Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ANALYSE COMPLEXE

Arij Bouzelmate

Licence d'Education: Spécialité Enseignement Secondaire- Mathématiques

Plan du Cours

Fonction complexe d'une variable réelle

Définition

On appelle fonction complexe d'une variable réelle une application de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$.
On note :

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longrightarrow & F(x) \end{array}$$

$F(x) \in \mathbb{C}$, donc $F(x) = f(x) + i\,g(x)$ avec $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
<u>limite</u> : $F(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} L = A + iB \Longleftrightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} B$.
<u>continuité</u> : F est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$.
C'est-à-dire : F est continue en $x_0 \Longleftrightarrow f$ et g sont continues en x_0.

Fonction complexe d'une variable réelle

Définition (suite)

Dérivation : $x \longrightarrow F(x) = f(x) + i\ g(x)$ est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ existe et $\in \mathbb{C}$, on la note $F^{'}(x_0)$.

$$\begin{aligned}
\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(f(x) + i\, g(x)) - (f(x_0) + i\, g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + i\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Donc F admet une dérivée en x_0, si et seulement si, f et g admettent des dérivées en x_0 et on a :

$$F^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) + i\, g(x_0).$$

Définition (suite)

Intégration : Soit F continue sur $[a, b]$, par définition, on pose :

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + i\int_a^b g(x)\,dx.$$

Remarque 3.1

Les opérations classiques sur les limites, continuité, dérivabilité et intégration (de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) restent valables (de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$).
On a aussi

$$\overline{\int_a^b F(x)\,dx} = \int_a^b \overline{F(x)}\,dx.$$

Définition 4.1

Soient ω *et* η *deux formes différentielles de degré* 1 *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^2$.
Soit γ *un courbe continûment différentiable (ou de classe* $\mathcal{C}^1$*)*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & (x(t), y(t)) \end{array}$$

par définition :

$$\int_\gamma \omega + i\,\eta = \int_\gamma \omega + i \int_\gamma \eta.$$

$\alpha = \omega + i\,\eta$ *est appelée forme différentielle de degré* 1 *à valeurs complexes.*

Soit $f(z)$ une fonction **continue** (de la variable complexe z).
On pose $dz = dx + i\,dy$ et $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$; $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(z)\,dz &= [P(x,y) + i\,Q(x,y)][dx + i\,dy] \\ &= [P(x,y)dx - Q(x,y)dy] + i[P(x,y)dy + Q(x,y)dx] \end{aligned}$$

c'est de la forme $\omega + i\eta$
Par définition :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma [P(x,y)\,dx - Q(x,y)\,dy] + i\int_\gamma [P(x,y)\,dy + Q(x,y)\,dx].$$

Donc si γ est une courbe paramétrée par : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array}\right. \quad , \quad a \leqslant t \leqslant b.$

alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b [P(x(t),y(t))\,x^{'}(t) - Q(x(t),y(t))\,y^{'}(t)]\,dt + \\ i\int_a^b [P(x(t),y(t))\,y^{'}(t) + Q(x(t),y(t))\,x^{'}(t)]\,dt$$

$z(t) = x(t) + i\,y(t)$ alors $z^{'}(t) = x^{'}(t) + i\,y^{'}(t)$.
On obtient :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z^{'}(t)\,dt,$$ $(t \longrightarrow (x(t),y(t))$ est un paramétrage de $\gamma)$

(2^{ime} membre : intégrable d'une fonction complexe de variable réelle t).

Exemple

Calcul de $I = \displaystyle\int_{C^+} \frac{1}{z-a}\, dz$, où C^+ **<u>cercle de centre a</u>** et de rayon r ; $\mathcal{C}(a, r)$.

