Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Arij BOUZELMATE

Filière: **Sciences Mathématiques et Applications (SMA)**

Plan du Cours

1. **Existence des solutions des EDO**
2. **Équations différentielles linéaires**
3. **Notions de stabilité**

Équations différentielles linéaires

Généralités

Une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre est une équation différentielle s'écrivant sous la forme suivante

$$x'(t) = A(t)(x(t)) + B(t) \qquad (E)$$

où A est une fonction définie et continue sur **un intervalle** I **de** $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E,E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E et B une fonction continue de I dans E (qui est un espace de Banach de dimension quelconque).
L'équation différentielle homogène associée à (E) est

$$x'(t) = A(t)(x(t)). \qquad (E_H)$$

Équations différentielles linéaires

Généralités

L'ensemble des solutions de (E_H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$. En effet la fonction nulle est bien solution et de plus si φ, ϕ sont deux solutions de (E_H) alors $\varphi + \lambda\phi$ est aussi solution de (E_H) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme pour le cas des équations scalaires, pour étudier (E) on commence par l'étude de l'équation (E_H).

Étude de l'équation homogène

Tout d'abord on a déja montré dans la section 5 du premier chapitre que pour chaque $(t_0, x_0) \in I \times E$ il existe une solution maximale φ de (E_H) définie sur tout I telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

On se fixe t_0 et on fait varier x_0 ceci définie une fonction qu'on notera φ_{x_0}, c'est à dire φ_{x_0} est la solution du problème :

$$(E_HC) \begin{cases} \varphi'_{x_0}(t) = A(t)(\varphi_{x_0}(t)) \text{ pour tout } t \in I. \\ \varphi_{x_0}(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Voici un premier résultat qui concerne la structure des solutions de l'équation homogène.

Étude de l'équation homogène

Proposition 1.1

Soit S l'ensemle des solutions de l'équation différentielle homogène

$$x'(t) = A(t)(x(t)). \qquad (E_H)$$

Soit Ψ l'application définie sur E à valeurs dans S par : $\Psi(x_0) = \varphi_{x_0}$. *Alors Ψ est un isomorphisme de E dans S et ainsi si l'espace E est de dimension N, alors S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$ de dimension N.*

Démonstration.

(i) La linéarité est évidente.

(ii) D'après l'unicité si deux solutions de (E_H) sont différentes au point t_0 alors elles sont nécessairement différentes par tout sur I. D'où Ψ est injective.

(iii) Soit u une solution de (E_H), alors elle est définie sur tout I en particulier $u(t_0)$ est bien définie. Ainsi si on pose $x_0 = u(t_0)$, on a bien $\Psi(x_0) = u$; ce qui prouve que Ψ est surjective.

Conséquence Ψ est linéaire bijective donc c'est un isomorphisme. $\square$

Dans ce qui suit on distingue deux cas : l'espace E de dimension finie et l'espace E de dimension infinie.

E de dimension finie

Proposition 1.2

Soit $\mathcal{B} = (e_1, .., e_N)$ une base de $\mathbb{R}^N$ et $t_0 \in I$. Pour chaque $1 \leq i \leq N$, on désigne par φ_i la solution du problème

$$(H) \begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t)) & \textit{pour tout } t \in I, \\ x(t_0) = e_i. \end{cases}$$

Alors la famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ est une base de l'ensemble des solution S.

Démonstration.

(i) La famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ est libre.

Supposons que $\sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i\varphi_i = 0$ sur I. En particulier on aura $\sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i\varphi_i(t_0) = 0$, c'est à dire $\sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i e_i = 0$, on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq N$.

(ii) La famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système générateur de l'ensemble S.

Soit φ une solution de l'équation homogène (E_H) alors $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^N$ et comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^N$ alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t_0) = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i e_i$. Or $\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i\varphi_i$ est solution de (E_H) et prend au point t_0 la valeur $\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i e_i$; d'après l'unicité nécessairement $\varphi = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i\varphi_i$ sur I.

