Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ANALYSE COMPLEXE

Arij Bouzelmate

Licence d'Education: Spécialité Enseignement Secondaire- Mathématiques

Plan du Cours

Définition 1.1

Une fonction complexe de variable complexe est une application de $\mathbb{C}$ ou d'une partie de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On note

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & f(z) \end{array}$$

$z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ *avec* x *et* $y \in \mathbb{R}$.

$f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ *avec* P *et* $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 1.1

1/ $f(z) = 1 + z.$ $\quad P(x, y) = 1 + x \quad , \quad Q(x, y) = y.$

2/ $f(z) = \bar{z} = x - iy.$ $\quad P(x, y) = x \quad , \quad Q(x, y) = -y.$

3/ $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}.$ $\quad P(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad Q(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}.$

4/ $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$ $\quad P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad Q(x, y) = 0.$

5/ $f(z) = iz.$ $\quad P(x, y) = -y \quad , \quad Q(x, y) = x.$

Rappels

Limite et continuité

Définition 1.2

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, *si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\,;\ |z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$
- f *est continue en* z_0 *si* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$

Proposition 1.1

Soit $l = A + iB, (A \text{ et } B \in \mathbb{R}), \quad (z = x + iy\ ,\ z_0 = x_0 + iy_0).$

$$\begin{array}{rcl} f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) & \longrightarrow & l = A + iB \\ z & \longrightarrow & z_0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} P(x,y) & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longrightarrow & (x_0, y_0) \end{array} \right. \ et\ \begin{array}{rcl} Q(x,y) & \longrightarrow & B \\ (x,y) & \longrightarrow & (x_0, y_0). \end{array}$$

Rappels

Démonstration.

$$|f(z) - l| = \sqrt{(P(x,y) - A)^2 + (Q/x,y) - B)^2} \longrightarrow 0 \quad (z \longrightarrow z_0)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{lcl} P(x,y) - A \longrightarrow 0 & \text{et} & Q(x,y) - B \longrightarrow 0 \\ (x,y) \longrightarrow (x_0,y_0) & & (x,y) \longrightarrow (x_0,y_0). \end{array}$$

□

Remarque 1.1

Les opérations classiques sur les limites (somme, produit, quotient) et la notion de continuité connues dans $\mathbb{R}$ restent valables dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.3

Soit A un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in A$.

f est holomorphe en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et appartient à $\mathbb{C}$.
On la note $f'(z_0)$ ou $\dfrac{df}{dz}(z_0)$.
On dit aussi que f admet une dérivée en z_0 par rapport à la variable complexe ou f est dérivable en z_0.

Proposition 1.2

f est dérivable ou différentiable en $z_0 \Longleftrightarrow$
$\exists l \in \mathbb{C} : f(z) - f(z_0) = (z - z_0)(l + \varepsilon(z))$
avec

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon(z) & \longrightarrow & 0 \\ z & \longrightarrow & z_0 \end{array}$$

Définition 1.4

f est holomorphe dans A, si f est holomorphe en tout point de A.
Si $z \longrightarrow f'(z)$ est continue, $(\forall z \in A)$ on dit que f est continûment différentiable ou de classe $\mathcal{C}^1$ (sur A).

Théorème 1.1

$f : A \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z_0 = x_0 + iy_0 \in A, \qquad \big((x_0, y_0) \in \mathbb{R}\big)$
f est holomorphe en z_0 (respectivement continûment différentiable)$\Longleftrightarrow$ P et Q sont différentiables (respectivement continûement différentiables) en (x_0, y_0) et vérifient les conditions de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array} \right.$$

Démonstration

$\Rightarrow$ /

$$f \text{ holomorphe en } z_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(z_0+u)-f(z_0)}{u} = f'(z_0) + \varepsilon(u) \quad \varepsilon(u) \longrightarrow 0 \quad (u \longrightarrow 0)$$

$$\Rightarrow \quad f(z_0+u)-f(z_0) = u\big(f'(z_0)+\varepsilon(u)\big).$$

Posons $u = h + ik$; $f'(z_0) = A + iB$; $\varepsilon(u) = \varepsilon_1(h,k) - i\varepsilon_2(h,k)$ $(h,\ k,\ A,\ B,\ \varepsilon_1(h,k)$ et $\varepsilon_2(h,k) \in \mathbb{R})$

alors $P(x_0+h, y_0+k) + iQ(x_0+h, y_0+k) - P(x_0,y_0) - iQ(x_0,y_0) = (h+ik)\big(A+iB+\varepsilon_1(h,k)+i\varepsilon_2(h,k)\big)$

