**UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI**
**FACULTÉ DES SCIENCES**
**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**
**TÉTOUAN**

# COURS

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

**ARIJ BOUZELMATE**

Filière : **Sciences Mathématiques et Applications (SMA)**

Année Universitaire : **2020-2021**

# Table des matières

# Chapitre 1

# Existence des Solutions des EDO

## 1 Définitions de base

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation reliant une variable réelle $t$, une fonction $x(t)$ (l'inconnue) ainsi qu'un certain nombre de ses dérivées ; c'est à dire qu'une équation différentielle ordinaire se présente sous la forme générale suivante :

$$G(t, x(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0, \tag{1.1}$$

où $G$ étant une fonction définie sur $I \times U$ à valeurs dans un espace de Banach $E$ (en général de dimension finie ), $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $U$ un sous-ensemble ouvert de $E$.

**Définition 1.1.** *Une **solution** de l'équation (1.1) est une application $x : J \to E$ telle que*

*(i) $J$ est un sous-intervalle de $I$,*

*(ii) $x$ est de classe $C^n$ dans l'intervalle $J$,*

*(iii) Pour tout point $t \in J$, le point $(x(t), ..., x^{(n)}(t)) \in U$ et de plus l'équation (1.1) est vérifiée.*

**Définition 1.2.** *Le nombre $n$ est appelé l'**ordre** de l'équation différentielle.*

**Définition 1.3.** *Si la fonction $G$ ne dépend pas explicitement de $t$, mais seulement de $x(t)$ et de ses dérivées, on dit qu'on a une équation différentielle **autonome** (et dans ce cas $I = \mathbb{R}$).*

**Définition 1.4.** *Si $E$ est l'ensemble $\mathbb{R}$, on dit qu'on a une équation différentielle scalaire.*

**Définition 1.5.** *Lorsque la différentielle partielle de $G$ dans la direction $x^{(n)}$ est inversible ; d'après le théorème des fonctions implicites, on peut, au moins localement, se ramener de la forme (1.1) à la forme suivante :*

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \tag{1.2}$$

*La forme (1.2) est appelée EDO **normale** d'ordre $n$.*

**Exemple 1.1.** *Considérons une équation du type $G(t, u, u') = 0$ où $G : U \to \mathbb{R}$ est une application définie et de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^3$.*

*Pour trouver une solution de ce problème, on peut d'abord déterminer une racine $(t_0, x_0, y_0)$ de l'équation $G(t, x, y) = 0$. Ayant obtenu une telle racine $(t_0, x_0, y_0)$, si l'on a*

$$\frac{\partial G}{\partial y}(t_0, x_0, y_0) \neq 0,$$

*d'après le Théorème des fonctions implicites, on peut trouver un voisinage $V \subset \mathbb{R}^2$ de $(t_0, x_0)$, un voisinage $J \subset \mathbb{R}$ de $y_0$, et une application $F : V \to J$ de classe $C^1$ tels que*

$$G(t, x, F(t, x)) = 0 \quad \forall (t, x) \in V.$$

*Toute solution de $u' = F(t, u)$ sera alors une solution de $G(t, u, u') = 0$.*

Toute la théorie des équations différentielles ordinaires sera dévelopée pour les équations normales.

## 2 Terminologie et réduction à l'ordre 1

Une équation différentielle **autonome d'ordre 1** se présente sous la forme :

$$x'(t) = F(x(t)) \qquad (E)$$

On dit alors que l'équation $(E)$ est définie par le champ de vecteur $x \to F(x)$ (défini dans $U$).

La raison de cette terminologie est la suivante : Soit $x$ une solution de $(E)$ définie sur un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$ ; alors l'image $x(J) = \Gamma$ est une courbe dans $U$ paramétrée par $x$. D'où en un point $x(t_0)$ tel que $F(x(t_0)) \neq 0$, la courbe $\Gamma$ admet une tangente dont la direction est précisément engendrée par $F(x(t_0))$.

Pour pouvoir présenter la théorie sous un aspect plus unifié on montre le résultat suivant.

**Proposition 2.1.** *Toute équation différentielle normale d'ordre $n$ se ramène à un système de $n$ équations différentielles d'ordre* 1.

*Démonstration.* Posons

$$X(t) = (x(t), x_1(t), ..., x_{n-1}(t)) = \Big(x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)\Big)$$

Alors l'équation différentielle normale

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), ..., x^{(n-1)}(t))$$

s'écrit sous la forme suivante :

$$X\,'(t) = f(t, X(t))$$

où $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ est un vecteur de $E^n$ défini par :

$$(f_1(t, X(t)),\ f_2(t, X(t)), ...,\ f_{n-1}(t, X(t)),\ f_n(t, X(t))^T = (x_1(t), ..., x_{n-1}(t), F(t, X(t)))^T.$$

$\square$

**Conséquence**

Etudier les équations différentielles **normales d'ordre** $n$ revient à étudier les équations différentielles **vectorielles normales d'orde** 1.

Donc pour présenter la théorie des équations différentielles ordinaires il suffit de le faire pour les EDO d'ordre 1.

Plus exactement on se donne $E$ un ensemble de **dimension finie**, $D = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f : D \to E$ une fonction continue, et on s'intéresse à l'équation différentielle normale suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

**Définition 2.2.** *Soit $f$ une fonction définie et continue sur un ouvert $D = I \times U$ de $\mathbb{R} \times E$ à valeurs dans $E$. On appelle solution de l'équation différentielle ordinaire*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (E)$$

*tout couple $(\varphi, J)$ où $J$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\varphi$ est une fonction dérivable sur $J$ à valeurs dans $E$ telle que*

***(i)*** *$(t, \varphi(t)) \in D$ pour tout $t \in J$,*

***(ii)*** *$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ $\forall t \in J$.*

**Remarque 2.1.**

***(i)*** *La fonction $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$.*

***(ii)*** *Le vecteur tangent au point $\varphi(t)$ est donnée par $f(t, \varphi(t))$.*

***(iii)*** *Le graphe de la solution $\varphi$ est l'ensemble*

$$\Gamma = \{(t, \varphi(t)); t \in J\} \subseteq \mathbb{R} \times E,$$

*$\Gamma$ est appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.*

***(iv)*** *Si $\dim E = n$, alors $\varphi$ est un vecteur à $n$ composantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$.*

**Définition 2.3.** *Soient $(\varphi_1, J_1)$, $(\varphi_2, J_2)$ deux solutions d'une même équation différentielle.*

*On dit que $(\varphi_2, J_2)$ est un prolongement de $(\varphi_1, J_1)$ si et seulement si $J_1 \subset J_2$ et la restriction de $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$ pour tout $t \in J_1$ .*

**Définition 2.4.** *Soient $J_1, J_2$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $J_1 \subset J_2$ .*

***(i)*** *On dit que $(\varphi, J_1)$ est globale dans $J_2$ si et seulement si $\varphi$ admet un prolongement $\phi$ solution sur tout $J_{2.}$*

***(ii)*** *On dit qu'une solution* $(\varphi, J_1)$ *est maximale dans* $J_2$ *si et seulement si* $\varphi$ *n'admet pas de prolongement* $(\phi, K)$ *tel que* $J_1 \subsetneq K \subset J_2$.

**Exemple 2.1.** *Considérons l'équation différentielle :* $x'(t) = x^2(t)$. *Alors,*

$$(\frac{1}{1-t}, ]-1,0[) \text{ est globale dans } ]-\infty,0[ \text{ et } (\frac{1}{1-t}, ]0,1[) \text{ est maximale dans } ]0,+\infty[\,.$$

**Remarque 2.2.** *Toute solution globale sur un intervalle* $J$ *est maximale sur* $J$, *mais la réciproque est fausse.*

# 3 Problème de Cauchy

L'équation différentielle $(E)$ peut avoir plusieurs solutions. Pour avoir l'unicité, on va imposer à ce que les solutions passent par un point donné $(t_0, x_0)$, appelé condition initiale.

Plus exactement on s'intéresse à la résolution du problème suivant :

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & (E) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

$(PC)$ est appelé **problème de Cauchy** où $f$ est une fonction définie et continue sur un ouvert $D = I \times U$ de $\mathbb{R} \times E$ à valeurs dans $E$.

Résoudre le problème de Cauchy $(PC)$ consiste à déterminer un couple $(\varphi, J)$ où $J$ est le plus grand intervalle contenant $t_0$ et contenu dans $I$ et $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $J$ dans $E$ tels que

$$\begin{cases} (t, \varphi(t)) \in D = I \times U \quad \text{pour tout } t \in J, \\ \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{pour tout} \quad t \in J, \\ \text{et } \varphi(t_0) = x_0. \end{cases}$$

**Lemme 3.1.** *Pour qu'une application* ***continue*** $\varphi$ *de* $J$ *à valeurs dans* $U$ *soit solution du problème de Cauchy* $(PC)$, *il faut et il suffit que*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \quad \text{pour tout } t \in J \quad (PCI)$$

*Démonstration.* La condition nécessaire est évidente ; il suffit d'intégrer l'équation différentielle $(E)$ entre $t_0$ et $t \in J$.

Inversement, si l'application $\varphi : J \to U$ est continue et vérifie la formule $(PCI)$ , alors le membre de droite de cette formule est dérivable en tout point $t \in J$ de dérivée $f(t, \varphi(t))$ et de plus si on fait $t = t_0$ on obtient $\varphi(t_0) = x_0$.. □

**Remarque 3.1.**

***(i)*** *L'intégrale vectorielle* $\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$ *est donnée par*

$$\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds = \left( \int_{t_0}^{t} f_1(s, \varphi(s))ds, ......, \int_{t_0}^{t} f_n(s, \varphi(s))ds \right).$$

***(ii)*** *Une fonction* $\varphi$ *donnée par la formule* $(PCI)$ *est dite solution intégrale.*

# 4 Unicité locale

On commence ce paragraphe par un résultat important pour la théorie des équations différentielles.

**Lemme 4.1** (Lemme de Gronwall)**.**

*Soient* $J$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $t_0 \in J$, $u$ *et* $v$ *deux fonctions continues de* $J$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$. *On suppose qu'il existe un réel positif* $M$ *tel que*

$$v(t) \leq M + \left| \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\ ds \right| \ \text{ pour tout } t \in J.$$

*Alors*

$$v(t) \leq M \exp(\left| \int_{t_0}^{t} u(s)\ ds \right|) \ \text{ pour tout } t \in J.$$

*Démonstration.* On suppose $t \geq t_0$ (le cas $t \leq t_0$ se traite de la même façon).

