Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Arij BOUZELMATE

Masters: Mathématiques Appliquées à la Finance / Mathématiques et Applications

Espaces de Sobolev

1. **Espaces** $W^{m,p}(\Omega)$ **et** $H^m(\Omega)$
2. **Espaces** $W_0^{m,p}(\Omega)$ **et** $H_0^m(\Omega)$
3. **Inclusions de Sobolev**
4. **Trace-Dérivée normale**

Tout le long du chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$).

Définition

Soient $p \in [1, +\infty]$ *et* $m \in \mathbb{N}$.
On appelle espace de Sobolev l'ensemble

$$W^{m,p}(\Omega) = \begin{cases} \left\{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N;\ |\alpha| \leq m\right\} & si\ m \in \mathbb{N}^*, \\ L^p(\Omega) & si\ m = 0. \end{cases}$$

Si $p = 2$, *on note* $H^m(\Omega)$ *au lieu de* $W^{m,2}(\Omega)$.

Définitions et propriétés

On munit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme suivante

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Remarque

Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, alors $D^\alpha u$ est la dérivée de u au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha(x) \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On note $D^\alpha u = g_\alpha$.

Remarque

La norme de $W^{m,p}(\Omega)$ est équivalente à la norme suivante

$$\|u\|_{1,W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposition

Soient $p \in [1,+\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

avec injections continues.

Preuve

L'inclusion ensembliste est évidente. Soit maintenant $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $supp(u) \subset K$. D'où

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &\leq (mes(K))^{1/p} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq (mes(K))^{1/p} \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|,\end{aligned}$$

Par suite, l'injection de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ est continue.
D'autre part, on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

D'où la continuité de l'injection de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$. $\square$

Proposition

L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u,\, v \in H^m(\Omega).$$

Preuve

Preuve. Il est clair que la norme de $H^m(\Omega)$ provient du produit scalaire ci-dessus. Il suffit de montrer que $H^m(\Omega)$ est complet. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $H^m(\Omega)$. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(D^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pour tout $|\alpha| \leq m$) sont des suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui est complet. Alors

$$\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u & \text{dans } L^2(\Omega) \\ D^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Preuve (suite)

Or la continuité de l'injection $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ assure que $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et comme la dérivation D^α est continue de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors $D^\alpha u_n \rightharpoonup D^\alpha u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ce qui implique que $D^\alpha u = v \in L^2(\Omega)$ pour tout $|\alpha| \leq m$. D'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \qquad \text{dans } H^m(\Omega).$$

Ceci termine la preuve. □

On démontre de la même façon le résultat suivant.

Proposition

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$.

Beaucoup de propriétés de l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ peuvent être obtenues en le considérant comme un sous espace femé de l'ensemble $(L^p(\Omega))^\Gamma$ qui est le produit cartésien d'espaces $L^p(\Omega)$ avec

$$\Gamma = Card\{\alpha \in \mathbb{N}^N;\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Pour simplifier la notation on pose $L^p_\Gamma(\Omega) = (L^p(\Omega))^\Gamma$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ et on le munit de la norme suivante.

$$\|u\|_{L^p_\Gamma(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\Gamma} \|u_j\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \displaystyle\max_{1\leq j\leq\Gamma} \|u_j\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Remarque

Si Ω est borné, alors $C^m(\overline{\Omega}) \subset W^{m,p}(\Omega)$, mais $C^m(\overline{\Omega})$ n'est pas réflexif ; la raison pour laquelle lors des études des équations aux dérivées partielles on utilise $W^{m,p}(\Omega)$ au lieu de $C^m(\overline{\Omega})$.

Lemme

(i) *Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace de Banach réflexif est réflexif.*

(ii) *Tout sous ensemble d'un espace métrique séparable est séparable.*

Proposition

Soit $m \in \mathbb{N}$. *L'espace* $W^{m,p}(\Omega)$ *est*

(i) *réflexif pour* $p \in]1, +\infty[$,

(ii) *séparable pour* $p \in [1, +\infty[$.

Preuve

On considère l'opérateur P suivant

$$P : \; W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow L^p_\Gamma(\Omega)$$
$$u \longrightarrow (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m}$$

L'opérateur P est évidemment linéaire, de plus on a

$$\|P(u)\|_{L^p_\Gamma(\Omega)} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Preuve (suite)

D'où P est une isométrie et un isomorphisme de $W^{m,p}(\Omega)$ dans le sous espace vectoriel $W = P\left(W^{m,p}(\Omega)\right)$ de $L^p_\Gamma(\Omega)$.

(i) Soit $p \in]1, +\infty[$. Alors, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif et par suite $L^p_\Gamma(\Omega)$ l'est aussi. D'autre part, comme $W^{m,p}(\Omega)$ est complet et alors W est un fermé de $L^p_\Gamma(\Omega)$ qui est réflexif et alors W est aussi réflexif d'après le lemme précédent. Par conséquent, $W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(W)$ est réflexif.

(ii) Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable, c'est à dire il admet une suite dense et alors il en est de même pour $L^p_\Gamma(\Omega)$. Comme W est un sous ensemble de $L^p_\Gamma(\Omega)$ qui est séparable, alors W est aussi séparable d'après le lemme précédent. D'où, $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable.

