Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ANALYSE COMPLEXE

Arij BOUZELMATE

Licence d'Education: Spécialité Enseignement Secondaire- Mathématiques

Plan du Cours

1. **Rappels**
2. **Fonctions holomorphes**
3. **Intégration complexe**
4. **Fonction analytique d'une variable complexe**
5. **Théorème des résidus et application au calcul intégral**

Définition 1.1

$f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *est* ***analytique*** *en* z_0 *si au voisinage de* z_0 f *est développable en série de* $z - z_0$*, c'est-à-dire s'il existe un disque* $B(z_0, r)$ *ouvert centré en* z_0 *et une série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *convergente dans ce disque tel que :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \ , \ \forall z \in B(z_0, r)$$

.

Conséquences

1– D'après le principe des zéros isolés, si un tel développement de f au voisinage de z_0 existe, il est unique.

2– f analytique en $z_0 \Longrightarrow f$ holomorphe en z_0. $\Bigg($car : $\forall z \in B(z_0, r)$:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}\Bigg)$$

$$\begin{aligned} f^{(p)}(z) &= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n(z-z_0)^{n-p} \\ &= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!}\, a_n(z-z_0)^{n-p} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{q!}\, a_{p+q}(z-z_0)^{q}. \end{aligned}$$

Définition 1.2

A ouvert de $\mathbb{C}$; f est analytique en A, si elle est analytique en tout point de A.

Analyticité d'une série entière

Proposition 1.1

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$ (R rayon de convergence), alors $S(z)$ est analytique dans la boule $B(0,R)$ et pour $z_0 \in B(0,R)$ on a :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \text{ pour } |z - z_0| < R - |z_0|,$$

et le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!} u^n$ *est* $\geqslant R - |z_0|$.

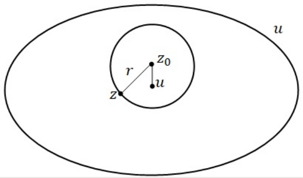
Développement de Taylor

Théorème 1.1

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continûment dérivable (U ouvert de $\mathbb{C}$) alors f est analytique dans U. (f de classe $\mathcal{C}^1 \Longrightarrow f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$)

Démonstration

$\gamma = C(z_0, r)$ (cercle de centre z_0 de rayon r), $\gamma \subset U$.



Démonstration (suite)

la formule intégrale de Cauchy donne

$$f(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-u}\,dz \ , \ z \in \gamma$$

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z-z_0+z_0-u} = \frac{1}{z-z_0}\left[\frac{1}{1-(\frac{u-z_0}{z-z_0})}\right] =$$

$$\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{1-q}\right)_{|q|<1} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Donc

$$\frac{1}{z-u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \left(\text{car } z \in \gamma \Longrightarrow \left|\frac{u-z_0}{z-z_0}\right| < 1\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{f(z)}{z-u} = \sum_{n=0}^{\infty} f(z)\frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Démonstration (suite)

la série est normalement convergente par rapport à z sur γ (dans $C(0,r)$ la boule fermée).

$$\left| f(z)\frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \right| \leqslant \sup_{z\in\gamma}|f(z)| \frac{|u-z_0|^n}{|z-z_0|^{n+1}} = \frac{M}{r}\left(\frac{|u-z_0|}{r}\right)^n$$

$|u-z_0|<r \Longrightarrow \dfrac{|u-z_0|}{r}<1$ donc $\sum_n \dfrac{|u-z_0|^n}{r^n}$ converge (série à termes positifs).
Donc on peut intégrer terme à terme par rapport à z et on a :

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-u}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f(z)\frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma f(z)\frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(u-z_0)^n\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz. \end{aligned}$$

Démonstration (suite)

On a donc $\boxed{f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (u - z_0)^n}$ avec $\boxed{a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz}$

Ce développement s'appelle **développement de Taylor** de f (au voisinage de z_0). $\square$

Corollaire 1.1

f continûment dérivable $\Longrightarrow$ f indéfiniment dérivable. (dans $\mathbb{C}$).
(Car : analytique $\Longrightarrow$ indéfiniment dérivable).

Proposition 1.2 (Inégalité de Cauchy)

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} M\,d\theta = \frac{M}{r^n} \text{ où } M = \sup_{z\in\gamma}|f(z)|$$

Démonstration

En posant le changement de variables : $z = z_0 + re^{i\theta} \Longrightarrow dz = rie^{i\theta}\,d\theta$

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}}\,rie^{i\theta}\,d\theta\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{(e^{i\theta})^n}\right|d\theta \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\sup_{z\in\gamma}|f(z)|\int_0^{2\pi}d\theta. \qquad (|e^{i\theta}|=1) \leqslant \frac{M}{r^n}.
\end{aligned}$$

□

Développement en série de Laurent

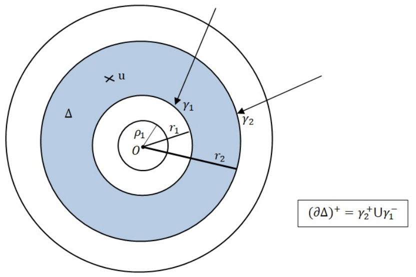
Existence :

Soient $0 < \rho_1 < \rho_2$ et considérons la couronne $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$.

Soit f dérivable dans Ω.

On considère r_1 et r_2 tel que : $\rho_1 < r_1 < r_2 < \rho_2$.