On pose

$$w(t) = M + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\ ds \ \text{ pour tout } t \in J.$$

Les fonctions $u, v$ sont continues donc $w$ est dérivable et on a $w'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)w(t)$, c'est à dire

$$\left[ w(t) \exp(- \int_{t_0}^{t} u(s)\ ds) \right]' \exp(\int_{t_0}^{t} u(s)\ ds) \leq 0$$

D'où la fonction $t \to w(t)\exp(-\int_{t_0}^{t} u(s)\, ds)$ est décroissante sur $J \cap [t_0, \infty[$ . Par suite

$$w(t)\exp(-\int_{t_0}^{t} u(s)\, ds) \leq w(t_0) = M \text{ pour tout } t \in J \cap [t_0, \infty[ .$$

D'où on en déduit que pour tout $t \in J \cap [t_0, \infty[$ ,

$$v(t) \leq M\exp(\int_{t_0}^{t} u(s)\, ds) = M\exp(\left|\int_{t_0}^{t} u(s)\, ds\right|)ds.$$

Ce qui achève la preuve. □

**Définition 4.2.** *Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble $D = I \times U$ à valeurs dans un espace normé $E$ de norme notée $\|.\|$.*

***i)*** *On dit que $f$ est Lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que*

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leq k\,[|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|] \quad \forall (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in D$$

***ii)*** *On dit que $f$ est Lipschitzienne en $x$ uniformément par rapport à $t$, s'il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\,\|x_1 - x_2\| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D$$

***iii)*** *On dit que $f$ est localement Lipschitzienne en $x$ uniformément par rapport à $t$ si pour tout $(t, x) \in D$ il existe un réel $k$ et un voisinage $V$ de $(t, x)$,inclus dans $D$ vérifiant*

$$\|f(s, x_1) - f(s, x_2)\| \leq k\,\|x_1 - x_2\| \quad \forall (s, x_1), (s, x_2) \in V.$$

**Remarque 4.1.** *Si $f$ est Lipschitzienne alors $f$ est continue sur $D$. Mais si $f$ est seulement Lipschitzienne en $x$ , alors elle n'est pas nécessairement continue sur $D$.*

**Proposition 4.3.** *Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert $D$ à valeurs dans un normé $E$. Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors elle est localement Lipschitzienne en $x$ uniformément par rapport à $t$.*

*Démonstration.* Soit $(t, x)$ un élément de $D$. Comme $D$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tels que $V = [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \times \overline{B}(x, r) \subset D$. De plus comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $k = \underset{(s,\, y) \in V}{Sup} \|\nabla_x f(s, y)\|$ existe et d'après le théorème des accroissements finis,

$$\|f(s, x_1) - f(s, x_2)\|_E \leq k \|x_1 - x_2\|_E \quad \forall (s, x_1), (s, x_2) \in V.$$

Ce qui prouve le résultat voulu. □

**Proposition 4.4.** *Soit $f$ une fonction* ***Lipschitzienne*** *en $x$ uniformément par rapport à $t$. Soient $(\varphi_1, J_1)$ et $(\varphi_2, J_2)$ deux solutions de l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$. S'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ alors $\varphi_1$ et $\varphi_2$ coïncident sur $J_1 \cap J_2$.*

*Démonstration.* Comme $\varphi_1$ et $\varphi_2$ vérifient respectivement

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s))ds \quad \text{pour tout } t \in J_1,$$

et

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_2(s))ds \quad \text{pour tout } t \in J_2,$$

alors

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))]\, ds \quad \text{pour tout } t \in J_1 \cap J_2.$$

Or la fonction $f$ est Lipschitzienne en $x$ uniformément par rapport à $t$, donc il existe $k > 0$ tel que pour tout $t \in J_1 \cap J_2$,

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} k \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|\, ds \right|.$$

Appliquons maintenant le Lemme de Gronwall avec $u(s) = \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|$ et $v(s) = k$, on en déduit que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$. □

**Lemme 4.5.** *Soient $f : W \to E$ une fonction localement Lipschitzienne et $K$ un compact de $W$, alors la restriction de $f$ à $K$ est Lipchitzienne.*

*Démonstration.* Elle va se faire par l'absurde en supposant que $f$ n'est pas Lipschitzienne sur $K$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists (x_n, y_n) \in K \times K \text{ tel que } \|f(x_n) - f(y_n)\| > n \|x_n - y_n\|.$$

Comme $K$ est compact on peut extraire deux sous-suites $x_{n_k}$ et $y_{n_k}$ telles que $x_{n_k} \to x$ et $y_{n_k} \to y$ quand $k$ tend vers l'infini (où $x$ et $y$ sont deux éléments de $K$). Or $f$ est continue d'où $f(x_{n_k}) \to f(x)$ et $f(y_{n_k}) \to f(y)$ ; ce qui implique que

$$\begin{cases} \|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| \to \|f(x) - f(y)\| \\ \text{et } \ \|x_{n_k} - y_{n_k}\| \to \|x - y\|. \end{cases}$$

On affirme que $x = y$. En effet, supposons $\|x - y\| = \alpha > 0$. Alors

$$\exists \, n_{k_0} > 0 \text{ tel que } \forall \, n_k \geq n_{k_0}, \|x_{n_k} - y_{n_k}\| > \alpha/2$$

et alors $\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| > \ n_k \, \alpha/2 \to \infty$; ce qui est impossible.

Ainsi comme $x = y \ \in E$, et $f$ est localement Lipschizienne alors il existe un voisinage $U$ de $x$ et il existe $L > 0$ tels que

$$\|f(u) - f(v)\| \leq L \|u - v\| \qquad \forall (u, v) \in U \times U.$$

Or pour $k$ assez grand on a $x_{n_k} \in U$ et $y_{n_k} \in U$ et alors

$$\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| > \ n_k \|x_{n_k} - y_{n_k}\|,$$

ce qui contredit le fait que $\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| \leq L \|x_{n_k} - y_{n_k}\|$. Ce qui termine la preuve. □

**Théorème 4.2.** *Soit $f$ une fonction continue par rapport à $t$ et* ***localement Lipschitzienne*** *en $x$ uniformément par rapport à $t$. Soient $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux solutions de l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ sur un même intervalle $J$ et ayant même valeur en un certain point alors $\varphi_1 = \varphi_2$.*

*Démonstration.* Elle va se faire par l'absurde. Supposons qu'il existe deux points $t_0$ et $t_1$ appartenant à $J$ tels que

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) \ \text{ et } \ \varphi_1(t_1) \neq \varphi_2(t_1).$$

Sans perdre en généralité on suppose que $t_1 > t_0$. Posons

$$T = \inf \, \{t \in J; \; t > t_0 \text{ et } \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\} \, .$$

$T$ est bien défini. De plus, comme les deux fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont continues alors $\varphi_1(T) = \varphi_2(T)$. Prenons $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [T, T+\alpha]$ , $(t, \varphi_1(t))$ et $(t, \varphi_2(t))$ restent dans un voisinage $V$ de $(T, \varphi_1(T))$ ( ceci est possible grâce toujours à la continuité de $\varphi_1$ et $\varphi_2$). Or sur $[T, T+\alpha]$,

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = f(t, \varphi_1(t)), \quad \varphi_2'(t) = f(t, \varphi_2(t)) \\ \text{et } \varphi_1(T) = \varphi_2(T). \end{cases}$$

En intégrant sur $[T, t] \subset [T, T+\alpha]$ et en faisant la différence on obtient

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_T^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] \, ds \, .$$

Enfin, comme $f$ est localement Lipschitzienne, donc d'après le Lemme 4.5, la fonction $s \to f(s, \varphi_1(s))$ est Lipschitzienne sur le compact $[T, T+\alpha]$ et alors il existe $K > 0$ tel que

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq K \int_T^t \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| \, ds \, .$$

et donc d'après le Lemme de Gronwall on déduit que

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \text{ pour tout } t \in [T, T+\alpha] \, .$$

Ce qui contredit la définition de $T$. □

**Conséquence**

Le graphe de deux solutions distinctes d'une même équation différentielle ne peuvent pas se croiser.

# 5 Les théorèmes d'existence locale

Dans cette section on commence par la notion de solutions approchées.

**Définition 5.1** (d'une solution $\varepsilon-$ approchée)**.**

*Soit $f \in \mathcal{C}^0(I \times U;\ E)$ où $I \times U$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$. Soit $\varepsilon > 0$.*

*une fonction $\varphi : J \to U$ est dite solution $\varepsilon-$ approchée de l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ si*

***(i)*** $J \subset I$,

***(ii)*** *$\varphi \in \mathcal{C}^0(J, U)$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ( i.e. il existe $m$ intervalles $I_k$ disjoints deux à deux tels que $J = \bigcup_{k=1}^{m} (\bar{I}_k)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(\bar{I}_k)$ pour chaque $k = 1, .., m$),*

***(iii)*** *Sur tout sous intervalle $K \subseteq J$ où $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ on a*

$$\|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in K.$$

On se fixe maintenant un point $(t_0, x_0) \in J \times U$ et deux réels $a, r > 0$ et on pose

$$V := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, r) \subseteq J \times U.$$

On a le résultat suivant.

**Proposition 5.2.** *Soient $M = \underset{(t,x)\in V}{Sup} \|f(t, x)\|$ et $\alpha = \min(a, r/M)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une solution $\varepsilon-$approchée $u \in \mathcal{C}^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,; \overline{B}(x_0, r))$ du problème de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & (E) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

*De plus*

$$\|u(t) - u(s)\| \leq M\,|t - s| \quad \forall t, s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,.$$

La preuve de la proposition est basée sur le résultat suivant.

**Lemme 5.3.** *Soit $\varphi : J \to U$ une solution $\varepsilon-$approchée de l'équation $(E)$. Alors*

$$\left\| \varphi(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \right\| \leq \varepsilon \,\|t - t_0\| \quad \forall t, t_0 \in J.$$

*Démonstration.* On suppose $t > t_0$ (le cas $t < t_0$ se traite de la même façon). Il existe une subdivision du segment $[t_0, t]$ :

$$t_0 = s_0 < s_1 < .... < s_m = t$$

telle que pour chaque $i = 0, ..., m-1$, la restriction de la fonction $\varphi$ à $[s_i, s_{i+1}]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ . D'où

$$\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i) = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \varphi'(s)ds.$$

Or

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds = \sum_{i=0}^{m-1} \left[ \varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i) - \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(s, \varphi(s))ds \right].$$

D'où

$$\left\| \varphi(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \right\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\| \varphi'(s) - f(s, \varphi(s)) \right\| ds \leq \varepsilon \left\| t - t_0 \right\|.$$

□

*Démonstration.* (de la Proposition 5.2)

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $f$ est uniformément continue sur le compact $V$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(t, x), (s, y) \in V$ vérifiant

$$|t - s| \leq \delta \text{ et } \|x - y\| \leq \delta.$$

On a

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq \varepsilon.$$

On subdivise le segment $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ en $2n$ intervalles :

$$t_0 - \alpha = t_{-n} < t_{-n+1} < ... < t_{-1} < t_0 < t_1.... < t_n = t_0 + \alpha,$$

tel que

$$\max_{i= -n+1,..n} |t_{i-1} - t_i| \leq \min(\delta, \delta/M).$$

On définit la fonction $u$ sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ de la façon suivante :

$$u(t_0) = x_0$$

et pour $t \in ]t_i, t_{i+1}]$,

$$u(t) = \begin{cases} u(t_i) + (t - t_i) f(t_i, u(t_i)) & \text{si } i \geq 0, \\ u(t_{i+1}) + (t - t_{i+1}) f(t_{i+1}, u(t_{i+1})) & \text{si } i \leq -1. \end{cases}$$

