Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Arij BOUZELMATE

Masters: Mathématiques Appliquées à la Finance / Mathématiques et Applications

Plan du Cours

1. **Espaces de Hilbert**
2. **Espaces** L^p
3. **Espaces de Sobolev**
4. **Formulation Variationnelle**

Espaces de Hilbert

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

On appelle forme hermitienne sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que :

(i) $\varphi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\varphi(u, w) + \beta\varphi(v, w), \quad \forall u, v, w \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$

(ii) $\varphi(u, v) = \overline{\varphi(v, u)}, \quad \forall u, v \in E.$

Remarque

$\varphi(u, u) \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in E.$

Définition

Une forme hermitienne φ est dite positive (respectivement définie positive ou bien un produit scalaire) si pour tout $u \in E$, $\varphi(u,u) \geq 0$ (respectivement pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(u,u) > 0$).

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème

Soit φ une forme hermitienne positive sur E. Alors

$$|\varphi(u,v)|^2 \leq \varphi(u,u)\,\varphi(v,v), \quad \forall u,v \in E.$$

Si de plus φ est définie positive, l'égalité a lieu si et seulement si u et v sont linéairement dépendants.

Preuve

Soient $u, v \in E$. Si $\varphi(u,v) = 0$, le théorème est évident. Supposons alors $\varphi(u,v) \neq 0$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned}0 \leq \varphi(\lambda u + \theta v, \lambda u + \theta v) &= \lambda^2 \varphi(u,u) + \lambda\overline{\theta}\varphi(u,v) + \lambda\theta\overline{\varphi(u,v)} + |\theta|^2\varphi(v,v) \\ &= \lambda^2\varphi(u,u) + 2\lambda Re\big(\overline{\theta}\,\varphi(u,v)\big) + |\theta|^2\varphi(v,v).\end{aligned}$$

En prenant $\theta = \dfrac{\varphi(u,v)}{|\varphi(u,v)|}$, on obtient

$$\lambda^2\varphi(u,u) + 2\lambda|\varphi(u,v)| + \varphi(v,v) \geq 0 \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où, il faut que

$$\Delta' = |\varphi(u,v)|^2 - \varphi(u,u)\varphi(v,v) \leq 0.$$

Ce qui est la relation voulue.

Preuve (suite)

La relation $|\varphi(u,v)|^2 = \varphi(u,u)\varphi(v,v)$ équivaut à $\Delta' = 0$, ce qui équivaut à $\lambda = -\dfrac{|\varphi(u,v)|}{\varphi(u,u)}$. Or

$$\varphi(\lambda u + \theta v, \lambda u + \theta v) = -\frac{|\varphi(u,v)|^2}{\varphi(u,u)} + \varphi(v,v) = 0.$$

Comme φ est définie positive, nécessairement $\lambda u + \theta v = 0$. Ce qui termine la preuve. $\square$

Corollaire

Soit φ une forme hermitienne positive (respectivement définie positive) sur E. Alors, l'application N définie sur E par $N(u) = \sqrt{\varphi(u,u)}$ pour tout $u \in E$ est une semi-norme (respectivement N est une norme).

Preuve

(i) $N(\lambda u) = \sqrt{\varphi(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\varphi(u,u)} = |\lambda| N(u)$.

(ii) Comme $Re\big(\varphi(u,v)\big) \leq |\varphi(u,v)| \leq N(u)N(v)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} N^2(u+v) &= \varphi(u+v, u+v) = \varphi(u,u) + \varphi(v,v) + 2Re\big(\varphi(u,v)\big) \\ &\leq N^2(u) + N^2(v) + 2N(u)N(v) = \Big(N(u) + N(v)\Big)^2. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. □

Définitions et propriétés

Définition

(*i*) *On appelle préhilbertien tout espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.*

(*ii*) *On dit que E est un espace de Hilbert si E est préhilbertien et complet.*

Remarque

(*i*) *On note le plus souvent le produit scalaire par* $(.,.)$ *et la norme par* $\|.\|$.

(*ii*) *Comme toute norme est continue alors le produit scalaire est une fonction continue par rapport à chaque variable.*

Exemple

1) *L'espace vectoriel* l^2 *des suites* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres complexes de carré sommable muni du produit scalaire* $(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$ *est un espace de Hilbert.*

2) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$*, l'espace*

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C};\ \ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^2\,dx < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire $(f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx$ *est un espace de Hilbert.*

Proposition

Soit E un espace préhilbertien.

1) *Soient* $u, v \in E$*, non nuls. Si*

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$$

alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ *tel que* $u = \lambda v$.

