Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Arij BOUZELMATE

Filière: **Sciences Mathématiques et Applications (SMA)**

Plan du Cours

1. **Existence des solutions des EDO**
2. **Équations différentielles linéaires**
3. **Notions de stabilité**

1. **Définitions de base**
2. **Terminologie et réduction à l'ordre 1**
3. **Problème de Cauchy**
4. **Unicité locale**
5. **Les Théorèmes d'existence locale**
6. **Prolongement des solutions locales, solutions maximales**
7. **Propriétés qualitatives des solutions**

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Le Théorème de l'existence locale nous assure qu'il existe un intervalle $J \subset I$ sur lequel le problème (PC) admet une solution unique . La question suivante se pose alors : Quand-est ce que $J = I$?
On donnera des conditions suffisantes pour assurer que $J = I$.
On commence par un cas particulier.

Théorème 1.1

Soit I ***un intervalle de*** $\mathbb{R}$ *et Soit A une fonction définie et continue sur I à valeurs dans* $\mathcal{L}(E, E)$*, l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E. Alors pour tout* $(t_0, x_0) \in I \times E$ *il existe une unique fonction* $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$ *telle que*

$$\begin{cases} \varphi'(t) = A(t)(\varphi(t)) & \forall t \in I, \\ \varphi(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Remarque 1.1

(i) *I peut être un intervalle fermé.*

(ii) *Ici la fonction f est définie par $f(t,x) = A(t)(x)$ pour tout $(t,x) \in I \times E$. Comme A est continue sur I et de plus $A(t)$ est linéaire et continue de E dans E, alors f est continue en (t,x) et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ par rapport à x en particulier elle est localement Lipschitzienne par rapport à x uniformément en t.*

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Pour la démonstration, on va utiliser une autre version du Théorème du point fixe.

Théorème 1.2 (du point fixe)

Soit (X, d) un espace métrique complet non vide et soit $f : X \to X$ une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n (= fof..of)$ est k_n-Lipschitzienne, c'est à dire $d(f^n(x), f^n(y)) \leq k_n\, d(x, y)$ pour tout $x, y \in X$.
Si la série numérique $\sum_{n\geq 0} k_n$ est convergente alors f admet un point fixe et un seul c'est à dire il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = x$. De plus pour tout $a \in X$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = a \end{cases}$ converge vers le point fixe x et on a $d(x, x_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} k_n\, d(a, x_1)$.

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Démonstration

Il suffit de montrer que φ existe sur tout compact de I contenant t_0. Soit alors K un compact inclus dans I et soit

$$M = \sup_{t\in K} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(E,E)} .$$

On note par $X = \mathcal{C}^0(K,E)$ muni de la norme de la convergence uniforme, puis on considère la fonction g définie par

$$g(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)(u(s))ds \text{ pour tout } u \in X \text{ et pour tout } t \in K.$$

Evidemment g opère de X dans X.

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

De plus pour tous $u, v \in X$ et pour tout $t \in K$ on a

$$\|g(u)(t) - g(v)(t)\| \leq M\,|t - t_0|\,\|u - v\|_X \ .$$

Si on pose $|K| = \sup K - \inf K$, on montre par récurrence que

$$\|g^n(u) - g^n(v)\|_E \leq M^n \frac{|K|^n}{n!}\,\|u - v\|_X \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} M^n \frac{|K|^n}{n!}$ est convergente, alors g admet un point fixe unique sur K. Ceci a lieu pour tout compact $K \subset I$. D'où la solution φ existe sur tout l'intervalle I. Ce qui termine la preuve. $\square$

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.3 (Existence des solutions maximales)

Soit $D = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et soit f une fonction définie et continue sur D à valeurs dans E.
On suppose que f est localement Lipschitzienne en x uniformément en t. Alors pour chaque $(t_0, x_0) \in D$ il existe une unique fonction φ définie sur un plus grand intervalle ouvert $J =]\alpha, \beta[$ contenant t_0 qui est solution du problème de Cauchy :

$$(P)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in J, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

φ est dite solution maximale de (P) et J est appelé intervalle maximal d'existence.