On affirme que $u \in \mathcal{C}^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,; \overline{B}(x_0, r))$. En effet, comme l'expression de $u$ est donnée sur chaque segment $[t_i, t_{i+1}]$ par la droite qui passe par le point $(t_i, u(t_i))$ et ayant pour pente $f(t_i, u(t_i))$ ; alors elle est continue sur $]t_i, t_{i+1}[$. De plus

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_{i+1}^-} u(t) &= u(t_i) + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, u(t_i)) \\ \text{et } \lim_{t \to t_{i+1}^+} u(t) &= u(t_{i+1}) \end{aligned}$$

et par construction $u(t) = u(t_i) + (t - t_i) f(t_i, u(t_i))$. D'où $u$ est bien continue au point $t_{i+1}$. Par suite $u$ est continue sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. On montre facilement que pour tout $t, s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

$$\|u(t) - u(s)\| \leq M\,|t - s|\,.$$

D'où

$$u'(t) = \begin{cases} f(t_i, u(t_i)) & \text{si } i \geq 0 \\ f(t_{i+1}, u(t_{i+1})) & \text{si } i \leq -1 \end{cases}$$

De plus $\|u(t) - u(t_i)\| \leq \delta$. On en déduit que $u$ est bien une solution $\varepsilon-$approchée de $(PC)$. $\square$

Comme conséquence on va montrer le résultat d'existence locale pour des fonctions qui sont continues.

**Théorème 5.1** (de Cauchy-Peano)**.**

*Soit $D = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et soit $f$ une fonction définie et continue sur $D$ à valeurs dans $E$. Alors pour chaque $(t_0, x_0) \in D$ il existe $\alpha > 0, r > 0$ tels que $J_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset I$, et il existe **au moins** une fonction $u \in \mathcal{C}^1(J_\alpha\,, \overline{B}(x_0, r))$ solution du problème de Cauchy :*

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in J_\alpha, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

La preuve est basée sur le théorème suivant.

**Théorème 5.2** (d'Arzela-Ascoli)**.** *(admis)*

*Soit $K$ un espace métrique compact et soit $F$ un espace de Banach. Un sous-espace $L$ de $\mathcal{C}^0(K,F)$ est relativement compact (i.e.$\overline{L}$ est compact) si et seulemnt si :*

*(i) L est équicontinue, i.e. $\forall y \in K,\ \forall \varepsilon > 0, \exists$ un voisinage $V$ de $y$ dans $K$ tels que*

$$\|g(x) - g(y)\| < \varepsilon \qquad \forall x \in V, \forall g \in L,$$

*(ii) l'ensemble $L(y) := \{g(y); g \in L\}$ est relativement compact dans $F$ pour tout $y \in K$.*

**Remarque 5.3.** *Dans le cas où $F$ est de dimension finie, le Théorème d'Arzela-Ascoli reste valable si on remplace la propriété $(ii)$ par la propriété $L(y)$ est borné pour tout $y \in K$.*

*Démonstration.* (du Théorème de Cauchy -Peano)

D'après la Proposition 5.2, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $u_n$ une solution $\frac{1}{n}-$ approchée sur $J_\alpha(t_0) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ telle que $u_n([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]) \subseteq \overline{B}(x_0, r)$ et vérifiant

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \le M\,|t - s| \quad \forall t, s \in J_\alpha(t_0).$$

Posons

$$L = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

$L$ est un sous-espace de $\mathcal{C}^0(J_\alpha(t_0), E)$. De plus d'après la relation précédente l'ensemble $L$ est équicontinue. D'autre part comme

$$\begin{aligned}\|u_n(t)\| \le \|u_n(t_0)\| + M\,|t - t_0| &\le \|x_0\| + r + \alpha\, M \\ &\le \|x_0\| + 2r \quad \forall t \in J_\alpha(t_0),\end{aligned}$$

alors $L$ est borné dans $\mathcal{C}^0(J_\alpha(t_0), E)$ et par suite d'après le théorème d'Arzela- Ascoli $L$ est relativement compact dans $\mathcal{C}^0(J_\alpha(t_0), E)$. Donc il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^0(J_\alpha(t_0), E)$ et une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n_k} \to u$ dans $\mathcal{C}^0(J_\alpha(t_0), E)$ et par suite $u_{n_k}$ converge uniformément vers $u$. Comme pour tout $t \in J_\alpha(t_0)$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| u_{n_k}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n_k}(s))ds \right\| \leq \frac{1}{n_k} |t - t_0|,$$

en faisant tendre $k$ vers $\infty$ on obtient

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \quad \forall t \in J_\alpha(t_0).$$

Ce qui termine la preuve. □

Lorsque $f$ est plus régulière on a un résultat plus précis.

**Théorème 5.4** (d'existence locale)**.**

*Soit $D = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et soit $f$ une fonction définie et continue sur $D$ à valeurs dans $E$. On suppose que $f$* ***est localement Lipschitzienne en $x$ uniformément par rapport à*** *$t$. Alors pour chaque $(t_0, x_0) \in D$ il existe $\alpha$ tel que $J_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset I$, et il existe une* ***unique*** *fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(J_\alpha, E)$ solution du problème de Cauchy :*

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in J_\alpha, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

**Remarque 5.5.** *L'intervalle $J_\alpha$ n'est pas unique ; par contre une fois $J_\alpha$ fixé, la fonction $\varphi$ est unique.*

Avant de donner la démonstration, rappelons le résultat suivant.

**Théorème 5.6** (du point fixe de Picard)**.**

*Soit $(X, d)$ un espace métrique complet et soit $f : X \to X$ une application strictement contractante, c'est à dire il existe $0 < k < 1$ tel que*

$$d(f(x),\ f(y)) \leq k\ d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

*Alors $f$ possède un unique point fixe $x$, c'est à dire il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = x$.*

*De plus pour tout $a \in X$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = a \end{cases}$ converge vers le point fixe $x$ et on a*

$$d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k}\ d(a, x_1).$$

*Démonstration.* (du Théorème 5.4)

Puisque $(t_0, x_0) \in D$ qui est un ouvert alors il existe $a > 0$ et $r > 0$ tels que $V = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, r) \subset D$. Notons par

$$M = \underset{(t,\, x) \in V}{Sup} \|f(t, x)\| .$$

$M$ existe car $f$ est continue sur le compact $V$. Comme $f$ est localement Lipschitzienne en $x$ uniformément par rapport à $t$, alors elle est Lipschitzienne par rapport à $x$ sur la boule $\overline{B}(x_0, r)$ ; de constante de Lipschitze notée $K_r$.

Posons

$$\alpha = \min(a, r/M, 1/2K_r) \text{ et } J_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

et considèrons l'espace $X = \mathcal{C}^0(J_\alpha, \overline{B}(x_0, r))$, l'ensemble des fonctions continues sur $J_\alpha$ à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r)$ muni de la distance

$$d(u, v) = \max_{t \in J_\alpha} \|u(t) - v(t)\| \text{ pour tout } u, v \in X.$$

$(X, d)$ est un espace métrique complet.

On définit sur $X$ l'application $g$ par

$$g(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \text{ pour tout } u \in X \text{ et pour tout } t \in J_\alpha.$$

Montrons que $g$ vérifie le théorème du point fixe.

**(i)** $g$ opère de $X$ dans $X$.

En effet, soit $u \in X$. Comme $f$ est continue alors $g(u)$ est bien définie et continue sur $J_\alpha$, de plus pour tout $t \in J_\alpha$ on a

$$\|g(u)(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s))\| ds \right| \leq M\, |t - t_0| \leq M\, \alpha \leq r.$$

D'où $g(u) \in X$.

**(ii)** $g$ est une contraction stricte, c'est à dire il existe $k < 1$ tel que

$$d(g(u), g(v)) < k\, d(u, v) \text{ pour tout } u, v \in X.$$

Soient $u, v \in X$ et $t \in J_\alpha$. Alors d'après le choix de $\alpha$ on a

$$\begin{aligned}\|g(u)(t) - g(v)(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|\, ds \right| \\ &\leq K_r \left| \int_{t_0}^{t} \|u_r(s) - v(s)\|\, ds \right| \\ &\leq K_r \max_{t\, \in\, J_\alpha} \|u(t) - v(t)\|\, |t - t_0| \leq K_r\, \alpha\, d(u, v) \leq \frac{1}{2} d(u, v).\end{aligned}$$

Conclusion, d'après le théorème du point fixe, la fonction $g$ admet un unique point fixe appartenant à l'espace $X$ c'est à dire il existe une unique fonction $\varphi \in X$ vérifiant

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds \text{ pour tout } t \in J_\alpha.$$

ce qui veut dire que $\varphi$ est une solution intégrale du problème $(P)$ et comme $\varphi$ est continue alors elle est solution de $(P)$. Ce qui achève la preuve du Théorème. □

**Proposition 5.4.** *Soient $D = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f$ une fonction définie et continue sur $D$ à valeurs dans $E$. On suppose que $f$ est localement Lipschitzienne en $x$ uniformément par rapport à $t$. Soit $K$ un compact de $D$, alors il existe $\varepsilon(= \varepsilon(K))$ tel que pour chaque $(t_0, x_0) \in K$ le problème*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

*admet une unique solution.*

*Démonstration.* On se donne $(t, y) \in K$. Soit $\delta(t, y) > 0$, tel que

$$J = [t_0 - \delta(t, y), t_0 + \delta(t, y)] \subset I, \text{ et } \overline{B}(y, \delta(t, y)) \subset U.$$

Comme $f$ est continue, alors elle est bornée sur le compact $J \times \overline{B}(y, \delta(t, y))$. D'où il existe $M(t, y) > 0$ tel que

$$\|f(s, z)\| \leq M(t, y) \text{ pour tout } (s, z) \in J \times \overline{B}(y, \delta(t, y)).$$

De plus comme $f$ est localement Lipschitzienne, alors elle est Lipschitzienne sur le compact $J \times \overline{B}(y, \delta(t,y))$ et par suite il existe $L(t,y) > 0$ tel que

$$\|f(s,z) - f(s,u)\| \leq L(t,y)\,\|z-u\| \text{ pour tout } (s,z,u) \in J \times \overline{B}(y,\delta(t,y)) \times \overline{B}(y,\delta(t,y)).$$

Posons

$$V(t,y) = \left]t - \frac{1}{2}\delta(t,y), t + \frac{1}{2}\delta(t,y)\right[ \times B(y, \frac{1}{2}\delta(t,y)).$$

Alors $(V(t,y))_{(t,y)\in K}$ est un recouvrement de $K$ par des parties ouvertes ; d'après le théorème de Borel-Lebesgue, il existe donc un nombre fini de points $((t_1,y_1),...,(t_n,y_n))$ de $K$ tels que : $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i,y_i)$. Comme $(t_0,y_0), \in K$ alors Il existe $i \in \{1,...,n\}$ tel que $(t_0,y_0) \in V(t_i,y_i)$.

