Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Arij BOUZELMATE

Filière: **Sciences Mathématiques et Applications (SMA)**

Plan du Cours

1. **Existence des solutions des EDO**
2. **Équations différentielles linéaires**
3. **Notions de stabilité**

1. **Généralités**
2. **Étude de l'équation homogène**
3. **Exponentielle de matrices**
4. **Étude de l'équation non homogène**

Étude de l'équation non homogène

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'équation différentielle avec second membre : $x'(t) = A(t)(x(t)) + B(t) \qquad (E)$

Théorème 1.1

Soit E un espace de Banach, A une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E,E)$ et B une fonction continue de I dans E. Alors pour $(t_0, x_0) \in I \times E$, le problème de Cauchy

$$(EC) \begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t)) + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale φ définie sur I tout entier donnée par

$\varphi(t) = U(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,t_0)U^{-1}(s,t_0)B(s)\,ds$ *pour tout $t \in I$*

où $U(.,t_0)$ est le noyau résolvant.
Si E est de dimension finie , $U = \Phi$ la matrice fondamentale.

Démonstration

Elle se fait en deux étapes.
Etape1. **Unicité**
Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de (EC). Alors la fonction $u := \varphi_1 - \varphi_2$ vérifie

$$(E_H C) \begin{cases} u'(t) = A(t)(u(t)) \text{ pour tout } t \in I, \\ u(t_0) = 0. \end{cases}$$

D'où nécessairement $\varphi_1 = \varphi_2$ sur I.

Démonstration (suite)

Etape 2. **Existence.**
Soit $t \in I$ et posons

$$y(t) = U(t,t_0)x_0 + U(t,t_0)\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s,t_0)(s)B(s)\,ds.$$

Tout d'abord $y(t_0) = U(t_0,t_0)x_0 = x_0$. D'autre part comme B est continue et la fonction qui à $s \to U^{-1}(s,t_0)$ est continue, alors y est différentiable et pour tout t dans I on a

$$y'(t) = U'(t,t_0)x_0 + U'(t,t_0)\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s,t_0)B(s)\,ds \;+$$

$$U(t,t_0)U^{-1}(t,t_0)B(t)$$

Démonstration (suite)

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= A(t)U(t,t_0)x_0 + A(t)U(t,t_0)\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s,t_0)B(s)\,ds \; + B(t)\\
&= A(t)\left\{U(t,t_0)x_0 + U(t,t_0)\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s,t_0)B(s)\,ds\right\} + B(t)\\
&= A(t)(y(t)) + B(t).
\end{aligned}
$$

Donc y est solution de (EC) et comme il y a unicité, alors c'est exactement la solution. □

Exemple

Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rl} x'(t) = & 3x(t)+y(t)+\sin t \\ y'(t) = & -x(t)+y(t)-\sin t \\ x(0) = & y(0)=1 \end{array}\right.$$

On pose $X(t)=(x(t),y(t))^T$. Alors

$$\left\{\begin{array}{ll} X'(t)=AX(t) & +B(t) \\ X(0)= & (1,1)^T \end{array}\right.$$

avec

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t)=\begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Étude de l'équation non homogène

Exemple (suite)

Donc

$$X(t) = e^{tA}X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)ds.$$

Or

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2I + J.$$

Donc, $e^{tA} = e^{2tI}e^{tJ} = e^{2t}e^{tJ} = e^{2t}(I + tJ)$ et puis on effectue les calculs pour obtenir explicitement $x(t)$ et $y(t)$.

Remarque 1.1

(i) *La méthode par laquelle on trouve la solution est une méthode de la variation de la constante : On pose $\varphi(t) = K(t)U(t, t_0)$, où $K(t)$ est une fonction inconue à determiner en reportant dans l'équation (E).*

(ii) *La solution $\varphi(t)$ s'écrit alors comme la somme de $U(t, t_0)x_0$ qui est la solution du problème homogène de Cauchy et de $\displaystyle\int_{t_0}^{t} U(t, t_0)U^{-1}(s, t_0)B(s)\, ds$ qui est une solution particulière de l'équation avec second membre.*

(iii) *Si $\dim E = N$, L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire non homogène est un espace affine de dimension N.*

Remarque 1.2

On peut déduire du théorème de Cauchy -Lipschitz l’existence et l’unicité d’une solution maximale φ *définie sur I tout entier, sans la calculer.*
En effet posons

$$\begin{array}{rcl} f & : & I \times E \to E \\ (s,u) & \to & f(s,u) = A(s)(u) + B(s) \end{array}$$

f *est continue sur* $I \times E$ *car* A, B *le sont. De plus* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *par rapport à* u *(car* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(s,u) = A(s)$ *qui est continue), en particulier* f *est localement Lipschitzienne par rapport à* x *uniformément en* t*. Donc d’après le théorème de Cauchy- Lipschitz* (PC) *admet une solution maximale* φ *définie sur un intervalle maximale* $J \subset I$*, de plus* φ *est solution intégrale.*

Alors

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} [A(s)(\varphi(s)) + B(s)]\, ds \ \textit{ pour tout } t \in J.$$

D'où pour tout $t \in J$,

$$\|\varphi(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|_{\mathcal{L}} \, \|\varphi(s)\|_E \, ds \right| + \max_{s \in [t_0, t]} \|B(s)\| \, |t_0 - t|$$

et grâce au lemme de Gronwall, on déduit que φ *est bornée sur tout compact inclus dans* I.