$a = x_0 + i\, y_0 \quad , \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

$$C^+ \text{ est paramétré par } \varphi : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & (x(t), y(t)) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & x_0 + r\, \cos t \\ y(t) & = & y_0 + r\, \sin t \end{array} \right.$$

Exemple (suite)

$z(t) = x(t) + i\,y(t) = (x_0 + r\ \cos t) + i\,(y_0 + r\ \sin t)$
$\Longrightarrow z^{'}(t) = x^{'}(t) + i\,y^{'}(t) = -r\ \sin t + i\,r\ \cos t$
donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\ \cos t + i\,r\ \sin t}(-r\ \sin t + i\,r\ \cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{i(r\ \cos t + i\,r\ \sin t)}{r\ \cos t + i\,r\ \sin t}\,dt \\ &= i\int_0^{2\pi} dt = 2i\pi. \end{aligned}$$

Proposition 4.1 (linéarité)

f, g des fonctions complexes définies sur le même domaine, $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit γ un chemin, ou courbe de classe $\mathcal{C}^1$.

- $\displaystyle\int_\gamma (f+g)(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\gamma g(z)\, dz.$
- $\displaystyle\int_\gamma (\lambda f)(z)\, dz = \lambda \int_\gamma f(z)\, dz.$

Démonstration.

Il suffit d'utiliser la définition de l'intégrale complexe. □

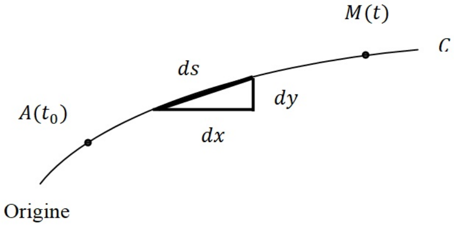
Proposition 4.2 (Changement de variables : $z = z(w)$)

$$\begin{array}{rcl} z : \Gamma & \longrightarrow & C \\ w & \longrightarrow & z = z(w) \end{array}$$

*z holomorphe par rapporté à w et z **bijection**, alors :*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z(w))\,\frac{dz}{dw}\,dw. \qquad (dz = z^{'}(w)\,dw).$$

Abscisse curviligne

4.jpg 

$ds^2 = dx^2 + dy^2$ si $s = s(t)$

$\dfrac{ds}{dt} = s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

$\Longrightarrow ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$

Abscisse curviligne

Définition 4.2

l'abscisse curviligne $s(t)$ *du point* $M(t)$ *est la longueur de l'arc* $\widehat{AM}$

$$s(t) = \int_{\widehat{AM}} ds = \int_{t_0}^{t} s^{'}(u)\, du = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du$$

$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Longrightarrow (\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 = 1 \Longrightarrow$ *le vecteur* tan *à* C *en M est* $\begin{pmatrix} x^{'}(s) \\ y^{'}(s) \end{pmatrix}$, *(il est unitaire).*

Proposition 4.3 (Majoration d'une intégrale)

$C = \widehat{AB}$, s abscisse curviligne sur C orienté de A vers B, on a :

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqslant \int_{s_A}^{s_B} |f(z(s))|\, ds$$

.

Démonstration

$\displaystyle\int_C f(z)\, dz$ est indépendante du paramètre choisi pour décrire C.
On choisit le paramètre abscisse curviligne.

$$I = \int_C f(z)\, dz = \int_{s_A}^{s_B} f(z(s))\, z'(s)\, ds.$$

.

Démonstration (suite)

$|z'(s)| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1 \Longrightarrow z'(s) = e^{i\,\varphi(s)}$, $\varphi(s)$ = argument de $z'(s)$.
$I \in \mathbb{C} \Longrightarrow I = A\, e^{i\alpha}$ avec $A = |I| \in \mathbb{R}$.
$f(z(s)) = r(s)\, e^{i\omega(s)}$; ($r(s)$ module, $\omega(s)$ argument de $f(z(s))$.

$$I = \int_{s_A}^{s_B} r(s)\, e^{i\omega(s)}\, e^{i\varphi(s)}\, ds \; (= Ae^{i\alpha})$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad A &= \int_{s_A}^{s_B} r(s)\, e^{i(\omega(s)+\varphi(s)-\alpha)}\, ds \\ &= \int_{s_A}^{s_B} r(s)\, \cos(\omega(s)+\varphi(s)-\alpha)\, ds \text{ , car } A \in \mathbb{R} \text{ (part imag=0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad |I| = \left| \int_C f(z)\, dz \right| = A \quad &\leqslant \int_{s_A}^{s_B} r(s)\, |\cos(\omega(s)+\varphi(s)-\alpha)|\, ds \\ &\leqslant \int_{s_A}^{s_B} r(s)\, ds = \int_{s_A}^{s_B} |f(z(s))|\, ds. \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Corollaire 4.1

si $M = \sup_{z \in C = \widehat{AB}} |f(z)|$ *et si L est la longueur de larc* $C = \widehat{AB}$*, alors :*

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqslant M.L.$$

Démonstration.