Considérons maintenant

$$\overline{M} = \max_{1\leq i \leq n} M(t_i,y_i), \overline{K} = \max_{1\leq i \leq n} L(t_i,y_i),$$

$$\overline{\delta} = \frac{1}{2}\min_{1\leq i\leq n} \delta(t_i,y_i), \quad \varepsilon = \min(\overline{\delta}, \frac{\overline{\delta}}{\overline{M}}, \frac{1}{2\,\overline{L}}).$$

Alors

$$\left[t_0 - \overline{\delta}, t_0 + \overline{\delta}\right] \subset [t_i - \delta(t_i,y_i), t_i + \delta(t_i,y_i)]\,,\ \overline{B}(y_0,\overline{\delta}) \subset \overline{B}(y_i,\delta(t_i,y_i)).$$

Donc

$$\|f(t,y)\| \leq \overline{M} \text{ pour tout } |t-t_0| \leq \overline{\delta} \text{ et } \|y-y_0\| \leq \overline{\delta},$$

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq \overline{L}\ \|y-z\| \text{ pour tout } |t-t_0| \leq \overline{\delta},\ \|y-y_0\| \leq \overline{\delta} \text{ et } \|z-y_0\| \leq \overline{\delta}.$$

Par suite on peut appliquer la démonstration du Théorème 5.4 précédent pour déduire l'existence d'une solution unique définie sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. □

# 6 Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Le Théorème 5.4 de la section précédente nous assure qu'il existe un intervalle $J \subset I$ sur lequel le problème $(PC)$ admet une solution unique . La question suivante se pose alors : Quand-est ce que $J = I$?

On donnera des conditions suffisantes pour assurer que $J = I$.

On commence par un cas particulier.

**Théorème 6.1.** *Soit $I$ **un intervalle de** $\mathbb{R}$ et Soit $A$ une fonction définie et continue sur $I$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E, E)$, l'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $E$. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$ il existe une unique fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telle que*

$$\begin{cases} \varphi'(t) = A(t)(\varphi(t)) & \forall t \in I, \\ \varphi(t_0) = x_0. \end{cases}$$

**Remarque 6.2.**

***(i)*** *$I$ peut être un intervalle fermé.*

***(ii)*** *Ici la fonction $f$ est définie par $f(t, x) = A(t)(x)$ pour tout $(t, x) \in I \times E$. Comme $A$ est continue sur $I$ et de plus $A(t)$ est linéaire et continue de $E$ dans $E$, alors $f$ est continue en $(t, x)$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à $x$ en particulier elle est localement Lipschitzienne par rapport à $x$ uniformément en $t$.*

Pour la démonstration, on va utiliser une autre version du Théorème du point fixe.

**Théorème 6.3** (du point fixe)**.**

*Soit $(X, d)$ un espace métrique complet non vide et soit $f : X \to X$ une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{\,n}(= fof..of)$ est $k_n-$Lipschitzienne, c'est à dire*

$$d(\,f^{\,n}(x),\ f^{\,n}(y)) \leq k_n\, d(x, y) \quad \textit{pour tout } x, y \in X.$$

*Si la série numérique $\sum_{n\geq 0} k_n$ est convergente alors $f$ admet un point fixe et un seul c'est à dire il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = x$.*

*De plus pour tout $a \in X$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = a \end{cases}$ converge vers le point fixe $x$ et on a*

$$d(x, x_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} k_n\, d(a, x_1).$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que $\varphi$ existe sur tout compact de $I$ contenant $t_0$. Soit alors $K$ un compact inclus dans $I$ et soit

$$M = \sup_{t \in K} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(E,E)} .$$

On note par $X = \mathcal{C}^0(K, E)$ muni de la norme de la convergence uniforme, puis on considère la fonction $g$ définie par

$$g(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)(u(s))ds \text{ pour tout } u \in X \text{ et pour tout } t \in K.$$

Evidemment $g$ opère de $X$ dans $X$. De plus pour tous $u, v \in X$ et pour tout $t \in K$ on a

$$\|g(u)(t) - g(v)(t)\| \leq M\,|t - t_0|\,\|u - v\|_X \ .$$

Si on pose $|K| = \sup K - \inf K$, on montre par récurrence que

$$\|g^n(u) - g^n(v)\|_E \leq M^n \frac{|K|^n}{n!} \|u - v\|_X \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Comme la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} M^n \frac{|K|^n}{n!}$ est convergente, alors $g$ admet un point fixe unique sur $K$. Ceci a lieu pour tout compact $K \subset I$. D'où la solution $\varphi$ existe sur tout l'intervalle $I$. Ce qui termine la preuve. □

**Théorème 6.4** (de Cauchy-Lipschitz : Existence des solutions maximales)**.**

*Soit $D = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et soit $f$ une fonction définie et continue sur $D$ à valeurs dans $E$.*

*On suppose que $f$ est localement Lipschitzienne en $x$ uniformément en $t$. Alors pour chaque $(t_0, x_0) \in D$ il existe une unique fonction $\varphi$ définie sur un plus grand intervalle ouvert $J = ]\alpha, \beta[$ contenant $t_0$ qui est solution du problème de Cauchy :*

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in J, \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

*$\varphi$ est dite solution maximale de $(P)$ et $J$ est appelé intervalle maximal d'existence.*

*Démonstration.* D'après le théorème de l'existence locale il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $J_{\varepsilon_0} = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \subset I$ et il existe une unique solution $\varphi$ du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t) \quad \forall t \in J_{\varepsilon_0} \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

De nouveau il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $J_{\varepsilon_0,\varepsilon_1} = [t_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1] \subset I$ et il existe une unique solution $\phi$ du problème

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in J_{\varepsilon_0,\varepsilon_1} \\ x(t_0 + \varepsilon_0) = \varphi(t_0 + \varepsilon_0) \end{cases}$$

D'après la propriété de l'unicité on a $\varphi = \phi$ sur $J_{\varepsilon_0} \cap J_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}$. Posons maintenant

$$u = \begin{cases} \varphi \ \text{ sur } \ J_{\varepsilon_0} \\ \phi \ \text{ sur } J_{\varepsilon_0,\varepsilon_1} \end{cases}$$

La fonction $u$ ainsi définie est un prolongement de $\varphi$ et de plus c'est une solution du problème $(P)$ sur $J_{\varepsilon_0} \cup J_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}$. De la même façon on prolonge $\varphi$ à partir de la borne $t_0 - \varepsilon_0$.

Posons maintenant

$$t^+ = t^+(t_0, x_0) = \sup \{\beta \in I; \ (P) \ \text{admet une solution sur } [t_0, \beta]\},$$

et

$$t^- = t^-(t_0, x_0) = \inf \{\alpha \in I; (P) \ \text{admet une solution sur } [\alpha, t_0]\}.$$

D'après le théorème de l'existence locale, il existe une unique fonction $x(t) := x(t, t_0, x_0)$ solution du problème $(P)$ sur un plus grand intervalle $J(t_0, x_0)$. Nécessairement $J(t_0, x_0)$ est ouvert et plus exactement $J(t_0, x_0) = ]t^-, t^+[$ en dehors duquel $x(t)$ ne peut pas être prolongeable, si non on peut étendre $x$ au-delà soit de $t^-$ soit de $t^+$. □

**Remarque 6.5.** *si $I = \mathbb{R}$, on peut bien avoir $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$.*

**Théorème 6.6.** *Soit $D = ]a, b[ \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, soit $f$ une fonction définie et continue sur $D$ à valeurs dans $E$ et soit $(t_0, x_0) \in D$. On suppose que $f$ est localement Lipschitzienne en $x$. Soit $(\varphi, ]\alpha, \beta[)$ la solution maximale du problème $(P)$ de Cauchy. Alors on a l'alternative suivante :*

*$(i)$ Soit $\beta = b$,*

*$(ii)$ Soit $\beta < b$ et pour tout compact $K \subset U$ il existe $t < \beta$ tel que $\varphi(t) \notin K$.*

*On a le même résulat pour la borne $a$.*

*Démonstration.* Elle va se faire par l'absurde. Pour cela on suppose que $\beta < b$ et qu'il existe un compact $K \subset U$ tel que $\varphi(t) \in K$ pour tout $t \in ]t_0, \beta[$ . Alors, comme la fonction $f$ est continue sur $D$,

$$\underset{[t_0,\beta]\times K}{Sup} \|f(s,u)\|_E := M \text{ existe.}$$

Soit $(t_n)_{n\in N^*}$ une suite d'éléments de l'intervalle $]t_0, \beta[$ convergente vers $\beta$ ( par exemple on peut la prendre croissante). Comme $\varphi$ est une solution intégrale, alors pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$\varphi(t_n) = x_0 + \int_{t_0}^{t_n} f(s, \varphi(s))ds,$$

et

$$\varphi(t_m) = x_0 + \int_{t_0}^{t_m} f(s, \varphi(s))ds.$$

D'où en faisant la différence on obtient

$$\|\varphi(t_m) - \varphi(t_n)\| \leq \left| \int_{t_n}^{t_m} \|f(s, \varphi(s))\| \, ds \right| \leq M \left| t_m - t_n \right| .$$

On en déduit alors que la suite $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc elle est convergente. Soit $y_0 = \underset{n\to\infty}{lim} \varphi(t_n) \in K \subset U$. D'où $(\beta, y_0) \in D$. Considérons maintenant le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(\beta) = y_0 \end{cases}$$

D'après le théorème de l'existence locale, ce problème admet une solution qui prolonge $\varphi$ au-delà de $\beta$, ce qui contredit le fait que $]\alpha, \beta[$ est l'intervalle maximal d'existence. □

**Remarque 6.7.** *D'après le Théorème précédent, on a*

***(i)*** *Si l'ouvert $U$ est borné, alors le point $(t, \varphi(t))$ converge vers la frontière de l'ouvert $]a, b[ \times U$ quand $t$ tend vers $\beta$.*

***(ii)*** *Si $D = \mathbb{R} \times U$ et si la solution $\varphi$ ne peut pas être prolongée à droite de $\beta$ ( d'où nécessairement $\beta$ est fini), alors il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $\beta$ telle que soit $\|\varphi(t_n)\| \to \partial U$ soit que $\|\varphi(t_n)\| \to +\infty$.*

# 7 Propriétés qualitatives des solutions

Dans ce paragraphe on démontre que les solutions dépendent continûment des données du problème ; c'est à dire de la donnée initiale et de la fonction. Plus exactement on a le résultat suivant.