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on a

Démonstration (suite)

$$\begin{cases} P(x_0+h,y_0+k)-P(x_0,y_0) = \underbrace{hA-kB}_{(Adx-Bdy)(h,k)} + h\varepsilon_1(h,k) - k\varepsilon_2(h,k). \\ \\ Q(x_0+h,y_0+k)-Q(x_0,y_0) = hB-kA + h\varepsilon_2(h,k) + k\varepsilon_1(h,k). \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad P \text{ et } Q \text{ différentiables et } \quad \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = A,\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -B$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = B \quad , \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = A$$

d'où les conditions de **Cauchy**.

Fonctions holomorphes

Démonstration (suite)

$$
\begin{aligned}
f^{'}(z_0) = A + iB &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \\
&= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\
&= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

Démonstration (suite)

donc si f est cont.diff $\Longrightarrow f$ holomorphe et $f^{'}(z)$ est continue.

$\Longrightarrow$ f holomorphe et $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ sont continues.

$\Longrightarrow$ P et Q continûment différentiables.

Démonstration (suite)

$\Leftarrow$ /

$$P(x_0+h, y_0+k) - P(x_0, y_0) = h\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) +$$

$$||(h,k)||\ \varepsilon_1(h,k), \quad \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \longrightarrow & 0 \\ (h,k) & \longrightarrow & (0,0) \end{array}$$

$$Q(x_0+h, y_0+k) - Q(x_0, y_0) = h\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) +$$

$$+\ ||(h,k)||\ \varepsilon_2(h,k), \quad \begin{array}{ccc} \varepsilon_2 & \longrightarrow & 0 \\ (h,k) & \longrightarrow & (0,0) \end{array}$$

$$= -h\frac{\partial P}{\partial y}(\ ,\ ) + k\frac{\partial P}{\partial x}(\ ,\ ) + ||(h,k)||\ \varepsilon_2(h,k)$$

Démonstration (suite)

alors

$$f(z_0+u)-f(z_0)=h\frac{\partial P}{\partial x}(\ ,\ )+k\frac{\partial P}{\partial y}(\ ,\ )-ih\frac{\partial P}{\partial y}(\ ,\ )+ik\frac{\partial P}{\partial x}(\ ,\ )+$$

$$||(h,k)||\,[\varepsilon_1(h,k)+i\varepsilon_2(h,k)]$$

$$=(h+ik)\left[\frac{\partial P}{\partial x}(\ ,\ )-i\frac{\partial P}{\partial y}(\ ,\ )\right]+$$

$$(h+ik)\left[\frac{||(h,k)||}{(h+ik)}.\,(\varepsilon_1+i\varepsilon_2)\right],$$

avec $\dfrac{||(h,k)||}{(h+ik)}$ est de norme 1 et $\varepsilon_1+i\varepsilon_2\to 0$ quand $(h,k)\to 0$.

Donc $f^{'}(z_0)$ existe et vaut $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$ et le résultat en découle. □

Exemple 1.2

$*$ *Soit* $I : z \longrightarrow z.$

I est holomorphe dans $\mathbb{C}$ *et* $\forall z \in \mathbb{C},\ I^{'}(z) = 1$

$*\ z \longrightarrow \bar{z}$ *n'est holomorphe en aucun point, car les conditions de Cauchy ne sont pas vérifiées.*

$$\bar{z} = x - iy\ ; \quad P(x,y) = x\ ; \quad Q(x,y) = -y\ ; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial y} = -1$$

Fonctions holomorphes

En revenant à la définition de la dérivée, on a des des propriétés analogues des applications de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Propriété

Si f et g sont holomorphes en $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f + \lambda g$ et $f.g$ sont holomorphes en z_0 et on a

$$\begin{aligned}(f + \lambda g)'(z_0) &= f'(z_0) + \lambda g'(z_0) \\ (f.g)'(z_0) &= f'(z_0).g(z_0) + f(z_0).g'(z_0)\end{aligned}$$

Conséquence

$z \longmapsto z^2$, $z \longmapsto z^n$ et plus généralement $z \longmapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$.