$L = s_B - s_A$.

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqslant \int_{s_A}^{s_B} |f(z(s))|\, ds \leqslant \int_{s_A}^{s_B} M\, ds = M(s_B - s_A) = M.L.$$

□

Proposition 4.4

Soit f_n une suite de fonctions complexes <u>continues</u> sur D $(\gamma \subset D)$ qui converge <u>uniformément</u> vers une fonction f dans D, alors :

$$\int_\gamma f_n(z)\, dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)\, dz$$

Démonstration.

$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \sup\limits_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| < \dfrac{\varepsilon}{L}\ ,\ L = \text{longueur de}$
D

alors : $\forall n \leqslant n_0 \Longrightarrow |\int_\gamma f_n(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz| = |\int_\gamma (f_n(z) - f(z))\, dz| \leqslant$
$\sup\limits_{z \in \gamma} |f_n(z) - f(z)|.L \equiv \dfrac{\varepsilon}{\cancel{L}}.\ \cancel{L} = \varepsilon$ □

Définition 4.3

Un domaine du plan complexe est dit simplement connexe, si pour toute courbe fermée simple C située dans D, l'intérieur de C est tout entier dans D.

Exemple 4.1

- *le plan comlexe est simplement connexe* ($\mathbb{C}$).
- *tout disque de rayon non nul est simplement connexe.*
- $\mathbb{C}^*$ *n'est pas simplement connexe.*
- *les couronnes ne sont pas simplement connexes.*

Théorème 4.1 (de Cauchy)

Soit f continue différentielle dans un domaine D ; C une courbe fermée simple située dans D, ainsi que son intérieur, (c'est vérifié si D est simplement connexe), alors $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$.

Démonstration

Soit Δ le domaine limité par C. $\quad (C = \partial\Delta)$

$f(z)\,dz = (P\,dx - Q\,dy) + i\,(Q\,dx + P\,dy)$.

$$\int_C P\ dx - Q\ dy = \int_{\partial\Delta} P\ dx - Q\ dy = \int_\Delta d(P\ dx - Q\ dy).$$

(<u>Formule de Green-Riemann</u>).

Démonstration (suite)

Calculons $d(P\,dx - Q\,dy)$

$d(P\ \ dx\ -\ Q\ \ dy)\ =\ dP\,dx\ -\ dQ\,dy\ =\ \dfrac{\partial P}{\partial y}dy\,dx\ -\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy\ =$ $-\underbrace{\left(\dfrac{-\partial P}{\partial y}+\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)}_{=0}\,dx\,dy = 0$ (car f holomorphe vérifie les conditions de Cauchy). Donc $\displaystyle\int_C P\,dx - Q\,dy = 0.$

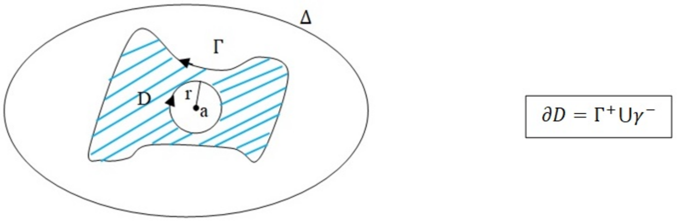
De même on trouve : $\displaystyle\int_C Q\,dx + P\,dy = 0$ (Formule de Green Riemann + cond de Cauchy)

d'où $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0.$ $\square$

Exemple

Soit Γ un chemin de classe C^1 (par morceaux) fermé simple de $\mathbb{C}$, et a un point intérieur à Γ.

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz = 2i\pi \text{ (}\Gamma\text{ n'est pas forcément un cercle).}$$



$\dfrac{1}{z-a}$ est continue différentiable à l'extérieur de la boule $B(a, r)$.