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Démonstration

D'après le théorème de l'existence locale il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $J_{\varepsilon_0} = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \subset I$ et il existe une unique solution φ du problème

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t) & \forall t \in J_{\varepsilon_0} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

De nouveau il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $J_{\varepsilon_0,\varepsilon_1} = [t_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1] \subset I$ et il existe une unique solution ϕ du problème

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in J_{\varepsilon_0,\varepsilon_1} \\ x(t_0 + \varepsilon_0) = \varphi(t_0 + \varepsilon_0) \end{cases}$$

D'après la propriété de l'unicité on a $\varphi = \phi$ sur $J_{\varepsilon_0} \cap J_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}$.

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Démonstration (suite)

Posons maintenant

$$u = \begin{cases} \varphi \ \text{ sur } \ J_{\varepsilon_0} \\ \phi \ \text{ sur } J_{\varepsilon_0,\varepsilon_1} \end{cases}$$

La fonction u ainsi définie est un prolongement de φ et de plus c'est une solution du problème (P) sur $J_{\varepsilon_0} \cup J_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}$. De la même façon on prolonge φ à partir de la borne $t_0 - \varepsilon_0$.

Posons maintenant

$$t^+ = t^+(t_0, x_0) = \sup \left\{ \beta \in I; \ \ (P) \ \text{ admet une solution sur } \ [t_0, \beta] \right\},$$

et

$$t^- = t^-(t_0, x_0) = \inf \left\{ \alpha \in I; (P) \ \text{ admet une solution sur } \ [\alpha, t_0] \right\}.$$

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Démonstration (suite)

D'après le théorème de l'existence locale, il existe une unique fonction $x(t) := x(t, t_0, x_0)$ solution du problème (P) sur un plus grand intervalle $J(t_0, x_0)$. Nécessairement $J(t_0, x_0)$ est ouvert et plus exactement $J(t_0, x_0) =]t^-, t^+[$ en dehors duquel $x(t)$ ne peut pas être prolongeable, si non on peut étendre x au-delà soit de t^- soit de t^{+}. $\square$

Remarque 1.2

si $I = \mathbb{R}$, on peut bien avoir $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$.

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Théorème 1.4

Soit $D =]a, b[\times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, soit f une fonction définie et continue sur D à valeurs dans E et soit $(t_0, x_0) \in D$. On suppose que f est localement Lipschitzienne en x. Soit $(\varphi,]\alpha, \beta[)$ la solution maximale du problème (P) de Cauchy. Alors on a l'alternative suivante :
(i) Soit $\beta = b$,
(ii) Soit $\beta < b$ et pour tout compact $K \subset U$ il existe $t < \beta$ tel que $\varphi(t) \notin K$.
On a le même résulat pour la borne a.

Démonstration

Elle va se faire par l'absurde. Pour cela on suppose que $\beta < b$ et qu'il existe un compact $K \subset U$ tel que $\varphi(t) \in K$ pour tout $t \in]t_0, \beta[$. Alors, comme la fonction f est continue sur D,

$$\underset{[t_0,\beta]\times K}{Sup} \|f(s,u)\|_E := M \text{ existe.}$$

Soit $(t_n)_{n\in N^*}$ une suite d'éléments de l'intervalle $]t_0, \beta[$ convergente vers β (par exemple on peut la prendre croissante). Comme φ est une solution intégrale, alors pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$\varphi(t_n) = x_0 + \int_{t_0}^{t_n} f(s, \varphi(s))ds \quad \text{et} \quad \varphi(t_m) = x_0 + \int_{t_0}^{t_m} f(s, \varphi(s))ds.$$

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Démonstration (suite)