Propriété

f et g holomorphes en z_0, $g(z_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe en z_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(z_0) = \frac{f^{'}(z_0)g(z_0) - f(z_0)g^{'}(z_0)}{\big(g(z_0)\big)^2}.$$

Théorème 1.2

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ (Ω ouvert connexe). Si $f^{'}(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$, alors f est constante sur Ω.

Démonstration.

$$f(z) = P + iQ \implies f^{'}(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0$$

$$\implies \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{ccc} dP = 0 \text{ (dans } \Omega \text{ connexe)} & \implies & P = \text{ constante} \\ & & \\ dQ = 0 \text{ (dans } \Omega \text{ connexe)} & \implies & Q = \text{ constante} \end{array} \right\}$$

$\implies f =$ constante. □

Corollaire 1.1

Si f admet une primitive F dans un domaine de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire : $F^{'}(z) = f(z)$), alors les autres primitives sont de la forme $F + \lambda$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$.

Fonctions harmoniques conjuguées

Soit $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ **holomorphe** dans D (domaine) $\Rightarrow P(x,y)$ et $Q(x,y)$ satisfont aux conditions de Cauchy $\forall (x,y) \in D$.
On verra plus tard que :
f est holomorphe dans $D \Rightarrow f$ est indéfiniment dérivable dans D.
On suppose ici que P et Q admettent des dérivées partielles secondes continues dans D.
En dérivant les conditions de Cauchy, on obtient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \,;\, \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \,;\, \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

Fonctions harmoniques conjuguées

Définition 1.5

Dans $\mathbb{R}^2$, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *s'appelle équation de* ***laplace****, et une solution de cette équation s'appelle fonction harmonique.*
Donc ici, P et Q sont deux fonctions harmoniques dans D.

Remarque 1.2

P et Q harmoniques $\nRightarrow P + iQ$ *holomorphe.*
Contre exemple *:*

$$P(x,y) = x \quad ; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$
$$Q(x,y) = -y \quad ; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$$

P et Q sont harmoniques, mais $P(x,y) + iQ(x,y) = x - iy = \bar{z}$ *n'est jamais holomorphe.*

Fonctions harmoniques conjuguées

Définition 1.6

On dit que deux fonctions harmoniques dans D, P et Q forment un couple de fonctions harmoniques conjuguées si elles constituent la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe $f(z)$.

Problème

Étant donné $P(x, y)$ harmonique dans D "un **ouvert convexe ou étoilé**", trouver une fonction holomorphe f qui admette P pour partie réelle (c'est-à-dire chercher Q : $f(z) = P + iQ$ soit holomorphe).

Fonctions harmoniques conjuguées

On suppose P de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{aligned} P \text{ harmonique} \quad &\Longrightarrow \quad \omega = -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy \text{ (de classe } \mathcal{C}^1\text{)} \\ &\Longrightarrow \quad \exists Q \text{ tel que : } \omega = dQ. \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \end{aligned}$$

Conclusion

P et Q sont différentiables et on a les conditions de Cauchy, d'où $f(z) = P + iQ$ est holomorphe.
Pour obtenir Q ; on intègre les conditions de Cauchy.

Exemple 1.3

Soit $P(x,y) = x^2 - y^2$.
Chercher f *holomorphe dans* $\mathbb{C}$ *tel que* P *soit sa partie réelle.*

$\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, *donc* P *est harmonique.*

$\exists ? Q$ *tel que :* $P + iQ$ *soit holomorphe.*

$\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ *(1).*

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *(2).*

Exemple 1.3 (suite)

$$(1) \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\partial Q}{\partial y} dy = \int \frac{\partial P}{\partial x} dy + C(x) \Longrightarrow Q(x,y) = \int 2x dy + C(x).$$

$$\Longrightarrow \quad Q(x,y) = 2xy + C(x). \left(\Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2y + C^{'}(x). \right)$$

$$(2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \text{ d'où } C^{'}(x) = 0 \Longrightarrow C(x) = K \in \mathbb{R}.$$

$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + k) \cdots$ (exprimer $f(z)$ en fonction de z).

Différentielle d'une fonction complexe

Soit f holomorphe dans D ; $z = x + iy$. Posons (par définition) $dz = dx + idy$.

