vers $f(z)$ dans $D\backslash\{z_0\}$, (en réalité dans une couronne $(z_0,\ r_1,\ r_2)$ contenue dans D).

Définition

Définition 1 :

Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ le développement de Laurent d'une fonction continûment dérivable dans une couronne $(z_0,\ r_1,\ r_2)$; le coefficient a_{-1} de $\dfrac{1}{z-z_0}$ s'appelle résidu de f en z_0, et on le note $\underline{\mathrm{Res}(f,z_0)}$,

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_1)} f(z)\,dz$$

Remarque :

on peut prendre n'importe quel cercle (ou courbe fermée) contenu dans la couronne $(z_0,\ r_1,\ r_2)$ et entourant z_0. (Ceci découle du théorème de Cauchy)

Définition 2 :

Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ développement de Laurent de f dans une couronne .

deux cas se présentent :

<u>1</u>

$\underline{1^{er}\ \text{Cas}}$: si les coefficients a_n $(n<0)$ sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux :

$\exists\, q>0$, $a_{-q}\neq 0$ et $a_n = 0\ \ \forall n<-q$.

z_0 est alors pôle d'ordre q de f car :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-q}}{(z-z_0)^q} + \frac{a_{-q+1}}{(z-z_0)^{q-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0) + \ldots \\ f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^q}\left(a_{-q} + a_{-q+1}(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^{n+q} + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^q}\, g(z) \quad \text{où } g(z) \text{ est analytique en } z_0 \text{ et } g(z_0)\neq 0. \end{aligned}$$

Exemple :

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)^2} \qquad \begin{array}{lll} z = 0 & \text{pôle simple} & \text{(d'ordre 1)} \\ z = \pm i & \text{pôles doubles} & \text{(d'ordre 2)} \end{array}$$

$2^{éme}$ Cas : une infinité de coefficient a_n ($n < 0$) sont différents de 0.
z_0 est alors dit point singulier essentiel isolé de f.
Exemple :

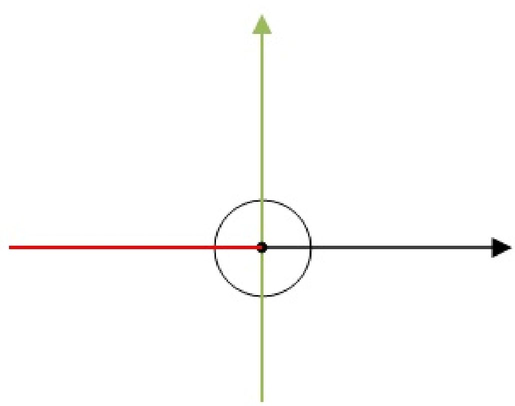
$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n<0} \frac{z^n}{(-n)!}, \quad z_0 \text{ point singulier essentiel isolé de } e^{\frac{1}{z}}.$$
(les coefficients à indice > 0 sont nuls).

Définition d'un point singulier isolé de f :

On dit que z_0 est un point singulier isolé de f, s'il existe un disque Δ centré en z_0 tel que f soit analytique dans $\Delta \setminus \{z_0\}$.

Exemple :

0 est un point singulier de $Log\ z$ qui n'est pas isolé.



CHAPITRE 8

THÉORÈME DES RÉSIDUS ET APPLICATION AU CALCUL INTÉGRAL

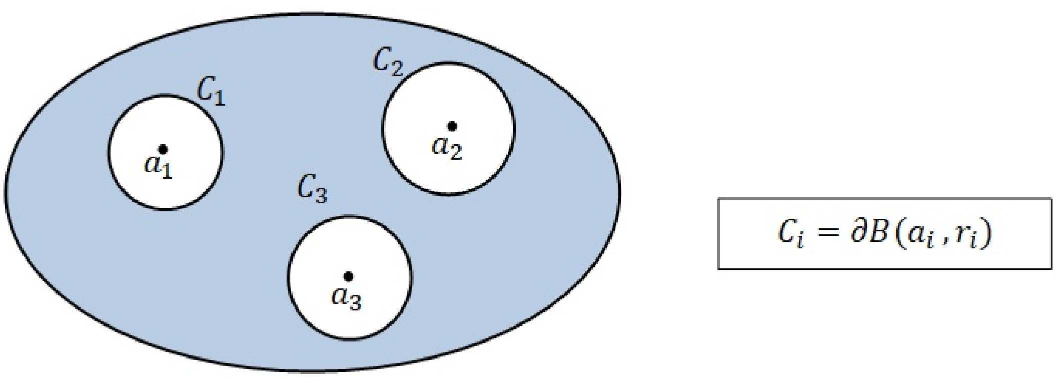
8.1 Théorème des résidus

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $D \subset \Omega$, D un omaine borné dont la frontière Γ est continûment différentiable par morceaux.