Exemple (suite)

$$\textbf{théorème de Cauchy} \quad \Longrightarrow \quad \int_{\gamma D} \frac{1}{z-a}\,dz = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\Gamma^+ \cup \gamma^-} \frac{1}{z-a}\,dz = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\Gamma^+} \frac{1}{z-a}\,dz - \int_{\gamma^+} \frac{1}{z-a}\,dz = 0$$

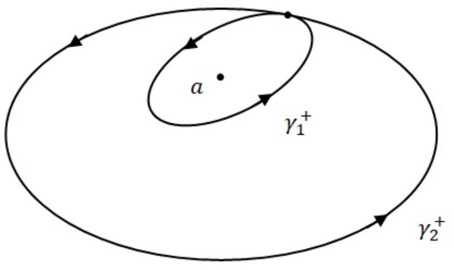
donc $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{1}{z-a}\,dz = \int_{\gamma^+} \frac{1}{z-a}\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{déja calculée}}}{=} 2i\pi.$

Remarque 4.1

l'exemple veut dire que $\displaystyle\int_{\Gamma+} \frac{1}{z-a}\,dz$ *est indépendante de la courbe* Γ *entourant le point* a.

Remarque 4.2

si Γ *a un point double* (Γ *n'est pas forcément une frontière) alors* $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma}\dfrac{1}{z-a}\,dz = 2$. *(indice de a par rapport à* Γ*).*

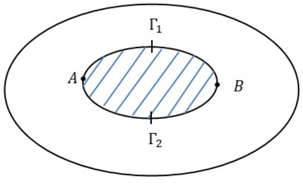


$$\Gamma^+ = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^+, \quad \int_{\Gamma^+} \frac{1}{z-a}dz = \int_{\gamma_1^+} \frac{1}{z-a}dz + \int_{\gamma_2^+} \frac{1}{z-a}dz = 2\,(2i\pi).$$

Conséquence 1

Si f est continue différentiable dans un domaine D simplement connexe, A et B deux points de D, $\int_{\widehat{AB}} f(z)\, dz$ est indépendante du chemin suivi pour aller de A à B.

Démonstration



Appliquer le théorème de Cauchy à $\widehat{A\Gamma_1 B\Gamma_2}A = C$.

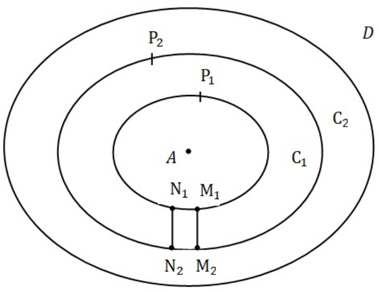
$$\int_C f(z)\, dz = 0 \Longrightarrow \int_{\widehat{A\Gamma_1 B}} f(z)\, dz = \int_{\widehat{A\Gamma_2 B}} f(z)\, dz.$$ □

Conséquence 2

Soit D un domaine simplement connexe, f continue différentiable dans $D\backslash\{A\}$; $A \in D$.
C_1 et C_2 deux courbes fermées simples dont l'intérieur de chacune contient A et sont situées dans D, alors

$$\int_{C_1^+} f(z)\, dz = \int_{C_2^+} f(z)\, dz.$$

Démonstration



$C = M_1P_1\widehat{N_1N_2P_2}M_2M_1$ vérifie l'hypothèse du théorème de Cauchy donc $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$.

Démonstration (suite)

Mais

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\widehat{M_1P_1N_1}} f(z)\,dz + \int_{\widehat{N_1N_2}} f(z)\,dz + \int_{\widehat{N_2P_2M_2}} f(z)\,dz + \int_{\widehat{M_2M_1}} f(z)\,dz.$$

Si on fait tendre M_1 vers N_1 sur C_1 et M_2 vers N_2 sur C_2, alors : $\widehat{M_1P_1N_1} \longrightarrow C_1^+$, $\widehat{N_2P_2M_2} \longrightarrow C_2^-$ et $\widehat{M_2M_1} \longrightarrow N_2N_1$, ainsi on obtient le résultat voulu. □

Remarque 4.3

La deuxième conséquence signifie que $\int_{C_i} f(z)\,dz$ *est indépendante de la courbe* C_i *qui entoure le point* A *dans* D.