Définition 1.7

On appelle différentielle de f au point z, l'application : $df = f^{'}(z)\,dz$.

Proposition 1.3

Si $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ *alors* $df = dP + idQ$.

Différentielle d'une fonction complexe

Démonstration.

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\
df &= f'(z)\,dz = \left[\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right]\left[dx + idy\right] \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}dx - \frac{\partial Q}{\partial x}dy + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy\right) \\
&\quad \downarrow \text{ (conditions de Cauchy)} \\
&= \left[\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right] + i\left[\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right] \\
&= dP + idQ.
\end{aligned}$$

□

Fonction exponentielle complexe

Définition 1.8

La fonction exponentielle complexe est définie sur $\mathbb{C}$ *par :*

$$e^z = e^x(\cos\ y + i\ \sin\ y) \text{ où } z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

e^z *a pour partie réelle* $P(x, y) = e^x\ \cos\ y$ *et pour partie imaginaire* $Q(x, y) = e^x\ \sin\ y$.

Proposition 1.4

La fonction e^z *est holomorphe* $\mathbb{C}$ *et* $(e^z)' = e^z$.

Démonstration

$P(x,y) = e^x\ \cos y$ et $Q(x,y) = e^x\ \sin y$ vérifient les conditions de Cauchy :

$$\left.\begin{array}{rcccl} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\partial(e^x\ \cos y)}{\partial x} & = & e^x\ \cos y \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{\partial(e^x\ \sin y)}{\partial y} & = & e^x\ \cos y \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$

Démonstration (suite)

$$\left.\begin{array}{rcccl} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{\partial(e^x \ \cos y)}{\partial y} & = & -e^x \ \sin y \\[2em] \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\partial(e^x \ \sin y)}{\partial x} & = & e^x \ \sin y \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Démonstration (suite)

P et Q sont différentiables, comme produit de fonctions différentiables (sur $\mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned}
\left(e^z\right)' &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\
&= \frac{\partial(e^x\ \cos y)}{\partial x} + i\frac{\partial(e^x\ \sin y)}{\partial x} \\
&= e^x\ \cos y + i\, e^x\ \sin y \\
&= e^z.
\end{aligned}$$

$\square$

Fonction logarithme complexe

Résolution de l'équation en Z

$e^Z = z$ où $z \neq 0$, donné
$Z = X + iY$ (inconnue) et $z = r(\cos\theta + i\, sin\theta)\,;\, |z| = r$.
On cherche Z en fonction de z , $Z = f(z)$.

$$\begin{aligned} e^Z = z \quad &\Longleftrightarrow \quad e^X\,(\cos Y + i\ \sin Y) = r\,(\cos\ \theta + i\ \sin\theta) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} e^X & = & r \\ Y & = & \theta + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} X & = & Logr \\ Y & = & \theta + 2k\pi \end{array} \right. \end{aligned}$$

Il existe donc une infinité de solutions, qui sont :

$$Z = X + iY = Logr + i\,(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\left(\text{on peut dire que } e^Z \text{ n'est pas bijective de } \mathbb{C} \underset{z \longrightarrow e^Z}{\longrightarrow} \mathbb{C}^*\right)$

Fonction logarithme complexe *Logz*

Définition 1.9

Si $z \in \mathbb{C}^*$, on dit qu'un nombre complexe w est un logarithme de z si $e^w = z$, et qu'un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z si on a $z = |z|e^{i\theta}$.

Définition 1.10 (Détermination principale)

La fonction Logz pour $z \neq 0$ est définie par :

$$Logz = Logr + i\theta \,;\, -\pi < \theta \leqslant \pi, r > 0$$

où $r = |z|$ et $\theta = Arg(z)$.
Cette fonction est bien définie, car $\forall z \neq 0$, $\exists \theta$ unique argument de z dans $]-\pi, \pi]$; donc pour $z \neq 0$, $Logr + i\theta$ est unique.
Si $z = r\,e^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, on a donc
$Logz = Log(r\,e^{i\theta}) = Logr + i\theta$.