La preuve est terminée. $\square$

L'espace dual de $L^p_\Gamma(\Omega)$

Pour caractériser le dual de $W^{m,p}(\Omega)$, on commence par déterminer le dual de $L^p_\Gamma(\Omega)$ puisque $W^{m,p}(\Omega)$ est isomorphe à W qui est un sous espace vectoriel de $L^p_\Gamma(\Omega)$.

Lemme

Soient $p \in [1, +\infty[$ et p' son exposant conjugué. Soit l'application

$$\begin{aligned} T :\ L^{p'}_\Gamma(\Omega) &\longrightarrow \left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)' \\ u &\longrightarrow\ T(u) :\ L^p_\Gamma(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

définie pour tout $u = (u_i)_{1 \leq i \leq \Gamma} \in L^{p'}_\Gamma(\Omega)$ par

$$< T(u), v >= \sum_{i=1}^{\Gamma} \int_\Omega u_i(x) v_i(x)\, dx \qquad \textit{pour tout } v = (v_i)_{1 \leq i \leq \Gamma} \in L^p_\Gamma(\Omega).$$

Alors, T est une isométrie et un isomorphisme de $L^{p'}_\Gamma(\Omega)$ dans $\left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)'$.

Donc, l'espace dual $\left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)'$ est identifié à l'espace $L^{p'}_\Gamma(\Omega)$.

Preuve

La démonstration va se faire en deux étapes.

Etape 1. T est une isométrie.

Soient $u = (u_i)_{1\leq i\leq\Gamma} \in L^{p'}_\Gamma(\Omega)$ et $v = (v_i)_{1\leq i\leq\Gamma} \in L^p_\Gamma(\Omega)$. Alors, $< T(u), v >$ est bien définie et T est évidemment linéaire. De plus, en utilisant l'inégalité de Hölder respectivement pour les fonctions et les sommes finies, on a

$$\begin{aligned} |< T(u), v >| &\leq \sum_{i=1}^{\Gamma} \|u_i\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v_i\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\Gamma} \|u_i\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=1}^{\Gamma} \|v_i\|^{p}_{L^{p}(\Omega)}\right)^{1/p} = \|u\|_{L^{p'}_\Gamma(\Omega)} \|v\|_{L^p_\Gamma(\Omega)}. \end{aligned}$$

Preuve (suite)

D'où $T(u)$ est continue et comme elle est linéaire, alors c'est un élément de $\left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)'$ et $\|T(u)\|_{\left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)'} \leq \|u\|_{L^{p'}_\Gamma(\Omega)}$.
Maintenant pour montrer que $\|u\|_{L^{p'}_\Gamma(\Omega)} \leq \|T(u)\|_{\left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)'}$, on distingue deux cas.

• Si $p \in]1, +\infty[$.
Prenons $v = (v_i)_{1 \leq i \leq \Gamma}$ avec $v_i = |u_i|^{p'-2} u_i$, alors $v \in L^p_\Gamma(\Omega)$ et

$$\|v\|_{L^p_\Gamma(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{\Gamma} \|v_i\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{\Gamma} \|u_i\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}\right)^{1/p} = \|u\|^{p'/p}_{L^{p'}_\Gamma(\Omega)}.$$

Or $\quad |< T(u), v >| = \displaystyle\sum_{i=1}^{\Gamma} \int_\Omega |u_i(x)|^{p'}\, dx = \|u\|^{p'}_{L^{p'}_\Gamma(\Omega)} = \|u\|_{L^{p'}_\Gamma(\Omega)} \|v\|_{L^p_\Gamma(\Omega)}$.
D'où, $\|u\|_{L^{p'}_\Gamma(\Omega)} \leq \|T(u)\|_{\left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)'}$.

Preuve (suite)

• Si $p = 1$.

Comme $\|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} = \max\limits_{1\le j\le\Gamma}\|u_j\|_{L^\infty(\Omega)}$, alors il existe $j_0 \in [1,\Gamma]$ tel que $\|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} = \|u_{j_0}\|_{L^\infty(\Omega)}$. D’où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $A \subset \Omega$ de mesure $|A|$ non nulle tel que

$$|u_{j_0}(x)| \ge \|u_{j_0}\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon = \|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} - \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

Posons

$$v_{j_0}(x) = \begin{cases} \dfrac{u_{j_0}(x)}{|u_{j_0}(x)|} & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et prenons $v = (0,\cdots,0,v_{j_0},0,\cdots,0)$. Alors, $v \in L^1_\Gamma(\Omega)$ et $\|v\|_{L^1_\Gamma(\Omega)} = \|v_{j_0}\|_{L^1(\Omega)} = |A|$.