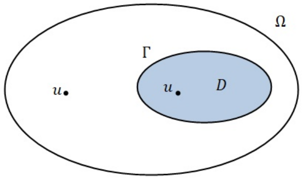
Conséquence 3

Soit f continue différentiable dans $D\backslash\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$; $A_i \in D$, $i = 1, 2, \cdots, n$.
D domaine simplement connexe.
C = courbe fermée simple situé dans D, dont l'intérieur contient tous les points A_i.
C_i courbe fermée simple à l'intérieur de C entourant A_i et laissant A_j $(j \neq i)$ à son extérieur, alors :

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1^+} f(z)\, dz + \cdots \int_{C_n^+} f(z)\, dz.$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f continûment dérivable dans Ω.
D un domaine borné contenu dans Ω dont la frontière Γ est continûment différentielle par morceaux.
Soit $u \in \Omega - \Gamma$, alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-u}\, dz = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \text{ est extérieur à } D \\ f(u) & \text{si} \quad u \text{ est intérieur à } D \end{cases}$$



Remarque 4.4

la formule est déjà établie si $f = 1$.

Démonstration

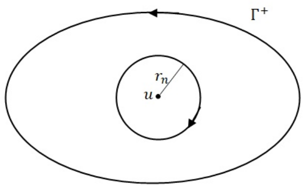
1− Si u est extérieur à D, donc $\dfrac{f(z)}{z-u}$ est continûment différentiable dans $\bar{D}$.

$\Longrightarrow \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-u}\,dz = 0$ (théorème de Cauchy).

2− Si u est intérieur à D.

Soit $r_n > 0$ tel que $B(u, r_n) \subset D$.

Alors $\dfrac{f(z)}{z-u}$ est continûment différentiable dans $\Omega - B(u, r_n)$.



Démonstration (suite)

Soit $C_n = \partial B(u, r_n)$, d'après le théorème de Cauchy :

$$\int_{\Gamma^+ \cup C_n^-} \frac{f(z)}{z-u}\, dz = 0$$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-u}\, dz = \int_{C_n^+} \frac{f(z)}{z-u}\, dz$, $\forall r_n > 0$ et on fait tendre $r_n \longrightarrow 0$ sur C_n, on pose : $z = u + r_n e^{it}$.

$$\begin{aligned} \int_{C_n^+} \frac{f(z)}{z-u}\, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(u + r_n e^{it})}{r_n e^{it}}\, r_n i e^{it}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} i f(u + r_n e^{it})\, dt \end{aligned}$$

Démonstration (suite)

On pose $g_n(t) = f(u - r_n e^{it})$, g_n est continue ...

Montrons que $g_n \xrightarrow{\text{c.u}} g$ sur $[0, 2\pi]$ où $g(t) = f(u)$. c.u : convergence uniforme

Continuité de f en u :$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \eta_\varepsilon : |u + r_n e^{it} - u| = r_n < \eta_\varepsilon \implies |f(u + r_n e^{it}) - f(u)| < \varepsilon$ est vraie $\forall t \in [0, 2\pi]$.

$$\implies (\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n > N_\varepsilon\ ,\ r_n < \eta_\varepsilon \ \sup_{t \in [0,2\pi]} |f(u + r_n e^{it}) - f(u)| < \varepsilon)$$

$$\implies f(u + r_n e^{it}) \xrightarrow{\text{c.u}} f(u) \text{ par rapport à } t \text{ dans } [0, 2\pi]$$

$$\implies g_n \xrightarrow{\text{c.u}} g \text{ sur } [0, 2\pi]$$

$$\implies \int_0^{2\pi} g_n(t)\, dt \longrightarrow \int_0^{2\pi} g(t)\, dt$$

Formule intégrale de Cauchy

Démonstration (suite)

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} f(u + r_n e^{it})\, dt \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(u)\, dt = 2\pi f(u)$$

$$\Longrightarrow \int_{C_n^+} \frac{f(z)}{z-u}\, dz = \int_0^{2\pi} i f(u + r_n e^{it})\, dt \longrightarrow i \int_0^{2\pi} f(u)\, dt = 2i\pi f(u).$$

D'où $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-u}\, dz = 2i\pi f(u).$ $\square$