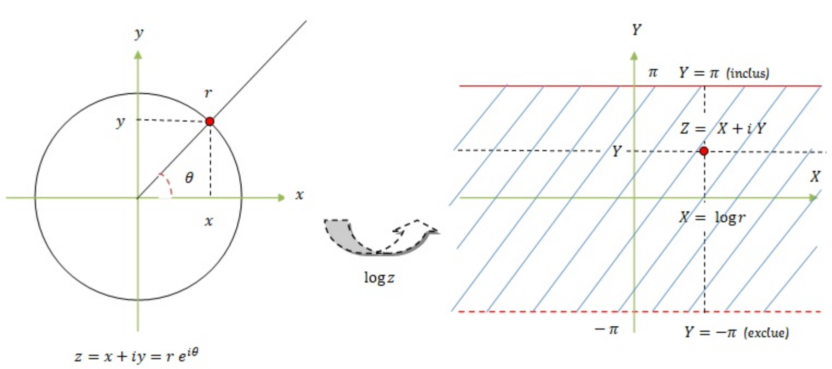
Remarque 1.3

On ne peut pas définir Logz si $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. *Sinon, en prenant* $z_0 = r\, e^{-i\pi}$ *et* $z_1 = r\, e^{i\pi}$
On a : $z_0 = z_1$ *et* $Logz_0 \neq Logz_1$.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & Logz_0 = r - i\pi \\
 & \nearrow & \\
z_0 = z_1 & & \neq \\
 & \searrow & \\
 & & Logz_1 = r + i\pi
\end{array}
$$

Conclusion

$$
\begin{array}{rcl}
Log : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
z & \longrightarrow & Log r + i\theta \quad , \quad -\pi < \theta \leqslant \pi \\
 & & (X + iY)
\end{array}
$$



1.jpg

Continuité de la fonction *Logz*

$$\begin{array}{rcl} Log : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & Log r + i\theta \quad ; \quad -\pi < \theta \leqslant \pi. \end{array}$$

Problème

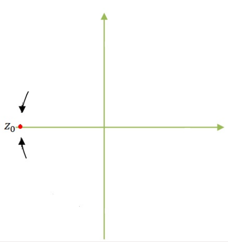
$$z \longrightarrow z_0 \overset{?}{\Longrightarrow} Log z \longrightarrow Log z_0$$

En coordonnées polaires : $z_0 = (r_0,\ \theta_0)$, $z = (r, \theta) \quad \theta_0 \in]-\pi, \pi]$

1er **Cas :** $\theta_0 \in]-\pi, \pi[$.

$$\begin{array}{rcl} z \longrightarrow z_0 & \Longrightarrow & (r,\theta) \longrightarrow (r_0,\theta_0) \Longrightarrow r \longrightarrow r_0 \text{ et } \theta \longrightarrow \theta_0 \text{ dans }]-\pi,\pi[\\ & \Longrightarrow & Log r \longrightarrow Log r_0 \text{ et } \theta \longrightarrow \theta_0 \text{ dans }]-\pi,\pi[\\ & \Longrightarrow & Log r + i\,\theta \longrightarrow Log r_0 + i\,\theta_0 \\ & \Longrightarrow & Log z \longrightarrow Log z_0 \end{array}$$

$\underline{2^{me}\ \textbf{Cas}}$ **:** $\theta_0 = \pi$
quand $z \longrightarrow z_0$, alors $\mathfrak{Im}\, z \geqslant 0$ ou $\mathfrak{Im}\, z \leqslant 0$ (dans un voisinage de z_0).
Si $\mathfrak{Im}\, z \geqslant 0$ alors $\theta \longrightarrow \pi$.
Si $\mathfrak{Im}\, z \leqslant 0$ alors $\theta \longrightarrow -\pi$.
Alors $Log\, r + i\,\theta \longrightarrow \ Logr + i\pi$ ou $Log\, r - i\pi$. $Log\, z \not\longrightarrow \ Logz_0$, donc pas de continuité au point z_0 tel que $\theta_0 = \pi$.

2.jpg 

Proposition 1.5

Soit Δ *le demi-axe des* $x \leqslant 0 \quad (\theta = \pi)$ *alors Log* z *est continue sur* $\mathbb{C} \backslash \Delta$

Dérivabilité : *Log* z *est holomorphe dans* $\mathbb{C} \backslash \Delta$ *et* $(Log\ z)' = \dfrac{1}{z}$

Démonstration.