2) *Pour tous* $u, v \in E$*, on a*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\Big[\|u\|^2 + \|v\|^2\Big]. \qquad \textit{(Identité de parallélogramme).}$$

3) *Pour tous* $u, v \in E$*, on a*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\Big[\|u\|^2 + \|v\|^2\Big]. \qquad \textit{(Identité de la médiane).}$$

Proposition (suite)

4) Soient u, $v \in E$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a

$$(u,v) = \frac{1}{4}\Big[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\Big] = \frac{1}{2}\Big[\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\Big].$$

5) Soient u, $v \in E$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a

$$(u,v) = \frac{1}{4}\Big[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\Big\{\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2\Big\}\Big].$$

6) La norme $\|.\|$ est strictement convexe, c'est à dire

$$\forall u, v \in E,\ \forall \theta \in]0,1[,\quad \Big\|\theta u + (1-\theta)v\Big\| \leq \theta\|u\| + (1-\theta)\|v\|.$$

L'inégalité est stricte si $u \neq v$ avec $\|u\| = \|v\|$.

Preuve

Les démonstrations de 1) à 5) se font par calcul, tout en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc, on va montrer juste la stricte convexité. Pour cela on calcule

$$\left\|\theta u + (1-\theta)v\right\|^2 = \theta^2\|u\|^2 + (1-\theta)^2\|v\|^2 + 2\theta(1-\theta)Re(u,v)$$

et

$$\left(\theta\|u\| + (1-\theta)\|v\|\right)^2 = \theta^2\|u\|^2 + (1-\theta)^2\|v\|^2 + 2\theta(1-\theta)\|u\|\|v\|.$$

Soient $u \neq v$ avec $\|u\| = \|v\|$. Supposons qu'il y a égalité, alors on doit avoir

$$Re(u,v) = \|u\|\|v\|.$$

Preuve (suite)

Par suite, on aura d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|u\|\|v\| = Re(u,v) \leq |(u,v)| \leq \|u\|\|v\|.$$

D'où, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u,$ c'est à dire u et v sont colinéaires.
Or $\|u\| = \|v\|$, ce qui donne $|\lambda| = 1$.
D'autre part, on a

$$Re(u,v) = Re(u,\lambda u) = Re(\overline{\lambda})\|u\|^2.$$

D'où, on doit avoir

$$Re(\overline{\lambda})\|u\|^2 = \|u\|\,\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|^2.$$

Donc, $Re\overline{\lambda} = |\lambda| = 1 = Re\lambda$. D'où nécessairement, $\lambda = 1$. On conclut qu'il n' y a égalité que si $u = v$. $\square$

Théorèmes de projection

Définition

Soit E un espace préhilbertien et soient $u, v \in E$. On dit que u est orthogonal à v si $(u, v) = 0$.

Théorème de Pythagore

Théorème

Soit E un espace préhilbertien et soient $u, v \in E$. Si u est orthogonal à v, alors $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Proposition

L'ensemble des éléments d'un espace préhilbertien E, orthogonaux à un élément $u \in E$ est un hyperplan fermé.

Preuve

Soit $u \in E$. Posons

$$u^{\perp} = \{v \in E;\ (u, v) = 0\}.$$

Soit la fonction f définie sur E par $f(v) = (v, u)$.
f est évidemment linéaire et continue car $|f(v)| \leq \|v\| \, \|u\|$ et on a même $\|f\|_{\mathcal{L}_c(E)} = \|u\|$. D'où, $u^{\perp} = f^{-1}(0)$ qui est fermé, et ainsi $u^{\perp}$ est exactement le noyau de la forme linéaire f. $\square$

Position du problème

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et soit C un ensemble convexe non vide de E.
A tout point $x \in E$, on lui associe sa distance

$$d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

Existe t-il un élément $y \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - y\|$?
• Si $x \in C$, alors y existe et $y = x$.
• Si $x \in \overline{C} \setminus C$, $d(x, C) = 0$ et la borne inférieure n'est pas atteinte, et alors y ne peut pas exister.
D'où, il est nécessaire de supposer que C est fermé si l'on veut que y existe pour tout $x \in E$.

Remarque

Si $E = \mathbb{R}^2$ *(identifié au plan affine après le choix d'une origine O) et C est une droite passant par l'origine ; l'élément le plus proche de* $x \in \mathbb{R}^2$ *est la projection de x sur la droite C qui est unique et qu'on note par* $y = P_C(x)$*.*
En effet, d'après le théorème de Pythagore

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2 \quad \forall z \in C.$$

Dans la suite on va généraliser le résultat à un Hilbert.

Projection sur un convexe fermé

Théorème

Soit H un espace de Hilbert et soit C un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $f \in H$ il existe un unique $u \in C$ tel que

$$\|f-u\| = \inf_{v \in C} \|f-v\|.$$

De plus u est caractérisé par la propriété

$$\begin{cases} u \in C \\ Re(f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in C. \end{cases}$$

On note $u = P_C(f)$ la projection de f sur C.

Preuve

Soit $f \in H$. La démonstration va se faire en trois étapes.

(i) **Existence.**

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante, c'est à dire

$$\begin{cases} v_n \in C \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \\ d_n = \|f - v_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d = \inf_{v\in C} \|f - v\|. \end{cases}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de cauchy dans H. En effet, Soient n, $m \in \mathbb{N}$, en appliquant l'identité de la médiane avec $u = f - v_n$ et $v = f - v_m$, on obtient

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 = \frac{d_n^2 + d_m^2}{2}.$$

Puisque C est convexe, $\dfrac{v_n + v_m}{2} \in C$ et alors $\left\| f - \dfrac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d.$

Preuve (suite)

D'où

$$\left\|\frac{v_n - v_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{d_n^2 + d_m^2}{2} - d^2 \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite, $\lim\limits_{n,m\to+\infty} \|v_n - v_m\| = 0$. Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans H et par suite, il existe $u \in H$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = u$. D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in C$ qui est fermé, d'où $u \in C$ et on a $d = \|f - u\|$.