**Théorème 7.1.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies et continues sur un ouvert $D$ de $\mathbb{R} \times E$.*

*On suppose que $f$ est Lipschitzienne en $x$ de constante $k > 0$, uniformément par rapport à $t$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\|f(t,x) - g(t,x)\| \leq \varepsilon \qquad \textit{pour tout } (t,x) \in D.$$

*Soit $(t_0, x_0) \in D$ et soient $(\varphi, J), (\phi, J)$ deux solutions respectivement de*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in J, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

*et de*

$$\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) & \forall t \in J, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

*Alors*

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1) \quad \forall t \in J.$$

*Démonstration.* En intégrant sur $[t_0, t]$ les équations vérifiées par $\varphi$ et $\phi$ et en faisant la différence on obtient la relation suivante

$$\varphi(t) - \phi(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s)) - g(s, \phi(s))] \, ds.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \phi(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,\varphi(s)) - f(s,\phi(s))\| \, ds \right| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,\phi(s)) - g(s,\phi(s))\| \, ds \right| \\ &\leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|\varphi(s)) - \phi(s)\| \, ds \right| + \varepsilon \, |t - t_0| \, . \end{aligned}$$

Sans perdre de généralités on suppose que $t \geq t_0$. Alors

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \phi(t)\| &\leq k \int_{t_0}^{t} \|\varphi(s)) - \phi(s)\| \, ds + \varepsilon(t - t_0) \\ &= k \int_{t_0}^{t} \left\{ \|\varphi(s)) - \phi(s)\| + \frac{\varepsilon}{k} \right\} ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| + \frac{\varepsilon}{k} \leq k \int_{t_0}^{t} \left\{ \|\varphi(s)) - \phi(s)\| + \frac{\varepsilon}{k} \right\} ds + \frac{\varepsilon}{k}.$$

Pour finir on applique le Lemme de Gronwall, pour déduire le résulat voulu. □

**Corollaire 7.1.** *La solution du problème de Cauchy dépend continûment de la donnée initiale pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ; c'est à dire si* $(\varphi, J), (\phi, J)$ *sont des solutions respectivement de*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*et*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*alors pour tout* $[t_0, T] \subset J$ *(*$T$ *fini),* $\max\limits_{t \in [t_0, T]} \|\varphi(t) - \phi(t)\|$ *converge vers* $0$ *quand* $\|x_0 - y_0\| \to 0$.

# Chapitre 2

# Equations Différentielles Linéaires

## 1 Généralités

Une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre est une équation différentielle s'écrivant sous la forme suivante

$$x'(t) = A(t)(x(t)) + B(t) \qquad (E)$$

où $A$ est une fonction définie et continue sur **un intervalle** $I$ **de** $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E,E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $E$ et $B$ une fonction continue de $I$ dans $E$ (qui est un espace de Banach de dimension quelconque).

L'équation différentielle homogène associée à $(E)$ est

$$x'(t) = A(t)(x(t)). \qquad (E_H)$$

L'ensemble des solutions de $(E_H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$.

En effet la fonction nulle est bien solution et de plus si $\varphi$, $\phi$ sont deux solutions de $(E_H)$ alors $\varphi + \lambda\phi$ est aussi solution de $(E_H)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme pour le cas des équations scalaires, pour étudier $(E)$ on commence par l'étude de l'équation $(E_H)$.

## 2 Etude de l'équation homogène

Tout d'abord on a déja montré dans la section 5 du premier chapitre que pour chaque $(t_0, x_0) \in I \times E$ il existe une solution maximale $\varphi$ de $(E_H)$ définie sur tout $I$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

On se fixe $t_0$ et on fait varier $x_0$ ceci définie une fonction qu'on notera $\varphi_{x_0}$, c'est à dire $\varphi_{x_0}$ est la solution du problème :

$$(E_H C) \begin{cases} \varphi'_{x_0}(t) = A(t)(\varphi_{\ x_0}\ (t)) \text{ pour tout } t \in I. \\ \varphi_{\ x_0}(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Voici un premier résultat qui concerne la structure des solutions de l'équation homogène.

**Proposition 2.1.** *Soit $S$ l'ensemle des solutions de l'équation différentielle homogène $(E_H)$.*

*Soit $\Psi$ l'application définie sur $E$ à valeurs dans $S$ par : $\Psi(x_0) = \varphi_{x_0}$. Alors $\Psi$ est un isomorphisme de $E$ dans $S$ et ainsi si l'espace $E$ est de dimension $N$, alors $S$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$ de dimension $N$.*

*Démonstration.*

**(i)** La linéarité est évidente.

**(ii)** D'après l'unicité si deux solutions de $(E_H)$ sont différentes au point $t_0$ alors elles sont nécessairement différentes par tout sur $I$. D'où $\Psi$ est injective.

**(iii)** Soit $u$ une solution de $(E_H)$, alors elle est définie sur tout $I$ en particulier $u(t_0)$ est bien définie. Ainsi si on pose $x_0 = u(t_0)$, on a bien $\Psi(x_0) = u$; ce qui prouve que $\Psi$ est surjective.

Conséquence $\Psi$ est linéaire bijective donc c'est un isomorphisme. □

Dans ce qui suit on distingue deux cas : l'espace $E$ de dimension finie et l'espace $E$ de dimension infinie.

Commençons par le cas où $E$ est de dimension finie.

**Proposition 2.2.** *Soit $\mathcal{B} = (e_1, .., e_N)$ une base de $\mathbb{R}^N$ et $t_0 \in I$. Pour chaque $1 \leq i \leq N$, on désigne par $\varphi_i$ la* *solution du problème*

$$(H) \begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t)) & \textit{pour tout } t \in I, \\ x(t_0) = e_i. \end{cases}$$

*Alors la famille* $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ *est une base de l'ensemble des solution* $S$.

*Démonstration.*

**(i)** La famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ est libre.

Supposons que $\sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i\varphi_i = 0$ sur $I$. En particulier on aura $\sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i\varphi_i(t_0) = 0$, c'est à dire $\sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i e_i = 0$, on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq N$.

**(ii)** La famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système générateur de l'ensemble $S$.

Soit $\varphi$ une solution de l'équation homogène $(E_H)$ alors $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^N$ et comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^N$ alors il existe $\alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t_0) = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i e_i$. Or $\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i\varphi_i$ est solution de $(E_H)$ et prend au point $t_0$ la valeur $\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i e_i$ ; d'après l'unicité nécessairement $\varphi = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i\varphi_i$ sur $I$. Donc $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système générateur. Ceci termine la preuve. $\square$

**Conséquence.**

La connaissance de $N$ solutions de $(E_H)$ linéairement indépendantes permet de résoudre le problème de Cauchy associé $(E_HC)$, pour toute donnée initiale $(t_0, x_0)$.

**Définition 2.3.** *Une matrice* $\Phi(t) \in \mathcal{M}_N$ *dont les vecteurs colonnes* $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ *sont* $N$ *solutions de* $(E_H)$ *sur* $I$, *linéairement indépendants est appelée matrice fondamentale ( ou bien noyau résolvant) de* $(E_H)$.

*Par suite* $\Phi$ *vérifie l'équation*

$$(\mathcal{R}) \qquad \Phi^{'}(t) = A(t)(\Phi(t)) \quad \forall t \in I$$

*de plus le déterminant de* $\Phi(t)$ *noté* $\det(\Phi(t))$ *est non nul. D'où* $\Phi(t)$ *est inversible pour tout t dans* $I$.

Si on prend pour $B$ **la base canonique de** $\mathbb{R}^N$ on en déduit le résultat suivant.

**Proposition 2.4.** *Soit $A$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Alors pour chaque $t_0 \in I$ il existe une unique matrice fondamentale $\Phi$ vérifiant*

$$(\mathcal{RC}) \begin{cases} \Phi'(t) = A(t)(\Phi(t)) & \textit{pour tout } t \in I \\ \Phi(t_0) = Id. \end{cases}$$

Par conséquent on a la proposition suivante.

**Proposition 2.5.** *La solution $\varphi$ du problème de Cauchy*

$$(E_H C) \begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t)) & \textit{pour tout } t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*est donnée par*

$$\varphi(t) = \Phi(t)x_0 \quad \textit{pour tout } t \in I,$$

*où $\Phi$ est la solution de $(\mathcal{RC})$.*

On peut montrer que le résultat précédent reste valable même si l'espace $E$ n'est pas de dimension finie. Pour cela on introduit la définition suivante.

**Définition 2.6.** *Soit $A$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E, E)$ ( l'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $E$, qui est un Banach). Alors pour chaque $t_0 \in I$ il existe une unique $U(t, t_0) \in \mathcal{L}_c(E, E)$ solution du problème*

$$(\mathcal{RC}) \begin{cases} U'(t, t_0) = A(t)0U(t, t_0) & \textit{pour tout } t \in I \\ U(t_0, t_0) = Id. \end{cases}$$

*$U(t, t_0)$ est appelée le noyau résolvant ( ou bien la résolvante) de l'équation linéaire $(E_H)$.*

On déduit facilement la proposition suivante.

**Proposition 2.7.** *Soit $E$ un espace de Banach, $A$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E, E)$. Alors pour chaque $(t_0, x_0) \in I \times E$, la solution $\varphi$ du problème linéaire*

$$(E_H C) \begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t)) & \textit{pour tout } t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*est donnée par*

$$\varphi(t) = U(t, t_0)x_0 \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

On alors le résultat suivant.

**Proposition 2.8.** *Soient $t_0, t_1$ deux points quelconques de $I$. Alors*

$$U(t, t_0) = U(t, t_1)0U(t_1, t_0).$$

*Démonstration.* Posons $V(t) = U(t, t_1)0U(t_1, t_0)$. Alors $V(t_1) = U(t_1, t_0)$ et de plus

$$V'(t) = U'(t, t_1)0U(t_1, t_0) = A(t)U(t, t_1)0U(t_1, t_0) = A(t)V(t).$$

D'où d'après le théorème de l'unicité $V(t) = U(t, t_0)$, ce qui termine la preuve. □

**Corollaire 2.9.** *Pour tout $t_0, t_1 \in I,\ U(t_0, t_1)$ est un isomorphisme de $E$ dans $E$ et $[U(t_0, t_1)]^{-1} = U(t_1, t_0)$.*

*Démonstration.* On sait déja que $U(t_0, t_1) \in \mathcal{L}_c(E, E)$. De plus

$$Id = U(t_0, t_0) = U(t_0, t_1)0U(t_1, t_0)$$

et

$$Id = U(t_1, t_1) = U(t_1, t_0)0U(t_0, t_1).$$

D'où le résultat. □

# 3 Exponentielle de matrices

On suppose dans cette partie que $\dim E = N$. Comme $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ alors c'est une matrice carrée $N \times N$, notée $(a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq N}$ où chaque $a_{ij}(t)$ est continue. Or l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_N$ est de dimension finie (exactement $N^2$) alors toutes les normes sur $\mathcal{M}_N$ sont équivalentes. Ce pendant on choisit une norme qui posséde une propriété supplémentaire.