Soit f continûment dérivable dans Ω sauf aux points $a_1, \dots, a_n \in D$. Alors $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k)$

Preuve :

Entourons les a_k par des cercles disjoints 2 à 2.



f est continûment dérivable dans $D - \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Théorème de Cauchy $\Longrightarrow \displaystyle\int_{\partial(D - \bigcup_{i=1}^{n} B_i)} f(z)\,dz = 0.$

Or $\partial(D - \bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \Gamma^+ \cup C_1^- \cup C_2^- \cup \dots \cup C_n^-$, alors $\displaystyle\int_{\Gamma^+} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k^+} f(z)\,dz.$

Or par définition du résidu on a :

$$\mathrm{Res}(f, a_k) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k^+} f(z)\,dz.$$

D'où le résultat.

8.2 Calcul pratique des résidus

a- Cas d'un pôle simple

$f(z) = \frac{1}{z - z_0} g(z)$ où g est analytique même en z_0 et $g(z_0) = 0$.

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots$

donc $f(z) = \frac{b_0}{z - z_0} + b_1 + b_2(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^{n-1} + \ldots$

$= \quad \mathrm{Res}(f, z_0) = b_0 = g(z_0)$ ou bien $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

Si f est de la forme $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ $(g(z_0) = 0$ et $h(z_0) = 0)$, alors

$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}}$.

Donc

$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Exemple :

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ $\quad z = \pm i$ sont deux pôles simples.

$$\mathrm{Res}(f, i) = \left(\frac{e^{-iz}}{2z}\right)_i = \frac{e}{2i}; \qquad \mathrm{Res}(f, -i) = \left(\frac{e^{-iz}}{2z}\right)_{-i} = \frac{-e^{-1}}{2i}$$

. b- Cas d'un pôle multiple

z_0 pôle d'ordre p.

$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}$ où g est analytique au voisinage de z_0 et $g(z_0) = 0$.

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$

$= \quad f(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^p} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{b_{p-1}}{z - z_0} + b_p + b_{p+1}(z - z_0) + \ldots$

$= \quad \mathrm{Res}(f, z_0) = b_{p-1} = \frac{g^{(p-1)}(z_0)}{(p-1)!}$.

Exemple :

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2}$

0 est un pôle simple $-i$ et $+i$ pôles doubles.

$\mathrm{Res}(f, 0) = \left(\frac{e^{iz}}{(z(z^2 + 1)^2)}\right)_0 = \left(\frac{e^{iz}}{5z^4 + 6z^2 + 1}\right)_0 = 1.$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z - i)^2(z + i)^2} = \frac{g(z)}{(z - i)^2}, \quad g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z + i)^2}$

$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{g^{(2-1)}(i)}{(2-1)!} = g'(i) = \frac{3}{4e}$.

8.3 Calcul d'intégrales réelles par la méthode des résidus

$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta\,,\ \sin\theta)\, d\theta$ où $R(x,y)$ est une fraction rationnelle sans pôle sur $\gamma = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2=1\}$.

$$\left.\begin{array}{lllll} z & = & e^{i\theta} & = & \cos\theta + i\sin\theta \\ \dfrac{1}{z} & = & e^{-i\theta} & = & \cos\theta - i\sin\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),$$

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \Longrightarrow \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

l'intégrale devient

$$I = \int_\gamma \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) dz.$$

Soit $G(z)$ la fonction complexe à intégrer :

$$I = \int_\gamma G(z)\,dz = 2i\pi \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}(G, z_k), \qquad z_k \text{ points singuliers isolés intérieurs à } \gamma.$$

Exemples :

a/ $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}\, d\theta \qquad a \in \mathbb{R}^+\,, \quad a>1.$

On pose $z = e^{i\theta} \Longrightarrow \quad I = \displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{-2i}{z^2+2az+1}\, dz.$

$z^2+2az+1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = -a+\sqrt{a^2-1} \\ z_2 = -a-\sqrt{a^2-1} \end{cases} \qquad z_1.z_2 = 1$

z_1 et z_2 pôles simples, z_1 intérieur à γ, z_2 extérieur à γ, donc :

$$I = 2i\pi \mathrm{Res}(f, z_1) \qquad \text{où} \quad f(z) = \frac{-2i}{z^2+2az+1}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{-2i}{2z_1+2a} = \frac{-2i}{2\sqrt{a^2-1}}, \qquad \text{donc} \quad I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

b/ $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^6\theta\, d\theta$

$G(z) = \dfrac{1}{iz}\left(\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right)^6 = \dfrac{1}{iz}\dfrac{1}{2^6}\left(\dfrac{z^2+1}{z}\right)^6 = \dfrac{1}{i2^6}\dfrac{(z^2+1)^6}{z^7}$

0 est un pôle d'ordre 7 de G.

$R(G,0) = \dfrac{1}{6!}\left(\dfrac{1}{i2^6}(z^2+1)^6\right)^{(6)}_{\text{au point } 0} = \cdots\cdots\cdots$

Autre méthode :

$$(z^2+1)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k\, z^{2k} \Longrightarrow \quad G(z) = \frac{1}{i2^6}\sum_{k=0}^{6} C_6^k\, z^{2k-7}$$

d'après l'unicité, c'est le développement de Laurent de G en 0.

et par définition $R(G,0) = \text{coef de} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{i2^6}C_6^3 \qquad (2k-7=-1)$

donc $I = 2i\pi R(G,0) = 2i\pi\, \dfrac{1}{i2^6}C_6^3 = \dfrac{5\pi}{8}.$