Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ANALYSE COMPLEXE

Arij BOUZELMATE

Licence d'Education: Spécialité Enseignement Secondaire- Mathématiques

Plan du Cours

1. **Rappels**
2. **Fonctions holomorphes**
3. **Intégration complexe**
4. **Fonction analytique d'une variable complexe**
5. **Théorème des résidus et application au calcul intégral**

Théorème des résidus

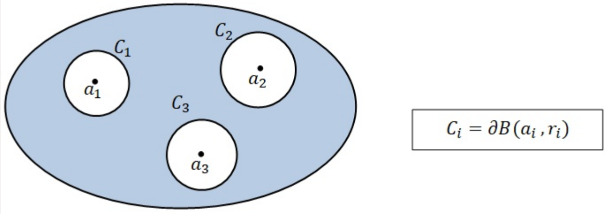
Théorème 1.1

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $D \subset \Omega$, D un omaine borné dont la frontière Γ est continûment différentiable par morceaux.
Soit f continûment dérivable dans Ω sauf aux points $a_1, \ldots, a_n \in D$. Alors

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Res(f, a_k).$$

Démonstration

Entourons les a_k par des cercles disjoints 2 à 2.



Théorème des résidus et application au calcul intégral

f est continûment dérivable dans $D - \cup_{i=1}^{n} B_i$.

Théorème de Cauchy $\Longrightarrow \displaystyle\int_{\partial(D - \cup_{i=1}^{n} B_i)} f(z)\, dz = 0.$

Or $\partial(D - \cup_{i=1}^{n} B_i) = \Gamma^+ \cup C_1^- \cup C_2^- \cup \ldots \cup C_n^-$, alors $\displaystyle\int_{\Gamma^+} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k^+} f(z)\, dz.$

Or par définition du résidu on a :

$$\mathrm{Res}(f, a_k) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k^+} f(z)\, dz.$$

D'où le résultat.

a- Cas d'un pôle simple

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} g(z) \qquad \text{où } g \text{ est analytique même en } z_0 \text{ et } g(z_0) \neq 0.$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

donc $f(z) = \dfrac{b_0}{z - z_0} + b_1 + b_2(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^{n-1} + \ldots$

$\Longrightarrow \mathrm{Res}(f, z_0) = b_0 = g(z_0)$ ou bien $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

Si f est de la forme $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ ($g(z_0) \neq 0$ et $h(z_0) = 0$), alors

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}}.$$

Donc $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Calcul pratique des résidus

Exemple :

$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1} \quad z = \pm i$ sont deux pôles simples.

$$\mathrm{Res}(f, i) = \left[\frac{e^{-iz}}{2z}\right]_i = \frac{e}{2i}; \qquad \mathrm{Res}(f, -i) = \left[\frac{e^{-iz}}{2z}\right]_{-i} = \frac{-e^{-1}}{2i}.$$

Calcul pratique des résidus

b- Cas d'un pôle multiple

z_0 pôle d'ordre p.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p} \quad \text{où } g \text{ est analytique au voisinage de } z_0 \text{ et } g(z_0) \neq 0.$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^p} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{b_{p-1}}{z-z_0} + b_p + b_{p+1}(z-z_0) + \ldots$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) = b_{p-1} = \frac{g^{(p-1)}(z_0)}{(p-1)!}.$$

Exemple :

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$$

0 est un pôle simple $-i$ et $+i$ pôles doubles.

$$\text{Res}(f,0) = \left[\frac{e^{iz}}{(z(z^2+1)^2)'}\right]_0 = \left[\frac{e^{iz}}{5z^4+6z^2+1}\right]_0 = 1.$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{g(z)}{(z-i)^2}, \quad g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}.$$

$$\text{Res}(f,i) = \frac{g^{(2-1)}(i)}{(2-1)!} = g^{'}(i) = \frac{3}{4e}.$$

$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)\, d\theta$ où $R(x,y)$ est une fraction rationnelle sans pôle sur $\gamma = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2=1\}$.
On a

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

et

$$\frac{1}{z} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$\Longrightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$ et $dz = ie^{i\theta}d\theta \Longrightarrow d\theta = \dfrac{dz}{iz}$.
l'intégrale devient

$$I = \int_\gamma \frac{1}{iz}\, R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\ ,\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) dz.$$

Calcul d'intégrales réelles par la méthode des résidus

Soit $G(z)$ la fonction complexe à intégrer :

$$I = \int_\gamma G(z)\, dz = 2i\pi \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}(G, z_k),$$

z_k points singuliers isolés intérieurs à γ.

Exemples :

a/ $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos\theta}\, d\theta \qquad a \in \mathbb{R}^+ , \quad a > 1.$

On pose $z = e^{i\theta} \Longrightarrow I = \displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{-2i}{z^2 + 2az + 1}\, dz.$

$z^2 + 2az + 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} \\ z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1} \end{cases} \qquad z_1.z_2 = 1$

z_1 et z_2 pôles simples, z_1 intérieur à γ, z_2 extérieur à γ, donc :

$$I = 2i\pi \mathrm{Res}(f, z_1) \qquad \text{où} \quad f(z) = \frac{-2i}{z^2 + 2az + 1}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{-2i}{2z_1 + 2a} = \frac{-2i}{2\sqrt{a^2 - 1}} \qquad \text{donc} \quad I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

b/ $I = \int_0^{2\pi} \cos^6 \theta \, d\theta$

$$G(z) = \frac{1}{iz}\left[\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)\right]^6 = \frac{1}{iz}\frac{1}{2^6}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^6 = \frac{1}{i2^6}\,\frac{(z^2+1)^6}{z^7}$$

0 est un pôle d'ordre 7 de G.

$$R(G,0) = \frac{1}{6!}\left[\frac{1}{i2^6}(z^2+1)^6\right]^{(6)}_{\text{au point } 0} = \cdots\cdots\cdots$$

Autre méthode :

$$(z^2+1)^6 = \sum_{k=0}^{6} \mathtt{C}_6^k \, z^{2k} \Longrightarrow G(z) = \frac{1}{i2^6} \sum_{k=0}^{6} \mathtt{C}_6^k \, z^{2k-7}$$

d'après l'unicité, c'est le développement de Laurent de G en 0.

et par définition $R(G,0) = \text{coef de} \frac{1}{z} = \frac{1}{i2^6} \mathtt{C}_6^3 \qquad (2k-7=-1)$

donc $I = 2i\pi R(G,0) = 2i\pi \, \frac{1}{i2^6} \mathtt{C}_6^3 = \frac{5\pi}{8}$.