**Définition 3.1.** *On appelle norme d'algèbre toute norme* $\|.\|_{\mathcal{M}_N}$ *de* $\mathcal{M}_N$ *vérifiant :*

$$\|AB\|_{\mathcal{M}_N} \leq \|A\|_{\mathcal{M}_N} \|B\|_{\mathcal{M}_N} \quad \textit{pour tout } A, B \in \mathcal{M}_N$$

*On en déduit que*

$$\|A^n\|_{\mathcal{M}_N} \leq \|A\|^n_{\mathcal{M}_N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \textit{ et } \forall A \in \mathcal{M}_N \,.$$

**Exemple 3.1.** *Les deux normes définies par*

$$\mathcal{N}(A) = N \max_{i,j} |a_{ij}|$$
$$\textit{et } \mathcal{N}(A) = \underset{v\in\mathbb{R}^N,\, v\neq 0}{Sup} \frac{\|Av\|_{\mathbb{R}^N}}{\|v\|_{\mathbb{R}^N}} = \underset{\|v\|=1}{Sup} \|Av\|_{\mathbb{R}^N}$$

*sont des normes algébriques sur* $\mathcal{M}_N$ *.*

**Proposition 3.2.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_N$ *; alors la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ *est absolument convergente.*

*Démonstration.* Soit $\|.\|_{\mathcal{M}_N}$ une norme algébrique sur $\mathcal{M}_N$ , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{k=n} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Or la série numérique $\sum_{k\geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge vers $e^{\|A\|}$, donc les sommes partielles $\sum_{k=0}^{k=n} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$ sont majorées par $e^{\|A\|}$ et alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente et donc elle est convergente. □

**Définition 3.3.** *On appelle exponentielle de la matrice A, la somme de la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$*. On note*

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

**Proposition 3.4.** *Soit* $A, B \in \mathcal{M}_N$ *. Si* $AB = BA$*, alors* $e^{A+B} = e^A e^B$*.*

*Démonstration.* Comme les deux séries $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{B^n}{n!}$ sont absolument convergentes, alors leur produit l'est aussi et on a

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}\right] \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}\right] = \sum_{n\geq 0} w_n$$

où

$$w_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \, A^k B^{n-k} = \frac{1}{n!}(A+B)^n.$$

D'où

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A.$$

□

**Exemple 3.2.**

***1)*** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$. *Alors* $e^A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

*En effet, on montre que*

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n t^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n t^{2n} \end{pmatrix} \text{ et } A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^n t^{2n+1} \\ (-1)^n t^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} & \displaystyle -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.1.**

***(i)*** $e^0 = Id$ *( l'identité dans* $\mathcal{M}_N$ *).*

***(ii)*** *Pour tout* $A \in \mathcal{M}_N$ *,* $e^A$ *est inversible et on a* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ *.*

***(iii)*** *Si A est diagonalisable, elle s'écrit sous la forme* $A = P^{-1}DP$ *et alors* $e^A = P^{-1}e^D P$.

**Proposition 3.5.** *L'application* $\varphi$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathcal{M}_N$ *par* $\varphi(t) = e^{tA}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et*

$$\varphi'(t)(h) = e^{tA}.(hA) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^N \text{et pour tout } h \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Soit $t, h \in \mathbb{R}$. Alors

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = e^{tA}\left[e^{hA} - I\right] = e^{tA} \sum_{n\geq 1} \frac{h^n A^n}{n!} = e^{tA}\,.(hA) + e^{tA} \sum_{n\geq 2} \frac{h^n A^n}{n!}.$$

Comme l'application qui à $h \in \mathbb{R}$ associe $e^{tA}\,.(hA)$ est linéaire et continue et que $e^{tA} \sum_{n\geq 2} \frac{h^n A^n}{n!} = o(h)$ quand $h$ tend vers 0 alors on déduit que $\varphi$ est différentiable au point $t$ et de plus $\varphi'(t)(h) = e^{tA}.(hA)$. □

Comme conséquence, on a le résultat suivant dans le cas où $A$ est indépendante de $t$, c'est à dire où on a un equation linéaire homogène autonome.

**Théorème 3.2.** *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, indépendant de t et $(t_0, x_0)$ un point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Alors le problème de Cauchy*

$$(E_HC) \begin{cases} x'(t) = A(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*admet une unique solution qui est donnée par*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Posons $y(t) = e^{(t-t_0)A}\ x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après la Proposition 3.5 la fonction $y(t)$ est dérivable et on a $y'(t) = e^{A(t-t_0)}(x_0 A) = Ae^{A(t-t_0)}(x_0) = A(y(t))$ et de plus $y(t_0) = x_0$. Donc $y$ est bien solution de $(E_HC)$. Or $(E_HC)$ admet une seule solution, d'où le résulat voulu. □

**Remarque 3.3.** *Si $A(t) = A$ indépendante de $t$, alors la matrice fondamentale $\Phi$ vérifiant*

$$(\mathcal{RC}) \begin{cases} \Phi'(t) = A(t)(\Phi(t)) & \textit{pour tout } t \in I \\ \Phi(t_0) = Id. \end{cases}$$

*est $\Phi(t) = e^{(t-t_0)A}$.*

*Dans le cas général on a*

$$\Phi(t) = \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} A(s)ds \right\}.$$

# 4 Etude de l'équation non homogène

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'équation différentielle avec second membre :

$$x'(t) = A(t)(x(t)) + B(t) \qquad (E)$$

**Théorème 4.1.** *Soit $E$ un espace de Banach, $A$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E, E)$ et $B$ une fonction continue de $I$ dans $E$. Alors pour $(t_0, x_0) \in I \times E$ , le problème de Cauchy*

$$(EC) \begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t)) + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*admet une unique solution maximale $\varphi$ définie sur $I$ tout entier donnée par*

$$\varphi(t) = U(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,t_0)U^{-1}(s,t_0)B(s)\,ds \ \text{ pour tout } t \in I$$

*où $U(.,t_0)$ est le noyau résolvant.*

*Si $E$ est de dimension finie , $U = \Phi$ la matrice fondamentale.*

*Démonstration.* Elle se fait en deux étapes.

Etape1. **Unicité**

Soient $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux solutions de $(EC)$. Alors la fonction $u := \varphi_1 - \varphi_2$ vérifie

$$(E_HC)\begin{cases} u'(t) = A(t)(u(t)) \ \text{ pour tout } t \in I, \\ u(t_0) = 0. \end{cases}$$

D'où nécessairement $\varphi_1 = \varphi_2$ sur $I$.

Etape 2. **Existence.**

Soit $t \in I$ et posons

$$y(t) = U(t,t_0)x_0 + U(t,t_0)\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s,t_0)(s)B(s)\,ds.$$

Tout d'abord $y(t_0) = U(t_0,t_0)x_0 = x_0$. D'autre part comme $B$ est continue et la fonction qui à $s \to U^{-1}(s,t_0)$ est continue, alors $y$ est différentiable et pour tout $t$ dans $I$ on a

$$\begin{aligned} y'(t) &= U'(t,t_0)x_0 + U'(t,t_0)\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s,t_0)B(s)\,ds \ + U(t,t_0)U^{-1}(t,t_0)B(t) \\ &= A(t)U(t,t_0)x_0 + A(t)U(t,t_0)\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s,t_0)B(s)\,ds \ + B(t) \\ &= A(t)\left\{U(t,t_0)x_0 + U(t,t_0)\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s,t_0)B(s)\,ds\right\} + B(t) \\ &= A(t)(y(t)) + B(t). \end{aligned}$$

Donc $y$ est solution de $(EC)$ et comme il y a unicité, alors c'est exactement la solution. $\square$

**Exemple 4.1.** *Résoudre le système d'équations différentielles suivant :*

$$(S)\begin{cases} x'(t) = & 3x(t) + y(t) + \sin t \\ y'(t) = & -x(t) + y(t) - \sin t \\ x(0) = & y(0) = 1 \end{cases}$$

*On pose* $X(t) = (x(t), y(t))^T$ *. Alors*

$$\begin{cases} X\,'(t) = AX(t) & +B(t) \\ X(0) = & (1,1)^T \end{cases}$$

*avec*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{et } B(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

*Donc*

$$X(t) = e^{tA}X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)ds.$$

*Or*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2I + J.$$

*Donc,* $e^{tA} = e^{2tI}e^{tJ} = e^{2t}e^{tJ} = e^{2t}(I + tJ)$ *et puis on effectue les calculs pour obtenir explicitement* $x(t)$ *et* $y(t)$*.*

**Remarque 4.2.**

***(i)*** *La méthode par laquelle on trouve la solution est une méthode de la variation de la constante : On pose* $\varphi(t) = K(t)U(t, t_0)$*, où* $K(t)$ *est une fonction inconue à determiner en reportant dans l'équation* $(E)$*.*

***(ii)*** *La solution* $\varphi(t)$ *s'écrit alors comme la somme de* $U(t, t_0)x_0$ *qui est la solution du problème homogène de Cauchy et de* $\displaystyle\int_{t_0}^{t} U(t, t_0)U^{-1}(s, t_0)B(s)\, ds$ *qui est une solution particulière de l'équation avec second membre.*

***(iii)*** *Si* $\dim E = N$*, L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire non homogène est un espace affine de dimension* $N$*.*

**Remarque 4.3.** *On peut déduire du Théorème de Cauchy -Lipschitz l'existence et l'unicité d'une solution maximale* $\varphi$ *définie sur* $I$ *tout entier, sans la calculer.*

*En effet posons*

$$f \quad : \quad I \times E \to E$$

$$(s, u) \quad \to \quad f(s, u) = A(s)(u) + B(s)$$

*$f$ est continue sur $I \times E$ car $A, B$ le sont. De plus $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à $u$ (car $\dfrac{\partial f}{\partial x}(s,u) = A(s)$ qui est continue), en particulier $f$ est localement Lipschitzienne par rapport à $x$ uniformément en $t$. Donc d'après le Théorème de Cauchy- Lipschitz $(PC)$ admet une solution maximale $\varphi$ définie sur un intervalle maximale $J \subset I$, de plus $\varphi$ est solution intégrale. Alors*

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} [A(s)(\varphi(s)) + B(s)]\, ds \ \textit{ pour tout } t \in J.$$

*D'où pour tout $t \in J$,*

$$\|\varphi(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|_{\mathcal{L}} \|\varphi(s)\|_E \ ds \right| + \max_{s \in [t_0, t]} \|B(s)\| \, |t_0 - t|$$

*et grâce au Lemme de Gronwall, on déduit que $\varphi$ est bornée sur tout compact inclus dans $I$.*

# Chapitre 3

# Notions de Stabilité

## 1 Etude d'équations différentielles linéaires autonomes

On se propose d'étudier l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' = Ay$$

où $A$ est un élément de $\mathcal{L}(E)$ indépendant de $t$.

On suppose que $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. D'après la théorie de la réduction des matrices on a la décomposition suivante :

$$E = \left( \underset{1 \leq \ i \ \leq r}{\Theta E_i} \right) \Theta \left( \underset{1 \leq \ j \ \leq s}{\Theta E\,'_j} \right)$$

ayant les propriétés suivante :

• Chaque sous-espace $E_i$ est de dimension $1$, invariant par $A$, et il existe une valeur propre réelle $\lambda_i$ telle que $Ax = \lambda_i \, x$ pour $x \in E_i$.