(ii) **Unicité.**

Soient $u_1,\ u_2 \in C$ tels que $u_1 \neq u_2$ et vérifiant

$$\|f - u_1\| = \|f - u_2\| = \inf_{v\in C} \|f - v\| = d.$$

Projection sur un convexe fermé

Preuve (suite)

Comme la norme de H est strictement convexe, alors

$$\left\| f - \frac{u_1 + u_2}{2} \right\| = \left\| \frac{f - u_1}{2} + \frac{f - u_2}{2} \right\| < \left\| \frac{f - u_1}{2} \right\| + \left\| \frac{f - u_2}{2} \right\| = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d.$$

Ce qui est absurde puisque $\dfrac{u_1 + u_2}{2} \in C$ et $d = \inf\limits_{v \in C} \|f - v\|$.

(iii) **Caractérisation.**

• Soit $u \in C$ tel que $\|f - u\| = \inf\limits_{v \in C} \|f - v\|$. Soit $v \in C$ et soit $\theta \in]0, 1[$.

Puisque C est convexe, alors $(1 - \theta)u + \theta v \in C$. D'où

$$\|f - u\| \leq \|f - \big((1 - \theta)u + \theta v\big)\| = \|f - u - \theta(v - u)\|,$$

et alors

$$\|f - u\|^2 \leq \|f - u\|^2 + \theta^2 \|v - u\|^2 - 2\theta Re(f - u, v - u).$$

Preuve (suite)

Par suite $2Re(f-u, v-u) \leq \theta\|v-u\|^2$. Ceci pour tout $\theta \in]0,1[$, d'où en faisant tendre θ vers 0, on obtient

$$Re(f-u, v-u) \leq 0.$$

- Inversement supposons que $u \in C$ vérifiant

$$Re(f-u, v-u) \leq 0 \qquad \forall v \in C.$$

Comme

$$\|f-v\|^2 = \|f-u-(v-u)\|^2 = \|f-u\|^2+\|v-u\|^2-2Re(f-u, v-u) \geq \|f-u\|^2,$$

alors $\|f-u\| \leq \|f-v\|$. Ceci a lieu pour tout $v \in C$. D'où

$$\|f-u\| = \inf_{v \in C} \|f-v\|. \quad \square$$

Projection sur un convexe fermé

Remarque

La projection sur un convexe fermé C *possède les propriétés immédiates suivantes.*

(i) $P_C(x) = x \Longleftrightarrow x \in C.$

(ii) $P_C^2 = P_C \circ P_C = P_C.$

Définition

Soit H *un espace de Hilbert. L'application* $A : H \to H$ *est dite monotone si*

$$Re\Big(A(x) - A(y), x - y\Big) \geq 0, \qquad \forall x, y \in H.$$

Projection sur un convexe fermé

Proposition

Soit H un espace de Hilbert et soit C un convexe fermé non vide de H.

(i) *L'application projection P_C sur C est continue sur H. C'est une contraction large et de plus elle est monotone.*

(ii) *L'application $Q = I - P_C$ vérifie les mêmes propriétés.*

Preuve

Soient $f_1, f_2 \in H$ et posons $u_1 = P_C(f_1)$ et $u_2 = P_C(f_2)$.
(i) On a pour tout $v \in C$,

$$Re(f_1 - u_1, v - u_1) \leq 0 \quad \text{et} \quad Re(f_2 - u_2, v - u_2) \leq 0.$$

En prenant respectivement $v = u_2$ dans la première inégalité et $v = u_1$ dans la deuxième et en faisant la somme, on obtient

$$Re(f_2 - u_2 - f_1 + u_1, u_1 - u_2) \leq 0;$$

c'est à dire

$$Re(f_2 - f_1, u_1 - u_2) + Re(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

Projection sur un convexe fermé

Preuve (suite)

D'où

$$0 \leq \|u_1 - u_2\|^2 \leq Re(f_2 - f_1, u_2 - u_1).$$

D'où, P_C est monotone et de plus d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \|f_2 - f_1\| \, \|u_1 - u_2\|.$$

D'où

$$\|u_1 - u_2\| = \|P_C(f_1) - P_C(f_2)\| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

Donc, P_C est une contraction large, en particulier elle est continue.