$\gamma_1 = C(0, r_1)$, $\gamma_2 = C(0, r_2)$, Δ couronne $(0, r_1, r_2)$.



Développement en série de Laurent

la formule intégrale de Cauchy appliquée à $(\partial\Delta)^+ = \gamma_2^+ \cup \gamma_1^-$ donne

$$f(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2^+}\frac{f(z)}{z-u}\,dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1^+}\frac{f(z)}{z-u}\,dz = I_2 - I_1$$

$z \in \gamma_2 \Longrightarrow |z| > |u|$, alors sur γ_2 on a : $\dfrac{1}{z-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{z^{n+1}}$ et $\displaystyle\sum_n f(z)\frac{u^n}{z^{n+1}}$ est normalement convergente sur γ_2.

$z \in \gamma_1 \Longrightarrow |z| < |u|$, alors de même sur γ_1 on a : $\dfrac{1}{z-u} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{u^{n+1}}$ et $\displaystyle\sum_n f(z)\frac{z^n}{u^{n+1}}$ est normalement convergente sur γ_1.

Développement en série de Laurent

Posons $n+1=-m$, alors sur γ_1 : $\dfrac{1}{z-u} = -\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{u^m}{z^{m+1}}$

donc $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2^+} \frac{f(z)}{zn+1}\,dz + \sum_{n=-\infty}^{-1} u^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1^+} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$

$$f(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n u^n \text{ avec } \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma_1^+} \frac{f(z)}{z^{n+1}} & \text{si} \quad n < 0 \\ a_n = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma_2^+} \frac{f(z)}{z^{n+1}} & \text{si} \quad n \geqslant 0 \end{cases}$$

Développement en série de Laurent

Définition 1.3

les séries de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ *s'appellent* ***séries de Laurent****, on a :*

$$\forall u \in \Delta \qquad f(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n u^n.$$

C'est le dérivée de Laurent d'une fonction f *continue dérivable dans une couronne.*

Développement en série de Laurent

Unicité :

$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n e^{in\theta}.$

Evaluons

$$\int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} f(re^{i\theta}) \quad d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n e^{in\theta} \Big) \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n e^{i(n-p)\theta} \, d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a_n r^n e^{i(n-p)\theta} \, d\theta$$

et la seule intégrale qui n'est pas nulle est celle tel que $n = p$.

Donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} f(re^{i\theta}) \, d\theta = \int_0^{2\pi} a_p r^p \, d\theta = 2\pi a_p r^p.$

Développement en série de Laurent

$\Longrightarrow a_p = \dfrac{1}{2\pi r^p} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta.$

$\Longrightarrow a_p = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{C(0,r)} \dfrac{f(z)}{z^{p+1}}\, dz.$ (déja établi par un changement de variables).

les coefficient a_p sont déterminés d'une façon unique, d'où l'unicité du développement.

Corollaire 1.2

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, D le plus grand disque ouvert de centre z_0 contenu dans U. Soit f continûment dérivable dans $U - z_0$, alors il existe une série de Laurent unique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ qui converge vers $f(z)$ dans $D - z_0$, (en réalité dans une couronne $(z_0,\ r_1,\ r_2)$ contenue dans D).

Définition 1.4

Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ le développement de Laurent d'une fonction continue dérivable dans une couronne $(z_0,\ r_1,\ r_2)$; le coefficient a_{-1} de $\frac{1}{z-z_0}$ s'appelle résidu de f en z_0, et on le note $Res(f, z_0)$.

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_1)} f(z)\,dz.$$

Remarque 1.1

On peut prendre n'importe quel cercle (ou courbe fermée) contenu dans la couronne $(z_0,\ r_1,\ r_2)$ et entourant z_0 (ceci découle du théorème de Cauchy).

Définition 1.5

Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ *le développement de Laurent de f dans une couronne .*
deux cas se présentent :
<u>1^{er} ***Cas***</u> *: Si les coefficients a_n $(n < 0)$ sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux : $\exists q > 0$, $a_{-q} \neq 0$ et $a_n = 0\ \forall n < -q$.*
z_0 est alors <u>pôle</u> d'ordre q de f car :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-q}}{(z-z_0)^q} + \frac{a_{-q+1}}{(z-z_0)^{q-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots \\ &+ a_n(z-z_0)^n + \ldots \end{aligned}$$

Développements

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^q}(a_{-q} + a_{-q+1}(z-z_0) + ... + a_n(z-z_0)^{n+q} + ...) \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^q}\, g(z) \quad \text{où } g(z) \text{ est analytique en } z_0 \text{ et } g(z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Exemple 1.1

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)^2} \qquad \begin{array}{lll} z = 0 & \textit{pôle simple} & \textit{(d'ordre 1)} \\ z = \pm i & \textit{pôle doubles} & \textit{(d'ordre 2)} \end{array}$$

2^me **Cas** : Une infinité de coefficient a_n $(n < 0)$ sont différents de 0.
z_0 est alors dit point singulier essentiel isolé de f.

Exemple 1.2

$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n<0} \frac{z^n}{(-n)!}$ $z_0 = 0$ *point singulier essentiel isolé de* $e^{\frac{1}{z}}$ *, (les coefficients à indice* > 0 *sont nuls).*

Définition 1.6 (d'un point singulier isolé de f)

On dit que z_0 est un point singulier isolé de f, s'il existe un disque Δ centré en z_0 tel que f soit analytique dans $\Delta - z_0$.