• Chaque sous-espace $E_j'$ est de dimension $2$, invariant par $A$; il existe $\mu_j, \overline{\mu_j}$ avec $Im\mu_j > 0$, de valeurs propres complexe conjuguées de $A$ telles que $Az = \lambda_i \, z$ pour $z \in E\,'_j$ .

En identifiant $E$ à $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$( où on note les coordonnées $(x_1, ..., x_r, z_1, ...., z_s)$), l'équation différentielle devient

$$\begin{cases} x_i' = \lambda_i x_i & 1 \leq i \leq r \\ z_j' = \mu_j z_j & 1 \leq j \leq s. \end{cases}$$

Ce qui se résout explicitement :

$$\begin{cases} x_i(t) = \exp(\lambda_i t)\, x_i(0) & 1 \leq i \leq r \\ z_j(t) = \exp(\mu_j t)\, z_j(0) & 1 \leq j \leq s \end{cases}$$

En regroupant certains sous-espaces $E_i$ et $E\,'_j$ on obtient la décomposition fondamentale de $E$ :

$$E = E^{\,-} \Theta\, E^{\,0}\, \Theta\, E^{\,+}.$$

• $E^{\,-}$ est la somme directe des sous-espaces $E_i$ et $E\,'_j$ correspondant à des valeurs propres de partie rélle strictement négative ; on l'appelle le **sous-espace stable** du champ de vecteurs et c'est exactement l'ensemble des solutions $y(t)$ telles que :

$$\lim_{t \to +\infty} \|y(t)\| = 0.$$

• $E^{\,0}$ est la somme directe des sous-espaces $E_i$ et $E\,'_j$ correspondant à des valeurs propres nulles ou imaginaires pures ; on l'appelle le **sous-espace central** du champ de vecteurs et c'est exactement l'ensemble des solutions $y(t)$ telles que :

$$\underset{t \in \mathbb{R}}{Sup} \|y(t)\| < +\infty.$$

• $E^{\,+}$ est la somme directe des sous-espaces $E_i$ et $E_j'$ correspondant à des valeurs propres de partie rélle strictement positive ; on l'appelle le **sous-espace instable** du champ de vecteurs et c'est exactement l'ensemble des solutions $y(t)$ telles que :

$$\lim_{t \to -\infty} \|y(t)\| = 0.$$

# 2 Exemple Fondamental

**Décrivons l'allure des solutions lorsque $dimE = 2$.**

On considère donc le système d'équations différentielles suivant :

$$(S) \begin{cases} x'(t) = & ax(t) + by(t) \\ y'(t) = & cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

où $a, b, c, d$ sont des réels. Donc le système s'écrit sous la forma suivante :

$$X'(t) = AX(t),$$

avec $X(t) = (x(t), y(t))^T$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

**Remarque 2.1.** *Le point* $(0, 0)$ *est solution et en plus c'est un point d'équilibre, c'est à dire*

$$x'(t) = y'(t) = 0.$$

Etudions le comportement des solutions quand $t$ tend vers l'infini. Ce comportement dépend des valeurs propres.

Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les deux valeurs propres de la matrice $A$ notons par $v_1$ le vecteur propre associé à $\lambda_1$ et $v_2$ le vecteur propre associé à $\lambda_2$, on obtient la clasification suivante.

**1- $\lambda_1$ et $\lambda_2$ réelles, non nulles et distinctes**

Les vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^2$ et la solution s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1 \exp(\lambda_1 t) v_1 + a_2 \exp(\lambda_1 t) v_2.$$

Si $x(0) = a_1 v_1$ et $y(0) = a_2 v_2$. On a donc les trois cas suivants :

**(i)** $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On a $E^- = E^0 = \{0\}$ et $E^+ = E$.

On dit que le point $(0, 0)$ est une source.

**(ii)** $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

On a $E^- = E,\ E^0 = E^+ = \{0\}$ .

On dit que le point $(0, 0)$ est un puits.

**(iii)** $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

On a $E^- = E_1,\ E^0 = \{0\}$ et $E^+ = E_2$.

On dit que le point $(0, 0)$ est un point selle.

**2- $\lambda_1$ et $\lambda_2$ complexes.**

$\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont donc distinctes et conjuguées, par exemple :

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \text{ et } \lambda_2 = \alpha - i\beta\,; \quad \beta > 0.$$

Il existe une base dans laquelle :

$$B = P^{-1}AP = \alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\exp(Bt) = \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

On a donc les trois cas suivants :

**(i)** $\alpha < 0$.

Le point (0, 0) est un puits en spirale.

**(ii)** $\alpha > 0$.

Le point (0, 0) est une source en spirale.

**(iii)** $\alpha = 0$.

Le point (0, 0) est un centre avec des ellipses qui tournent autour.

**3-** $\lambda_1$ **et** $\lambda_2$ **égaux.**

Dans ce cas $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont réels.

Soit $v_1$ un vecteur propre. Il existe une base $(v_1, v_2)$ dans laquelle on a la décomposition suivante :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par suite

$$\exp(Bt) = \exp(\lambda t) \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc les deux cas suivants :

**(i)** $\alpha = 0$.

Il existe une base de vecteurs propres où A est un multiple de l'identité si $\lambda \neq 0$.

**a)** Si $\lambda > 0$ le point $(0, 0)$ est une source en étoile.

**b)** Si $\lambda < 0$ le point $(0, 0)$ est un puits en étoile.

**c)** Si $\lambda = 0$, il y a dégénérescence totale car la matrice A est nulle et la solution est le point $(0, 0)$.

**(ii)** $\alpha \neq 0$.

On a l'influence de $exp(\lambda t)$ dans la direction du vecteur propre combinée avec un déplacement à vitesse constante $\alpha$.

**a)** Si $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$ on a encore respectivement une source ou un puits.

**b)** Si $\lambda = 0$, tous les points de la droite $k\ v_1$ sont points d'équilibre.

4- $\lambda_1$ **nul et** $\lambda_2$ **non nul.**

Dans ce cas $\lambda_2$ est réel et $v_1$ et $v_2$ forment une base de vecteurs propres. La solution est donnée par

$$y(t) = a_1 v_1 + a_2\ exp(\lambda_2 t)\ v_2.$$

Tous les points de la droite $kv_1$ sont points d'équilibre. Cette droite est une source si $\lambda_2 > 0$ et un puits si $\lambda_2 < 0$.

# 3 Stabilité des systèmes d'équations autonomes

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. On considère le problème suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} y' = f(y), \\ y(0) = y_0. \end{array} \right.$$

**Définition 3.1.** *$a$ est un point d'équilibre du système $(S)$ ( ou bien point singulier de $f$ ou bien point stationnaire du flow) si $f(a) = 0$ c'est à dire $y(t) = a$ pour tout $t$.*

Faisons le développement de Taylor de la fonction $f$ autour du point d'équilibre $a$.

$$y' = f(y) = Df(a)(y - a) + \|y - a\|\, \varepsilon(y - a),$$

avec $\varepsilon(y - a) \to 0$ quand $y \to a$.

Si on pose $z = y - a$, le problème linéarisé autour de $a$ est donné par

$$(L) \begin{cases} z' = Df(a)z, \\ z(0) = y_0 - a. \end{cases}$$

**Définition 3.2.** *$a$ est un point d'équilibre stable si pour tout voisinage $V$ de $a$ dans $U$, il existe un voisinage $W$ de $a$ dans $V$ tel que toute solution $y(t)$ avec $y_0$ dans $W$ est définie et est dans $V$ pour tout $t > 0$.*

**Définition 3.3.** *$a$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable si pour tout voisinage $V$ de $a$ dans $U$, il existe un voisinage $W$ de $a$ dans $V$ tel que toute solution $y(t)$ avec $y_0$ dans $W$ est définie et est dans $V$ pour tout $t > 0$ et de plus $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = a$.*

**Remarque 3.1.** *Un point d'équilibre asymptotiquement stable est donc un point d'équilibre stable avec en plus $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = a$.*

**Exemple 3.1.** *Pour un système linéaire d'ordre deux, un centre est un point d'équilibre stable et un puits est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

La notion de stabilité pour le système linéaire $(L)$ est reliée aux valeurs propres par le résultat suivant.

**Propriété**

**(i)** $a$ est un puits si les valeurs propres de $Df(a)$ sont toutes à partie réelle strictement négative : le point est asymptotiquement stable.

**(ii)** $a$ est une source si les valeurs propres de $Df(a)$ sont toutes à partie réelle strictement positive : le point est instable.

**(iii)** $a$ est un point selle si les valeurs propres de $Df(a)$ sont en partie à partie réelle strictement négative et en partie à partie réelle strictement positive : le point est instable.

Pour conclure on donne le résulat suivant :

**Théorème 3.2.** *Si $a$ est un point d'équilibre stable, alors aucune valeur propre de $Df(a)$ n'a de partie réelle strictement positive.*

# Chapitre 4

# Appendice

## 1 Quelques types d'équations différentielles ordinaires scalaires

Tout le long de ce paragraphe on suppose que les solutions existent et on va donner des méthodes pour les calculer.

### 1.1 Equations à variables séparées

$$f(x) + g(y)y\,' = 0 \Leftrightarrow g(y)dy = -f(x)dx.$$

On intégre les deux membres de l'égalité.

### 1.2 Equations incomplètes

Ce sont des équations où manque l'inconnue $y$ ou bien la variable $x$.

**a-** $f(x, y\,') = 0.$

Si $\dfrac{\partial f}{\partial y\,'} \neq 0$, d'après le théorème des fonctions implicites l'équation peut s'écrire sous la forme $y\,'(x) = h(x)$ qu'on intégre.

**b-** $f(y, y\,') = 0.$

On pose $y\,' = \dfrac{1}{x\,'}$. D'où l'équation devient $f(y, \dfrac{1}{x\,'}) = 0$.

On cherche $x$ en fonction de $y$ ( si on arrive à résoudre). Sinon on paramètre l'équation $f(u, v) = 0$ en posant $u = \varphi(t)$ et $v = \psi(t)$ où $\varphi$ et $\psi$ sont deux fonctions adéquates à choisir .