Preuve (suite)

(ii) Comme $Q = I - P_C$, alors

$$Re\Big(Q(f_1), P_C(f_2) - P_C(f_1)\Big) \leq 0 \quad \text{et} \quad Re\Big(Q(f_2), P_C(f_1) - P_C(f_2)\Big) \leq 0.$$

Donc

$$Re\Big(Q(f_1) - Q(f_2), (I - Q)(f_1) - (I - Q)(f_2)\Big) \geq 0.$$

D'où

$$Re\Big(Q(f_1) - Q(f_2), f_1 - f_2\Big) \geq \|Q(f_1) - Q(f_2)\|^2 \geq 0.$$

De la même façon que (i), on déduit la monotonie et la contraction large de $Q = I - P_C$. $\square$

Projection sur un sous espace vectoriel fermé

Théorème

Soient H un espace de Hilbert et M un sous espace vectoriel fermé de H.
Soit $f \in H$. Alors, $u = P_M(f)$ est caractérisé par la propriété

$$\begin{cases} u \in M \\ (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M; \end{cases}$$

en d'autres termes $(f - P_M(f)) \in M^{\perp}$.
On dit que $P_M(f)$ est la projection orthogonale de f sur M.

Preuve

Soient $w \in M$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, $u + \lambda(w-u) \in M$. Or M est un convexe fermé, d'où

$$Re(f-u, u+\lambda(w-u)-u) \leq 0.$$

C'est à dire

$$Re\overline{\lambda}(f-u, w-u) \leq 0.$$

En prenant $\lambda = (f-u, w-u)$, on obtient $|(f-u, w-u)| = 0$. Ceci a lieu pour tout $w \in M$. Or tout élément $v \in M$ peut s'écrire comme $v = w-u$, avec $w \in M$. D'où

$$(f-u, v) = 0 \ \ \forall v \in M,$$

c'est à dire $(f-u) \in M^{\perp}$.

(ii) Inversement, soit $u \in M$ tel que $(f-u, v) = 0 \ \ \forall v \in M$. En prenant $v = w-u$, on obtient $(f-u, w-u) = 0$, d'où

$$Re(f-u, w-u) = 0 \ \ \forall w \in M. \quad \square$$

Projection sur un sous espace vectoriel fermé

Proposition

Soient H un espace de Hilbert et M un sous espace vectoriel fermé de H.
L'application projection P_M sur M est linéaire continue de H dans H de norme ≤ 1 et égale à 1 si $M \neq \{0\}$.
De plus, $P_M^{-1}(0) = M^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé supplémentaire topologique de M dans H, c'est à dire $H = M \oplus M^{\perp}$.

Preuve

(i) La linéarité de P_M se déduit facilement de la caractérisation de la projection.
En effet, soient $f_1, f_2 \in H$, alors d'après la caractérisation de la projection sur M, on a

$$(f_1 - P_M(f_1), v) = 0 \quad \text{et} \quad (f_2 - P_M(f_2), v) = 0, \qquad \forall v \in M.$$

Ce qui implique que

$$(f_1 + f_2 - (P_M(f_1) + P_M(f_2)), v) = 0, \qquad \forall v \in M$$

Comme $P_M(f_1) + P_M(f_2) \in M$, alors $P_M(f_1 + f_2) = P_M(f_1) + P_M(f_2)$.
De la même façon, on montre que $P_M(\lambda f) = \lambda P_M(f), \quad \forall f \in H$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
D'autre part, on sait que P_M est une contraction large. Donc, $\|P_M(f)\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in H$. D'où, $\|P_M\|_{\mathcal{L}_c(H,H)} \leq 1$.

Preuve (suite)

Si $M \neq \{0\}$, en prenant $f_0 \in M\backslash\{0\}$, on a bien $P_M(f_0) = f_0$. D'où, $\|P_M\|_{\mathcal{L}_c(H,H)} = 1$.

(ii) On a

$$M = \{x \in H; \quad P_M(x) = x\},$$

et d'après la caractérisation de la projection orthogonale sur M,

$$P_M^{-1}(0) = \{x \in H;\ P_M(x) = 0\} = \{x \in H;\ x - P_M(x) = x - 0 \in M^\perp\} = M^\perp.$$

Comme P_M est continue, $P_M^{-1}(0) = M^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé.

Pour finir, il est facile de voir que $M \cap M^\perp = \{0\}$ et pour tout $f \in H$,

$$f = P_M(f) + (f - P_M(f))$$

où $P_M(f) \in M$ et $(f - P_M(f)) \in M^\perp$. D'où, $H = M \oplus M^\perp$. $\square$

Dual topologique

Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et soit $X' = \mathcal{L}_c(X, \mathbb{K})$ le dual topologique de X.
On note par $< x', x >_{X',X}$ la valeur de x' au point x pour tout $(x', x) \in X' \times X$.
On munit X' par la norme

$$\|x'\|_{X'} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{| < x', x > |}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} | < x', x > | = \sup_{\|x\|=1} | < x', x > |.$$

Puisque $\mathbb{K}$ est complet, alors X' est un espace de Banach (c'est à dire un espace vectoriel normé complet).