On pose : $Log\ z = Z \qquad z \longrightarrow z_0 \Longrightarrow Z \longrightarrow Z_0.$

$$\frac{Log\ z - Log\ z_0}{z - z_0} = \frac{Z - Z_0}{e^Z - e^{Z_0}} = \frac{1}{\frac{e^Z - e^{Z_0}}{Z - Z_0}} \underset{Z \to Z_0}{\longrightarrow} \frac{1}{(e^Z)'_{Z_0}} = \frac{1}{e^{Z_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

$$\frac{Log\ z - Log\ z_0}{z - z_0} \longrightarrow \frac{1}{z_0}.$$

□

Remarque 1.4

On n'a pas toujours $Log\, z\, z^{'} = Log\, z + Log\, z^{'}$*, sauf si* $\arg\ z + \arg\ z^{'} = \theta + \theta^{'} \in]-\pi, \pi]$.
Si par exemple, $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$, $\frac{\pi}{2} < \theta^{'} \leqslant \pi$*, alors* $\pi < \theta + \theta^{'} \leqslant 2\pi$*, alors l'argument de* $z\, z^{'}$ *qui appartient à* $]-\pi, \pi]$ *est* $\theta+\theta^{'}-2\pi$ $(-\pi < \theta+\theta^{'}-2\pi \leqslant 0)$*, donc :*

$$\begin{aligned} Log\, z\, z^{'} &= Log(r\, r^{'}) + i\,(\theta + \theta^{'} - 2\pi) \\ &= Log\, r + Log\, r^{'} + i\,\theta + i\,\theta^{'} - i\,2\pi \\ &= Log\, z + Log\, z^{'} - i\,2\pi \end{aligned}$$

Fonction logarithme complexe

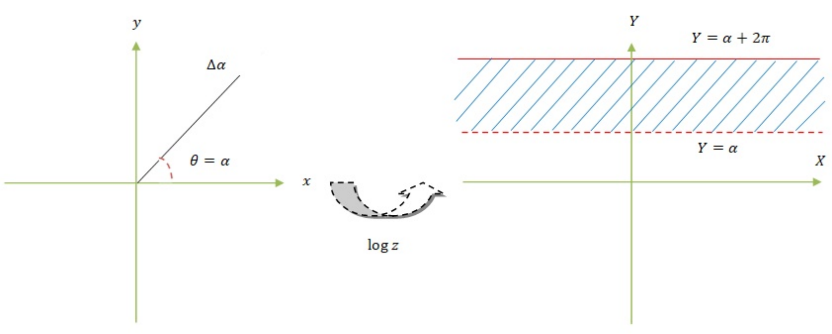
Définition 1.11

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ *et considérons* $]\alpha,\ \alpha+2\pi]$.
On appelle détermination du logarithme complexe définie dans $]\alpha,\ \alpha+2\pi]$, *la fonction* $\log\ z = Log\, r + i\,\theta$ *où* $\alpha < \theta \leqslant \alpha + 2\pi$.
si $\alpha = -\pi$, *on a la fonction Log z qu 'on appelle détermination principale du logarithme complexe.*
$\log\ z$ *a des propriétés analogues à celle de Log z :*
$*$ *Ce sont toutes des fonctions inverses de la fonction exponentielle complexe.*

$$e^{\log\ z} = z$$

$*$ $\log\ z$ *est holomorphe dans* $\mathbb{C}\backslash\Delta_\alpha$ *et sa dérivée est* $\dfrac{1}{z}$, *où* Δ_α *: demi-axe correspondant à* $\theta = \alpha$.

3.jpg



Exemple 1.4

la fonction $\log\ z$ *relative à l'intervalle* $]0, 2\pi]$ *est définie par :*

$$\log\ z = Log\, r + i\,\theta \quad , \quad 0 < \theta \leqslant 2\pi.$$

Définition 1.12

Soit $m \in \mathbb{C}$, *On appelle détermination principale de la fonction puissance, la fonction* $z^m = e^{m\,Log\,z}$, $z \in \mathbb{C}^*$.
(Log z = détermination principale du logarithme complexe)

Exemple 1.5

Calcul de i^i.
$i = 1.(\cos\ \frac{\pi}{2} + i\ \sin\ \frac{\pi}{2}) = e^{i\,\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow\ Log\ i = i\ \frac{\pi}{2} \Longrightarrow i^i = e^{i\ Log\ i} = e^{i(i\ \frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Fonction puissance

Proposition 1.6

$a)\ \forall m, m' \in \mathbb{C}\,;\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ on\ a : z^m.z^{m'} = z^{m+m'}.$

$b)\ z^{-m} = \dfrac{1}{z^m}.$

$c)\ (z^m)' = m\, z^{m-1}.$

Démonstration.