**Exemple 1.1.** *Résolution de l'équation*

$$y^{\,3} + y\,'^{\,3} - 3yy\,' = 0.$$

*On remplace y par $u$ et y ' par $v$. On obtient alors l'équation*

$$f(u, v) = u^3 + v^3 - 3uv = 0,$$

*et on pose $u = tv$. D'où $(t^3 + 1)v^3 - 3tv^2 = 0$.*

*Alors $v = \dfrac{3t}{1 + t^{\,3}}$ et $u = \dfrac{3t^{\,2}}{1 + t^{\,3}}$ . D'où $y(t) = \dfrac{3t^{\,2}}{1 + t^{\,3}}$.*

*Or*

$$\frac{3t}{1 + t^3} = y\,'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{1}{x\,'}$$

*et par suite*

$$\frac{1}{x\,'} = \frac{3t}{1 + t^3} \times \frac{(1 + t^3)^2}{6t - 3t^4} = \frac{1 + t^{\,3}}{2 - t^{\,3}}.$$

*D'où $x(t) = \displaystyle\int \frac{2 - t^{\,3}}{1 + t^{\,3}} dt + cte$. Puis on effectue les calculs.*

## 1.3 Equations homogènes

On dit qu'on a une équation homogène si

$$f(x, y, y') = 0 \Rightarrow f(kx, ky, y') = 0 \text{ pour tout } k.$$

Pour résoudre de telles équations on utilise la paramétrisation : soit à l'aide d'une droite soit à l'aide des polaires.

**a-** On pose $y = tx$; puis on cherche $y$ et $x$ en fonction de $t$.

Si par exemple $y\,' = f(y/x) = f(t)$,alors

$$f(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{d(tx)}{dt} \times \frac{dt}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}.$$

D'où $x\dfrac{dt}{dx} = f(t) - t$ qu'on intégre.

**b-** Passage en polaires.

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta.$$

en utilisant les expressions suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = tg\theta & y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dx} = -cotg\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 & x + yy' = r\dfrac{dr}{dx}. \end{cases}$$

## 1.4 Equations différentielles linéaires du Premier ordre

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante.

$$a(x)y' + b(x)y = c(x). \quad (E)$$

**a-** Résolution de l'équation sans second membre ( ou équation homogène).

$$a(x)y' + b(x)y = 0. \quad (E_H)$$

Sur l'ensemble des $x$ tels que $a(x) \neq 0$ l'équation $(E_H)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left[y(x)\exp(\int_{x_0}^{x} \frac{b(s)}{a(s)}ds)\right]' \exp(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(s)}{a(s)}ds) = 0$$

pour tout $x, x_0$ appartenant au domaine d'existence. D'où les solutions de l'équation de $(E_H)$ sont données par

$$y_H(x) = \lambda\exp(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(s)}{a(s)}ds),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension un.

**b-** Résolution de l'équation avec second membre.

On utilise la méthode de la variation de la constante ; pour cela on pose

$$y(x) = \lambda(x)y_0(x).$$

où $y_0$ est une solution de l'équation homogène. D'où $y\,'(x) = \lambda'(x)y_0(x)+\lambda(x){y_0}'(x)$ et par suite $\lambda'(x)a(x)y_0(x) = c(x)$ et puis on intègre pour obtenir $\lambda(x)$ et déduire l'expression des solutions de l'équation $(E)$.

## 1.5 Equation de Bernoulli

On considère l'équation de Bernoulli suivante.

$$y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^n = 0.$$

Si $y(x) \neq 0$ on pose $Z = \dfrac{1}{y^{\,n-1}}$. On obtient une équation différentielle linéaire en $Z$.

## 1.6 Equation de Riccati

On considère l'équation de Riccati suivante.

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x).$$

On sait résoudre si on connait une solution particulière notée $y_1$. En effet

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x) \\ y_1'(x) = a(x)y_1^2(x) + b(x)y_1(x) + c(x) \end{cases}$$

En faisant la différence et en posant $Z = y - y_1$ on obtient

$$Z\,'(x) = a(x)Z^{\,2}(x) + (b(x) + 2a(x)y_1(x))Z(x).$$

qui est une équation de Bernoulli en $Z$.

Si on connait deux solutions $y_1$ et $y_2$ ; on écrit les deux équations de Bernoulli associées à $y_1$ et $y_2$ ; alors on obtient une équation linéaire vérifiée par $Z = \dfrac{1}{y_1 - y_2}$.

## 1.7 Equation de Lagrange

On considère l'équation de Lagrange.

$$y(x) = xf(y') + g(y').$$

L'ensemble des points où $y'(x)$ est constante ( appelé les isoclines) sont des droites ; elles s'écrivent sous la forme : $y = xf(m) + g(m)$ ( où $m$ est un paramètre).

Pour résoudre l'équation différentielle on va chercher $x$ et $y$ en fonction de $m = y\,'$. D'où

$$y(m) = x(m)f(m) + g(m);$$

et alors

$$\frac{dy}{dx} = m = \frac{dy}{dm}\frac{dm}{dx} = (x\,'(m)f(m) + x(m)f\,'(m) + g\,'(m)) \times \frac{1}{x\,'(m)}.$$

On obtient l'équation suivante

$$x'(m)(m - f(m)) - x(m)\, f'(m) - g'(m) = 0$$

qu'on intégre selon que $m = f(m)$ ou bien $m \neq f(m)$.

## 1.8 Equation de Clairaut

Soit l'équation de Clairaut suivante.

$$y'(x) = xy'(x) + g(y'(x)).$$

Les courbes $y = mx + g(m)$ sont solutions et puis on utilise la méthode précédente.

# 2 Equations différentielles du deuxième ordre

## 2.1 Equations se ramenant au premier ordre

**i)** $F(x, y', y'') = 0$ ; on pose $Z = y'$ et alors $F(x, Z, Z\,') = 0$.

**ii)** $F(y, y', y'') = 0$ ; on pose $y' = \dfrac{1}{x'}$ d'où $y'' = -\dfrac{x''}{x'^2}$ et alors on obtient $F(y, \dfrac{1}{x'}, -\dfrac{x''}{x'^2}) = 0$ qu'on peut écrire sous la forme suivante $G(y, x'(y), x''(y)) = 0$ qui est du type précédent.

**iii)** $F(x, \dfrac{y'}{y}, \dfrac{y''}{y}) = 0$. On pose $Z = \dfrac{y'}{y}$ d'où $Z' = \dfrac{y''}{y} - Z^{\,2}$ et par suite on obtient l'équation du premier ordre suivante : $F(x, Z, Z' + Z^2) = 0$.

## 2.2 Equations linéaires du second ordre

Soit l'équation linéaire du second ordre suivante.

$$a(x)y\,'' + b(x)y\,' + c(x)y = d(x) \qquad (E)$$

$a, b$ et $c$ sont des fonctions continues. L'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 2.

**Résolution de l'équation sans second membre**

Soit l'équation sans second membre suivante.

$$a(x)y\,'' + b(x)y\,' + c(x)y = 0. \qquad (E_H)$$

Tout d'abord il faut noter que la fonction nulle est solution. Si $y\,' \neq 0$, on pose $Z = \dfrac{y\,'}{y}$, d'où on obtient

$$a(x)Z\,' + b(x)Z + a(x)Z^{\,2} + c(x) = 0$$

qui est une équation du type Riccati en $Z$; qu'on sait résoudre si on connait une solution.

• Si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions liées de $(E_H)$, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ et $\lambda y_1 + \mu y_2 = 0$.D'où $\lambda y_1' + \mu y_2' = 0$ et alors le système suivant en $\lambda$ et $\mu$

$$(S) \begin{cases} \lambda y_1 + \mu y_2 = 0 \\ \lambda y_1' + \mu y_2' = 0 \end{cases}$$

est lié. Ce qui implique qu'il n'est pas un système de Crammer ; c'est à dire que le determinant

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

qui est appelé le Wronskien est nul. Inversement si le Wronskien $W(y_1, y_2)$ est non nul alors la famille $(y_1, y_2)$ est libre et par suite c'est une base de l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre $(E_H)$.

• Si $y_1$ est une solution de $(E_H)$, on cherche les autres solutions sous la forme $y(x) = K(x)y_1(x)$. Or le Wronskien

$$W(y, y_2) = yy_1' - y'y_1 = -K\,'(x)y_1(x).$$

D'où pour que $(y_1(x), K(x)y_1(x))$ soit une base il faut que $K$ ne soit pas constante.

**Résolution de l'équation avec second membre**

On utilise la méthode de la variation des constantes : Soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions de $(E_H)$. On pose

$$y(x) = \lambda(x)y_1(x) + \mu(x)y_2(x),$$

et on impose la condition suivante

$$\lambda'(x)y_1(x) + \mu'(x)y_2(x) = 0.$$

D'où

$$y'(x) = \lambda(x)y_1'(x) + \mu(x)y_2'(x),$$

et donc $\lambda'$ et $\mu'$ sont solutions du système suivant

$$\begin{cases} \lambda'(x)y_1(x) + \mu'(x)y_2(x) & = 0 \\ \lambda'(x)a(x)y\,'_1 + \mu'(x)b(x)y_2' & = d(x). \end{cases}$$

qu'on résout.

**Cas particuliers**

**a- Equations différentielles du second ordre a coefficients constants**

• **Equations sans second membre**

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

où $a, b$ et $c$ sont des constantes réelles, avec $a \neq 0$.

On cherche les solutions sous la forme $e^{rx}$. D'où $r$ est solution de l'équation algébrique $ar^2 + br + c = 0$; dite la résolvante.

Soient $r_1$ et $r_2$ les deux solutions.

* Si $r_1 \neq r_2$ , alors $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

* Si $r_1 = r_2$ , alors $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_1 x}$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

• **Equations avec second membre particulier**

**i)** $ay'' + by' + cy = P(x)$, où $P$ est un polynôme.

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme $Q$, avec

$$\begin{array}{ll} degré(Q) = degré(P) & \text{si } c \neq 0, \\ degré(Q) = degré(P) + 1 & \text{si } c = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ degré(Q) = degré(P) + 2 \,. & \text{si } c = b = 0. \end{array}$$

**ii)** $ay'' + by' + cy = e^{rx}$ où $a, b$ et $c$ sont des constantes réelles, avec $a \neq 0$.

On cherche une solution particulière sous la forme $\lambda(x)e^{rx}$, avec

* $\lambda(x)$ est constante si $r$ n'est pas solution de la résolvante.

* $\lambda(x) = ax + b$ si $r$ est solution simple de la résolvante.

* $\lambda(x) = ax^2 + bx + c$ si $r$ est solution double de la résolvante.

**b- Equation d'Euler**

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

où $a, b$ et $c$ sont des constantes réelles, avec $a \neq 0$.

On cherche les solutions sous la forme $y = x^r$ ou bien on effectue un changement de variable, en posant $x = e^t$.

# Bibliographie


[1] H. Amann, Ordinary Differential Equations, Walter de Gruter

[2] A. Avez , Calcul Différentiel, Collection Masson.

[3] H. Cartan, Cours de calcul Différentiel, Edition Hermann.

[4] Giles Christol et Anne Cot- Charles-Michel Marle, Calcul Différentiel, Collection ellipses.

[5] B. El Mabsout, Calcul Différentiel, Exercices, Collection Masson.

[6] M.w. Hirsch and S. Smale, Differential Equations Dynamical Systems, And Linear Algebra, Academic press.

[7] Lawrence Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, Springer.

[8] H. Reinhard, Equations Différentielles, fondements et applications, Dunod, Paris 1982.

[9] C. Zuily et H. Quéffélec, Eléments d'Analyse pour l'agrégation, Masson 1995.