Remarque

D'après la définition de la norme de X', on a

$$| < x', x > | \leq \|x'\|_{X'} \|x\|_X \quad \text{pour tout } (x', x) \in X' \times X.$$

Injection canonique d'un espace préhilbertien dans son dual

Soit H un espace préhilbertien.
Soit $x \in H$. On considère l'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi_x :\ & H \to \mathbb{K} \\ & y \to \varphi_x(y) = (y, x) \end{aligned}$$

Il est clair que l'application φ_x est linéaire et continue, donc $\varphi_x \in H'$ et on a

$$\|\varphi_x\|_{H'} = \sup_{\|y\|=1} |\varphi_x(y)| \leq \|x\|_H.$$

De plus, si $x \neq 0$, on a

$$\|x\|_H = \frac{(x,x)}{\|x\|_H} \leq \sup_{y \in H\setminus\{0\}} \frac{|(y,x)|}{\|y\|_H} = \|\varphi_x\|_{H'}.$$

Donc $\|\varphi_x\|_{H'} = \|x\|_H$ pour tout $x \in H$; (si $x = 0$, le résultat est évident).
On conclut que φ_x est une isométrie.

Injection canonique d'un espace préhilbertien dans son dual

Proposition

Soit H un espace préhilbertien et soit l'application

$$\phi : \ H \to H' \\ \quad\quad x \to \varphi_x : \ H \to \mathbb{K}$$

définie pour tout $x \in H$ par

$$< \phi(x), y >_{H',H} = \varphi_x(y) = (y, x) \qquad \textit{pour tout } y \in H.$$

Alors, ϕ est antilinéaire continue et injective (c'est une isométrie). On l'appelle l'injection canonique de H dans H'.

Preuve

(i) Soient $x_1, x_2 \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\phi(\alpha x_1 + \beta x_2)(y) &= (y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \overline{(\alpha x_1 + \beta x_2, y)} \\ &= \overline{\alpha}(y, x_1) + \overline{\beta}(y, x_2) = \overline{\alpha}\phi(x_1)(y) + \overline{\beta}\phi(x_2)(y), \quad \forall y \in H.\end{aligned}$$

(ii) ϕ est continue et injective car

$$\|\phi(x)\|_{H'} = \|\varphi_x\|_{H'} = \|x\|_H \quad \forall x \in H. \quad \square$$

Convergence forte-Convergence faible

Proposition

Soit H un espace préhilbertien.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de H et soit* $x \in H$. *Alors, il y a équivalence entre les propriétés suivantes.*

(i) $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ *dans H (convergence forte), c'est à dire* $\|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ *(convergence faible) et* $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|$.

(iii) $\forall y \in H \ (x_n, y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x, y)$ *et* $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|$.

Preuve

$(i) \Rightarrow (ii)$ car l'application x' est continue et de plus

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ On a

$$(x_n, y) = < \phi(y), x_n > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < \phi(y), x > = (x, y)$$

où ϕ est l'injection canonique de H dans H'.
$(iii) \Rightarrow (i)$ On a

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2Re(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0. \quad \square$$

Théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Remarque

L'application ϕ est bijective de H dans $\phi(H) \subset H'$.

La question qui se pose maintenant, quand est ce que $\phi(H) = H'$?

Théorème de Riesz-Fréchet

Théorème

Soit H un espace de Hilbert.
Etant donné $x' \in H'$, il existe un unique $x \in H$ tel que

$$< x', y >_{H',H} = (y, x) \quad \text{pour tout } y \in H.$$

De plus, $\|x\|_H = \|x'\|_{H'}$.
Autrement dit, l'injection canonique ϕ est bijective.

Théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Preuve

Il suffit de montrer que ϕ est surjective.
Pour cela, on se donne $x' \in H'$ et on pose

$$M = (x')^{-1}(0) = \{y \in H, \ < x', y >= 0\}.$$

Comme x' est continue, alors M est un sous espace vectoriel fermé de H. Deux cas se présentent.

• Si $M = H$, alors $x' = 0$ et par suite $x = 0$.

• Si $M \neq H$. Alors, $H = M \oplus M^{\perp}$ et M est un hyperplan de codimension 1. Soit e une base de $M^{\perp}$ de norme $\|e\| = 1$. S'il existe x tel que $< x', y >=< \phi(x), y >= (y, x)$ pour tout $y \in H$, alors nécessairement, $x \in M^{\perp}$ (car $< x', z >= (z, x) = 0$ pour tout $z \in M$) et alors il existe $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ tel que $x = \lambda e$.

Théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Preuve (suite)

D'autre part, on a

$$< x', e >= (e, x) = (e, \lambda e) = \overline{\lambda}.$$

D'où, $\lambda = \overline{< x', e >}$ et alors $x = \overline{< x', e >}e$.
Inversement, soit $x = \overline{< x', e >}e$. Montrons que $< x', y >= (y, x)$ pour tout $y \in H$.
Soit $y \in H$. Alors, il existe $y_1 \in M$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = y_1 + \alpha e$. On a donc

$$\begin{aligned}(y, x) &= (y_1 + \alpha e, x) = \alpha(e, x) = \alpha(e, \overline{< x', e >}e) \\ &= \alpha < x', e >=< x', \alpha e >=< x', y_1 + \alpha e >=< x', y > . \quad \square\end{aligned}$$

Isomorphisme canonique

Remarque

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, l'application* ϕ *est un isomorphisme et une isométrie de* H *dans* H'*.*
Ce qui permet d'identifier H *à* H'*.*
D'où, $\forall x' \in H', \ \ \exists !\, x \in H$ *tel que*

$$< x', y >= (y, x) = (x, y) \qquad \forall y \in H.$$

Espace de Hilbert réflexif

Corollaire

Soit H un espace de Hilbert. Alors son dual H' est un espace de Hilbert et l'application i de H dans H'' définie pour tout $x \in H$ par

$$< (i(x), x' >_{H'',H'} = < x', x >_{H',H} \qquad \text{pour tout } x' \in H'$$

est une isométrie et un isomorphisme de H dans H''.
On dit alors que H est réflexif et donc on peut identifier H à H'' (car $i(H) = H''$) .