Donc $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système générateur. Ceci termine la preuve. $\square$

Conséquence.

La connaissance de N solutions de (E_H) linéairement indépendantes permet de résoudre le problème de Cauchy associé (E_HC), pour toute donnée initiale (t_0, x_0).

Définition 1.1

Une matrice $\Phi(t) \in \mathcal{M}_N$ dont les vecteurs colonnes $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ sont N solutions de (E_H) sur I, linéairement indépendants est appelée matrice fondamentale (ou bien noyau résolvant) de (E_H).
Par suite Φ vérifie l'équation

$$(\mathcal{R}) \qquad \Phi^{'}(t) = A(t)(\Phi(t)) \quad \forall t \in I$$

de plus le déterminant de $\Phi(t)$ noté $\det(\Phi(t))$ est non nul. D'où $\Phi(t)$ est inversible pour tout t dans I.

Étude de l'équation homogène

Si on prend pour B **la base canonique de** $\mathbb{R}^N$ on en déduit le résultat suivant.

Proposition 1.3

Soit A une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Alors pour chaque $t_0 \in I$ il existe une unique matrice fondamentale Φ vérifiant

$$(\mathcal{RC}) \begin{cases} \Phi'(t) = A(t)(\Phi(t)) & \textit{pour tout } t \in I \\ \Phi(t_0) = Id. \end{cases}$$

Étude de l'équation homogène

Par conséquent on a la proposition suivante.

Proposition 1.4

La solution φ du problème de Cauchy

$$(E_H C) \begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t)) & \textit{pour tout } t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est donnée par

$$\varphi(t) = \Phi(t) x_0 \quad \textit{pour tout } t \in I,$$

où Φ est la solution de $(\mathcal{RC})$.

E de dimension infinie

On peut montrer que le résultat précédent reste valable même si l'espace E n'est pas de dimension finie. Pour cela on introduit la définition suivante.

Définition 1.2

Soit A une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E, E)$ (l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E, qui est un Banach). Alors pour chaque $t_0 \in I$ il existe une unique $U(t, t_0) \in \mathcal{L}_c(E, E)$ solution du problème

$$(\mathcal{RC}) \begin{cases} U'(t, t_0) = A(t) 0 U(t, t_0) & \textit{pour tout } t \in I \\ U(t_0, t_0) = Id. \end{cases}$$

$U(t, t_0)$ est appelée le noyau résolvant (ou bien la résolvante) de l'équation linéaire (E_H).

On déduit facilement la proposition suivante.

Proposition 1.5

Soit E un espace de Banach, A une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E, E)$. Alors pour chaque $(t_0, x_0) \in I \times E$, la solution φ du problème linéaire

$$(E_H C) \begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t)) & \textit{pour tout } t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est donnée par

$$\varphi(t) = U(t, t_0) x_0 \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

On alors le résultat suivant.

Proposition 1.6

Soient t_0, t_1 deux points quelconques de I. Alors

$$U(t, t_0) = U(t, t_1)0U(t_1, t_0).$$

Démonstration.

Posons $V(t) = U(t, t_1)0U(t_1, t_0)$. Alors $V(t_1) = U(t_1, t_0)$ et de plus

$$V'(t) = U'(t, t_1)0U(t_1, t_0) = A(t)U(t, t_1)0U(t_1, t_0) = A(t)V(t).$$

D'où d'après le théorème de l'unicité $V(t) = U(t, t_0)$, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 1.1

Pour tout $t_0, t_1 \in I$, $U(t_0, t_1)$ *est un isomorphisme de* E *dans* E *et* $[U(t_0, t_1)]^{-1} = U(t_1, t_0)$.

Démonstration.

On sait déja que $U(t_0, t_1) \in \mathcal{L}_c(E, E)$. De plus

$$Id = U(t_0, t_0) = U(t_0, t_1) 0 U(t_1, t_0)$$

et

$$Id = U(t_1, t_1) = U(t_1, t_0) 0 U(t_0, t_1).$$

D'où le résultat. □