Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Arij BOUZELMATE

Filière: **Sciences Mathématiques et Applications (SMA)**

Plan du Cours

1. **Existence des solutions des EDO**
2. **Équations différentielles linéaires**
3. **Notions de stabilité**

On suppose dans cette partie que $\dim E = N$. Comme $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ alors c'est une matrice carrée $N \times N$, notée $(a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq N}$ où chaque $a_{ij}(t)$ est continue. Or l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_N$ est de dimension finie (exactement N^2) alors toutes les normes sur $\mathcal{M}_N$ sont équivalentes. Ce pendant on choisit une norme qui possède une propriété supplémentaire.

Définition 1.1

On appelle norme d'algèbre toute norme $\|.\|_{\mathcal{M}_N}$ de $\mathcal{M}_N$ vérifiant :

$$\|AB\|_{\mathcal{M}_N} \leq \|A\|_{\mathcal{M}_N} \|B\|_{\mathcal{M}_N} \quad \textit{pour tout } A, B \in \mathcal{M}_N$$

On en déduit que

$$\|A^n\|_{\mathcal{M}_N} \leq \|A\|^n_{\mathcal{M}_N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; \textit{ et } \forall A \in \mathcal{M}_N .$$

Exemple 1.1

Les deux normes définies par

$$\mathcal{N}(A) = N \max_{i,j} \left| a_{ij} \right|$$

$$et \ \mathcal{N}(A) = \underset{v \in \mathbb{R}^N, \ v \neq 0}{Sup} \frac{\|Av\|_{\mathbb{R}^N}}{\|v\|_{\mathbb{R}^N}} = \underset{\|v\|=1}{Sup} \|Av\|_{\mathbb{R}^N}$$

sont des normes algébriques sur $\mathcal{M}_N$.

Proposition 1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_N$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

Démonstration

Soit $\|.\|_{\mathcal{M}_N}$ une norme algébrique sur $\mathcal{M}_N$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{k=n} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Démonstration (suite)

Or la série numérique $\sum_{k\geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge vers $e^{\|A\|}$, donc les sommes partielles $\sum_{k=0}^{k=n} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$ sont majorées par $e^{\|A\|}$ et alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente et donc elle est convergente. $\square$

Définition 1.2

On appelle exponentielle de la matrice A, la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$. *On note*

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Proposition 1.2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_N$. *Si* $AB = BA$, *alors* $e^{A+B} = e^A e^B$.

Démonstration.

Comme les deux séries $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{B^n}{n!}$ sont absolument convergentes, alors leur produit l'est aussi et on a

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}\right] \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où

$$w_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \, A^k B^{n-k} = \frac{1}{n!}(A+B)^n.$$

D'où

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A.$$

$\square$

Exemple 1.2

1) *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$. *Alors* $e^A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

En effet, on montre que

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n t^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n t^{2n} \end{pmatrix} \text{ et } A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^n t^{2n+1} \\ (-1)^n t^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} & \displaystyle -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix}.$$

D'où $e^A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Remarque 1.1

(i) *$e^0 = Id$ (l'identité dans $\mathcal{M}_N$).*

(ii) *Pour tout $A \in \mathcal{M}_N$, e^A est inversible et on a $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.*

(iii) *Si A est diagonalisable, elle s'écrit sous la forme $A = P^{-1}DP$ et alors $e^A = P^{-1}e^D P$.*

Proposition 1.3

L'application φ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_N$ par $\varphi(t) = e^{tA}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\varphi'(t)(h) = e^{tA}.(hA) \ \ pour \ \ tout \ \ t \in \mathbb{R}^N et\ pour\ tout\ h \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

Soit $t, h \in \mathbb{R}$. Alors

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = e^{tA}\left[e^{hA} - I\right] = e^{tA}\sum_{n\geq 1}\frac{h^n A^n}{n!} = e^{tA}\,.(hA) + e^{tA}\sum_{n\geq 2}\frac{h^n A^n}{n!}.$$

Comme l'application qui à $h \in \mathbb{R}$ associe $e^{tA}\,.(hA)$ est linéaire et continue et que $e^{tA}\sum_{n\geq 2}\frac{h^n A^n}{n!} = o(h)$ quand h tend vers 0 alors on déduit que φ est différentiable au point t et de plus $\varphi'(t)(h) = e^{tA}.(hA)$. □

Comme conséquence, on a le résultat suivant dans le cas où A est indépendante de t, c'est à dire où on a un équation linéaire homogène autonome.

Théorème 1.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, indépendant de t et (t_0, x_0) un point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Alors le problème de Cauchy

$$(E_H C) \begin{cases} x'(t) = A(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution qui est donnée par

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

Posons $y(t) = e^{(t-t_0)A}\, x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
D'après la Proposition 1.3 la fonction $y(t)$ est dérivable et on a

$$y'(t) = e^{A(t-t_0)}(x_0 A) = Ae^{A(t-t_0)}(x_0) = A(y(t)).$$

De plus on a $y(t_0) = x_0$. Donc y est bien solution de $(E_H C)$. Or $(E_H C)$ admet une seule solution, d'où le résulat voulu. $\square$

Remarque 1.2

Si $A(t) = A$ *indépendante de* t, *alors la matrice fondamentale* Φ *vérifiant*

$$(\mathcal{RC}) \begin{cases} \Phi'(t) = A(t)(\Phi(t)) & \textit{pour tout } t \in I \\ \Phi(t_0) = Id. \end{cases}$$

est $\Phi(t) = e^{(t-t_0)A}$.
Dans le cas général on a

$$\Phi(t) = \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} A(s)ds \right\}.$$