Preuve

Preuve. Posons pour tous $x', y' \in H'$

$$((x', y')) = (\phi^{-1}(y'), \phi^{-1}(x'))$$

où ϕ est la bijection canonique de H dans H' définie par

$$< \phi(x), y >_{H',H} = (y, x) \qquad \forall x,\, y \in H.$$

Il est facile de vérifier que $((.,.))$ est un produit scalaire sur H' et comme il est complet (car $\mathbb{K}$ est complet), alors c'est un espace de Hilbert.

Preuve (suite)

Soit ψ la bijection canonique de H' dans H'' définie par

$$< \psi(x'), y' >_{H'',H'} = ((y', x')) \qquad \forall x',\, y' \in H'.$$

Alors $\psi \circ \phi$ est linéaire continue bijective et une isométrie de H dans H''.
De plus, $\forall x \in H \ \ \forall x' \in H'$,

$$\begin{aligned} < \psi \circ \phi(x), x' > &= ((x', \phi(x))) = (x, \phi^{-1}(x')) \\ &= < \phi(\phi^{-1}(x')), x > = < x', x > = < i(x), x' > . \end{aligned}$$

D'où $\psi \circ \phi = i$. $\square$

Corollaire

Soit H un espace de Hilbert et soit A une partie de H. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) *A est totale c'est à dire le sous espace vectoriel $L(A)$ engendré par A est dense dans H.*
- (ii) *Pour tout $x' \in H'$ si x' est nulle sur A, alors x' est identiquement nulle.*
- (iii) $A^{\perp} = \{0\}$.

Preuve

La démonstration va se faire en deux étapes.
Etape 1. $(i) \iff (iii)$.
On montre d'abord que $\overline{L(A)}^{\perp} = A^{\perp}$.
On a $\overline{L(A)}^{\perp} \subset A^{\perp}$ car $A \subset L(A) \subset \overline{L(A)}$.
Soit maintenant $y \in A^{\perp}$, alors pour tout $a \in A$, $(a, y) = 0$ et donc d'après la linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable, on déduit que pour tout $a \in L(A)$, $(a, y) = 0$ et puis en utilisant la continuité par rapport à la même variable, on obtient $(a, y) = 0$ pour tout $a \in \overline{L(A)}$.
D'autre part, comme $\overline{L(A)}$ est un sous espace vectoriel fermé de H, alors

$$H = \overline{L(A)} \oplus \overline{L(A)}^{\perp} = \overline{L(A)} \oplus A^{\perp},$$

et par suite $(i) \iff (iii)$.

Preuve (suite)

Etape 2. $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$.
Supposons que $A^\perp = \{0\}$ et soit $x' \in H'$ telle que $< x', a >= 0 \;\; \forall a \in A$.
Alors ceci est équivalent à

$$< \phi \circ \phi^{-1}(x'), a >= (a, \phi^{-1}(x')) = 0 \quad \forall a \in A.$$

où ϕ est la bijection canonique de H dans H'.
D'où, $\phi^{-1}(x') \in A^\perp$ =$\{0\}$ et par suite $x' = 0$.
Inversement, supposons que (ii) est vérifiée. Soit $x \in A^\perp$, alors $(a, x) = 0 \;\; \forall a \in A$. D'où, $< \phi(x), a >= 0 \;\; \forall a \in A$.
Par suite, comme $\phi(x) \in H'$

$$< \phi(x), y >= (y, x) = 0 \quad \forall y \in H$$

En particulier , on a $(x, x) = 0$, ce qui donne $x = 0$. Par conséquent, $A^\perp = \{0\}$. $\square$

Identification d'un espace de Hilbert à son dual

Il faut noter qu'on identifie très souvent H' à H. Mais faut-il le faire systématiquement ? La réponse est non.
Avant de donner un exemple qui confirme cette réponse, on démontre le résultat suivant.

Proposition

Soient H et V deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une injection linéaire continue j de V dans H telle $j(V)$ est dense dans H. Alors, il existe une injection linéaire continue j' de H' dans V' telle que $j'(H')$ est dense dans V'.