D'où en faisant la différence on obtient

$$\|\varphi(t_m) - \varphi(t_n)\| \leq \left| \int_{t_n}^{t_m} \|f(s, \varphi(s))\| \, ds \right| \leq M \, |t_m - t_n| \, .$$

On en déduit alors que la suite $(\varphi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc elle est convergente. Soit $y_0 = \lim_{n \to \infty} \varphi(t_n) \in K \subset U$. D'où $(\beta, y_0) \in D$. Considérons maintenant le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(\beta) = y_0 \end{cases}$$

Prolongement des Solutions locales, solutions maximales

Démonstration (suite)

D'après le théorème de l'existence locale, ce problème admet une solution qui prolonge φ au-delà de β, ce qui contredit le fait que $]\alpha, \beta[$ est l'intervalle maximal d'existence. $\square$

Remarque 1.3

D'après le Théorème précédent, on a

(i) *Si l'ouvert U est borné, alors le point $(t, \varphi(t))$ converge vers la frontière de l'ouvert $]a, b[\times U$ quand t tend vers β.*

(ii) *Si $D = \mathbb{R} \times U$ et si la solution φ ne peut pas être prolongée à droite de β (d'où nécessairement β est fini), alors il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers β telle que soit $\|\varphi(t_n)\| \to \partial U$ soit que $\|\varphi(t_n)\| \to +\infty$.*

Propriétés qualitatives des solutions

Dans ce paragraphe on démontre que les solutions dépendent continûment des données du problème ; c'est à dire de la donnée initiale et de la fonction. Plus exactement on a le résultat suivant.

Propriétés qualitatives des solutions

Théorème 2.1

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un ouvert D de $\mathbb{R} \times E$. On suppose que f est Lipschitzienne en x de constante $k > 0$, uniformément par rapport à t et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|f(t,x) - g(t,x)\| \leq \varepsilon \qquad \textit{pour tout } (t,x) \in D.$$

Soit $(t_0, x_0) \in D$ et soient $(\varphi, J), (\phi, J)$ deux solutions respectivement de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in J, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad \textit{et de} \quad \begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) & \forall t \in J, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Alors

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1) \quad \forall t \in J.$$

Démonstration

En intégrant sur $[t_0, t]$ les équations vérifiées par φ et ϕ et en faisant la différence on obtient la relation suivante

$$\varphi(t) - \phi(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s)) - g(s, \phi(s))] \, ds.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \phi(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \phi(s))\| \, ds \right| + \\ & \quad \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \phi(s)) - g(s, \phi(s))\| \, ds \right| \\ & \leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|\varphi(s)) - \phi(s)\| \, ds \right| + \varepsilon \left| t - t_0 \right|. \end{aligned}$$

Démonstration (suite)

Sans perdre de généralités on suppose que $t \geq t_0$. Alors

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \phi(t)\| &\leq k \int_{t_0}^{t} \|\varphi(s)) - \phi(s)\| \, ds + \varepsilon(t - t_0) \\ &= k \int_{t_0}^{t} \left\{ \|\varphi(s)) - \phi(s)\| + \frac{\varepsilon}{k} \right\} ds. \end{aligned}$$

D'où $\|\varphi(t) - \phi(t)\| + \dfrac{\varepsilon}{k} \leq k \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left\{ \|\varphi(s)) - \phi(s)\| + \frac{\varepsilon}{k} \right\} ds + \frac{\varepsilon}{k}$.

Pour finir on applique le Lemme de Gronwall, pour déduire le résulat voulu. $\square$

Corollaire 2.1

La solution du problème de Cauchy dépend continûment de la donnée initiale pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ; c'est à dire si $(\varphi, J), (\phi, J)$ *sont des solutions respectivement de*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = y_0 \end{cases}$$

alors pour tout $[t_0, T] \subset J$ *(T fini),* $\max_{t \in [t_0, T]} \|\varphi(t) - \phi(t)\|$ *converge vers* 0 *quand* $\|x_0 - y_0\| \to 0$.