Rappelons d'abord que $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad e^z.\, e^{z'} = e^{z+z'}$ (à voir en T.D).

$a)\ \ z^m.\, z^{m'} = e^{m \log\, z}.\, e^{m' \ \log\, z} = e^{(m+m')\log\, z} = z^{m+m'}.$

$b)$ faire $m' = -m$ dans a/.

$b)\ (z^m)' = (e^{mLog\, z})' = (mLog\, z)' e^{mLog\, z} = \dfrac{m}{z}\, z^m = m\, z^{m-1}.$ $\square$

Exemple 1.6

$z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}Logz} = e^{\frac{1}{2}(Logr+i\theta)} = e^{\frac{1}{2}\,Logr}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \Longrightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\,(\cos\frac{\theta}{2} + i\ \sin\frac{\theta}{2})$.

$z^{\frac{1}{2}}$ *coïncide avec une racine de* $X^2 = z$, *celle qui a pour argument* $\dfrac{\theta}{2}$, *avec* $\theta \in]-\pi, \pi]$.

On note $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$ *(notation valable dans ce cas avec* $-\pi < \theta \leqslant \pi$ *et Log).*

Définition 1.13

On appelle détermination de la fonction puissance définie dans $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ *pour l'exposant* m *quelconque dans* $\mathbb{C}$ *la fonction :* $z^m = e^{m\log\, z}$ *où* $\log\, z$ *détermination définie dans* $]\alpha, \alpha + 2\pi]$.

Exemple 1.7

Détermination de $z^{\frac{1}{2}}$ *définie dans* $]\pi, 3\pi]$, *c'est-à-dire :* $\theta = \arg\ z \in]\pi, 3\pi]$ *:*
$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\,(\cos\frac{\theta}{2} + i\ \sin\frac{\theta}{2})$ *avec* $\pi < \theta \leqslant 3\pi \Longrightarrow \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2} \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.
Soit α *l'argument de* z *compris entre* $-\pi$ *et* π, *alors* $\theta = \alpha + 2\pi$ *et donc* $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + \pi$.

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{r}\Big(\cos(\tfrac{\alpha}{2} + \pi) + i\ \sin(\tfrac{\alpha}{2} + \pi)\Big) \\ &= -\sqrt{r}(\cos\tfrac{\alpha}{2} + i\ \sin\tfrac{\alpha}{2}) \\ &= -\sqrt{z} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :
$z^{\frac{1}{2}}$ *(détermination dans* $]\pi, 3\pi]$*)* $= -z^{\frac{1}{2}}$ *(détermination dans* $]-\pi, \pi]$*).*

Fonctions circulaires et hyperboliques d'une variable complexe

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

On peut prolonger cette écriture au cas complexe et poser par définition :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

d'où $e^{iz} = \cos z + i \ \sin z$.

Fonctions circulaires et hyperboliques d'une variable complexe

On vérifie immédiatement que les formules classiques (dans $\mathbb{R}$) restent valables (dans $\mathbb{C}$) ; $\forall z, z^{'} \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= 1 \\ \cos(z + z^{'}) &= \cos z \ \cos z^{'} - \sin z \ \sin z^{'} \\ \sin(z + z^{'}) &= \sin z \ \cos z^{'} + \cos z \ \sin z^{'} \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on peut définir les fonctions hyperboliques d'une variables complexe en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \ ; \ \text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

On a les relations suivantes :

$$\cos z = \text{ch } iz \quad \text{et} \quad i \ \sin z = \text{sh } iz$$

Fonctions circulaires et hyperboliques d'une variable complexe

Proposition 1.7

Les fonctions $\cos z$, $\sin z$, *chz et shz sont toutes holomorphes dans* $\mathbb{C}$ *et on a :*

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= -\sin z \\ (\sin z)' &= \cos z \\ (chz)' &= shz \\ (shz)' &= chz \end{aligned}$$

Démonstration.

Il suffit d'utiliser la définition de ces fonctions. □