Notation

$$V \hookrightarrow H \text{ et } \overline{V} = H \implies H' \hookrightarrow V' \text{ et } \overline{H'} = V'.$$

Preuve

On définit $j' : H' \longrightarrow V'$ par

$$< j'(x'), y >_{V',V} = < x', j(y) >_{H',H} \qquad \forall x' \in H' \ \text{ et } \ \forall y \in V.$$

(i) il est facile de voir que j' est linéaire. Montrons qu'elle est continue. On a

$$\begin{aligned} | < j'(x'), y >_{V',V} | = | < x', j(y) >_{H',H} | &\leq \|x'\|_{H'} \|j(y)\|_H \\ &\leq \|x'\|_{H'} \|j\|_{\mathcal{L}_c(V,H)} \|y\|_V. \end{aligned}$$

D'où

$$\|j'(x')\|_{V'} \leq \|j\|_{\mathcal{L}_c(V,H)} \|x'\|_{H'}.$$

Par suite j' est continue et de plus

$$\|j'\|_{\mathcal{L}_c(H',V')} \leq \|j\|_{\mathcal{L}_c(V,H)}.$$

Preuve (suite)

(ii) j' est injective. En effet, soit $x' \in H'$ tel que $j'(x') = 0$, c'est à dire

$$< j'(x'), v >_{V',V} = < x', j(v) >_{H',H} = 0 \quad \text{pour tout} \quad v \in V.$$

Or $j(V)$ est dense dans H, ce qui donne $x' = 0$.
(iii) $j'(H')$ est dense dans V'. Montrons ceci par l'absurde en supposant que $\left(j'(H')\right)^{\perp} \neq \{0\}$.
Soit $y' \in \left(j'(H')\right)^{\perp}$. Alors y' est non identiquement nulle. D'autre part, en utilisant l'isomorphisme canonique ϕ de V dans V' (car $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), on trouve que pour tout $x' \in H'$,

$$\begin{aligned} 0 = ((j'(x'), y')) = (\phi^{-1}(y'), \phi^{-1}(j'(x'))) &= < j'(x'), \phi^{-1}(y') >_{V',V} \\ &= < x', j \circ \phi^{-1}(y') >_{H',H} . \end{aligned}$$

D'où $j \circ \phi^{-1}(y') = 0$, et par suite $y' = 0$. Ce qui est absurde. $\square$

Espace pivot

Remarque

(i) *On a le schéma* $V \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow V'$ *où les injections sont continues et denses (on dit que H est l'espace pivot).*

(ii) *Tout élément* $f \in H\,(\cong H')$ *peut être identifié à un élément* $f' \in V'$ *défini pour tout* $v \in V$ *par*

$$< f', v >_{V',V} = < j' \circ \phi(f), v >_{V',V} = < \phi(f), j(v) >_{H',H} = (f, j(v))_H.$$

où ϕ *est l'isomorphisme canonique de H dans* H'.

D'où, si on considère V comme un sous espace de H et lui même un sous espace de V', *alors*

$$< f, v >_{V',V} = (f, v)_H \quad \forall f \in H \ \text{ et } \ \forall v \in V.$$

Conséquence

L'application $j' \circ \phi \circ j$ est une injection linéaire continue de V dans V' qui est à priori distincte de l'injection canonique de V dans V'. Par conséquent, on ne peut pas toujours identifier l'espace à son dual. En effet, comme $V \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow V'$, alors si on identifie V à V' on doit avoir $V = H$; ce qui est absurde. Ainsi on ne peut pas faire simultanément les deux identifications ; il faut choisir. L'habitude est de choisir l'identification $H' = H$.

Définition

Soit H un espace de Hilbert.
On appelle base Hilbertienne toute suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de H telle que

(i) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est orthonormale, c'est à dire* $(e_n, e_m) = \delta_{n,m} \quad \forall n,\ m \in \mathbb{N}^*$.

(ii) *Le sous espace vectoriel engendré par les* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est dense dans H, c'est à dire* $\overline{L\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{e_n\}\right)} = H$.

Proposition

Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une base Hilbertienne de H. Alors, tout élément* $x \in H$ *s'écrit*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\, e_n.$$

De plus

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \qquad \text{(égalité de Bessel-Parseval).}$$

Preuve

Preuve. Soit $x \in H$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on note par $x_k = P_{\{e_k\}}x$ la projection de x sur $\{e_k\}$. Alors

$$x_k = (x, e_k)\, e_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

En effet, on a $x_k = \alpha_k\, e_k$ où $\alpha_k \in \mathbb{K}$; et d'après la caractérisation de la projection sur un sous espace vectoriel fermé,

$$(x - x_k, e_k) = (x - \alpha_k\, e_k, e_k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Donc, $\alpha_k = (x, e_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Preuve (suite)

Posons $S_n x = \sum_{k=1}^{n} x_k$, alors

$$\|S_n x\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = (x_1+x_2+\cdots+x_n, x_1+x_2+\cdots+x_n) = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \ (R)$$

D'autre part, d'après la caractérisation de la projection sur un sous espace vectoriel fermé, on a

$$(x - x_k, x_k) = 0,$$

c'est à dire

$$(x, x_k) = (x_k, x_k) = \|x_k\|^2.$$

Preuve (suite)

Par sommation de $k = 1$ à n, on obtient

$$(x, S_n x) = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 = \|S_n x\|^2.$$

D'où

$$\|S_n x\| \leq \|x\|.$$

Soit $F = L\left(\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup}\{e_n\}\right)$ le sous epace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Comme F est dense dans H, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists u \in F \quad \text{tel que} \quad \|x - u\| < \varepsilon.$$

Or

$$\|S_n x - S_n u\| = \|S_n(x - u)\| \leq \|x - u\|,$$

Preuve (suite)

d'où

$$\|S_n x - x\| \leq \|S_n x - S_n u\| + \|S_n u - x\| \leq \|x - u\| + \|S_n u - x\|.$$

Or pour n assez grand, $S_n u = u$; d'où

$$\|S_n x - x\| \leq 2\|x - u\| \leq 2\varepsilon \quad \text{pour } n \text{ assez grand;}$$

c'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} S_n x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$$

et l'égalité de Bessel-Parseval se déduit facilement en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation (R). $\square$

Théorème

Toute espace de Hilbert H admet une base Hilbertienne.

Preuve

On va distinguer deux cas.
Cas 1. H est séparable.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite totale dans H. On va construire à partir de cette suite une base Hilbertienne.
En enlevant, par récurrence, les a_i qui sont combinaisons linéaires de ceux qui les précèdent, on peut supposer que la suite est formée d'éléments linéairement indépendants.
Pour orthogonaliser cette suite, on utilise le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Preuve (suite)

On définit une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$e_1 = a_1,\ \ e_2 = a_2 - P_{F_1}(a_2), \cdots, e_n = a_n - P_{F_{n-1}}(a_n)$$

où P_{F_i} est la projection orthogonale sur le sous espace vectoriel F_i engendré par $\{a_1, \cdots, a_i\}$ (F_i est complet car il est de dimension finie et donc fermé).

Raisonnons par récurrence, en supposant démontré que $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est un système orthogonal (c'est à dire $(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$) qui engendre F_n.

La relation $e_{n+1} = a_{n+1} - P_{F_n}(a_{n+1})$ montre que $e_{n+1} \neq 0$ puisque a_{n+1} n'appartient pas à F_n et de plus d'après la caractérisation de la projection orthogonale sur un sous espace vectoriel fermé, e_{n+1} est orthogonal à F_n.

Preuve (suite)

Donc, $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ est un système orthogonal et comme $a_{n+1} = e_{n+1} +$ (un vecteur de F_n), ce système engendre le même sous espace que $\{a_1, \cdots, a_{n+1}\}$, c'est à dire engendre F_{n+1}.
Donc, la suite orthogonale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est totale dans H.
Pratiquement, la détermination des éléments de la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se fait ainsi : les $e_1, \cdots, e_n$ étant déterminés, on pose

$$e_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a donc $0 = (a_{n+1}, e_i) + \lambda_i (e_i, e_i)$. D'où, $\lambda_i = -\dfrac{(a_{n+1}, e_i)}{\|e_i\|^2}$. Si l'on pose enfin $b_n = \dfrac{e_n}{\|e_n\|}$, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est évidemment orthonormale et par suite c'est une une base Hilbertienne de H.

Preuve (suite)

Cas 2. H n'est pas séparable.
On suppose que H n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit A un système orthonormal de H. On désigne par $\mathfrak{B}$ l'ensemble des systèmes orthonormaux de H qui contiennent A, qu'on ordonne par l'inclusion $\subset$. Alors $\mathfrak{B}$ n'est pas vide puisqu'il contient A.
Montrons que $(\mathfrak{B}, \subset)$ est inductif (c'est à dire admet un majorant). Soit $\{B_i\}_{i\in I}$ une partie totalement ordonnée de $(\mathfrak{B}, \subset)$.
Alors pour montrer que $\underset{i\in I}{\cup} B_i$ est un majorant, il suffit de montrer que $\underset{i\in I}{\cup} B_i$ est un système orthonormal.
En effet, soient $x, y \in \underset{i\in I}{\cup} B_i$ tels que $x \neq y$, alors, il existe $j \in I$ tel que $x, y \in B_j$ (car $\{B_i\}_{i\in I}$ est totalement ordonné). D'où, $\|x\| = \|y\| = 1$ et $(x, y) = 0$. Ainsi, on a montré que $\underset{i\in I}{\cup} B_i$ est un système orthonormal.

Preuve (suite)

D'après le lemme de Zorn qui dit que tout ensemble ordonné inductif non vide admet un élément maximal, il existe un élément maximal B de $\mathfrak{B}$. Alors, B est une base hilbertienne de H ; en effet il suffit de montrer que B est total, c'est à dire que le sous espace $L(B)$ engendré par B est dense dans H. Sinon, $B^\perp \neq \{0\}$. Soit x_0 non nul orthogonal à B. Donc, $B \cup \left\{ \dfrac{x_0}{\|x_0\|} \right\}$ est un système orthonormal qui contient strictement B. Or ceci contredit le caractère maximal de B. Donc, B est total est par suite une base Hilbertienne de H. $\square$

Remarque

Tout système orthonormal d'un espace de Hilbert est contenu dans une base Hilbertienne.