Preuve (suite)

Par suite

$$< T(u), v > = \int_\Omega u_{j_0}(x) v_{j_0}(x)\, dx = \int_A |u_{j_0}(x)|\, dx$$
$$\geq \left(\|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} - \varepsilon \right) |A| = \left(\|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} - \varepsilon \right) \|v\|_{L^1_\Gamma(\Omega)}.$$

Ceci a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$< T(u), v > \geq \|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} \|v\|_{L^1_\Gamma(\Omega)}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} \leq \|T(u)\|_{\left(L^1_\Gamma(\Omega)\right)'}.$$

Il résulte que $\|T(u)\|_{\left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)'} = \|u\|_{L^{p'}_\Gamma(\Omega)}$ $\forall p \in [1, +\infty[$; c'est à dire que T est une isométrie.

Preuve (suite)

Etape 2. T est surjective.

Soit $f \in \left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)'$. Alors, pour tout $i \in [1, \Gamma]$, l'application définie sur $L^p(\Omega)$ par $v_i \longrightarrow < f, (0, \cdots, 0, v_i, 0, \cdots, 0) >$ est linéaire continue sur $L^p(\Omega)$, c'est à dire un élément de $(L^p(\Omega))'$. D'où, il existe $u_i \in L^{p'}(\Omega)$ telle que

$$< f, (0, \cdots, 0, v_i, 0, \cdots, 0) >= \int_\Omega u_i(x) v_i(x)\, dx.$$

Par suite, on obtient pour tout $v = (v_1, \cdots, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_\Gamma) \in L^p_\Gamma(\Omega)$

$$< f, v >= \sum_{1 \leq i \leq \Gamma} \int_\Omega u_i(x) v_i(x)\, dx.$$

On déduit que $T(u) = f$ où $u = (u_1, \cdots, u_\Gamma) \in L^{p'}_\Gamma(\Omega)$.
La preuve est terminée. $\square$

Théorème

Soient $p \in [1, +\infty[$, p' son exposant conjugué et $m \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout élément f de $(W^{m,p}(\Omega))'$, il existe une famille $(f_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m} \in L_\Gamma^{p'}(\Omega)$ telle que

$$< f, u >_{(W^{m,p}(\Omega))', W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega f_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx, \qquad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Preuve

Soient $f \in (W^{m,p}(\Omega))'$ et P l’opérateur défini par

$$\begin{aligned} P: \ W^{m,p}(\Omega) &\longrightarrow L^p_\Gamma(\Omega) \\ u &\longrightarrow (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \end{aligned}$$

On sait que P est une isométrie et un isomorphisme de $W^{m,p}(\Omega)$ dans le sous espace vectoriel $W = P\left(W^{m,p}(\Omega)\right)$ de $L^p_\Gamma(\Omega)$. Donc, $f \circ P^{-1}$ est une forme linéaire continue sur W. Par suite, d’après le théorème de Hahn Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{f}$ sur $L^p_\Gamma(\Omega)$, c’est à dire $\widetilde{f} \in \left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)'$ et $\widetilde{f}_{|W} = f \circ P^{-1}$.

Preuve (suite)

Reprenons l'application T de $L_\Gamma^{p'}(\Omega)$ dans $\left(L_\Gamma^{p}(\Omega)\right)'$ (introduite dans le lemme précédent) définie pour tout $u = (u_i)_{1\leq i\leq \Gamma} \in L_\Gamma^{p'}(\Omega)$ par

$$< T(u), v >= \sum_{i=1}^{\Gamma} \int_\Omega u_i(x)v_i(x)\,dx \qquad \text{pour tout } v = (v_i)_{1\leq i\leq \Gamma} \in L_\Gamma^{p}(\Omega).$$

Posons $(f_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m} = T^{-1}(\widetilde{f}) \in L_\Gamma^{p'}(\Omega)$. Alors, pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$, on a $P(u) = (D^\alpha u)_{0\leq|\alpha|\leq m} \in W$ et

$$\begin{aligned} < f, u > &=< f, p^{-1}\left((D^\alpha u)_{0\leq|\alpha|\leq m}\right) >=< \widetilde{f}, (D^\alpha u)_{0\leq|\alpha|\leq m} > \\ &=< T\left((f_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m}\right), (D^\alpha u)_{0\leq|\alpha|\leq m} >= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega f_\alpha(x) D^\alpha u(x)\,dx. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. $\square$

Remarque

Soit $f \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)'$. D'après le théorème précédent, il existe $f_0, \cdots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$ telles que pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} < f, u >_{\left(W^{1,p}(\Omega)\right)', W^{1,p}(\Omega)} &= \int_\Omega f_0(x) u(x)\, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx \\ &= \int_\Omega f_0(x) u(x)\, dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) u(x)\, dx \\ &= < f_0 - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, u >_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} . \end{aligned}$$

L'espace dual de $W^{1,p}(\Omega)$

Donc, l'application $u(\in \mathcal{D}(\Omega)) \longrightarrow < f, u >_{(W^{1,p}(\Omega))', W^{1,p}(\Omega)}$ est un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc on peut définir une application

$$F : \left(W^{1,p}(\Omega)\right)' \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

par

$$< F(f), u >=< f, u > \text{ pour tout } f \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)' \text{ et pour tout } u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

F est évidemment linéaire continue mais pas nécessairement injective. Si par exemple $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$, alors F est injective et on peut identifier $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)'$ à un sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$; mais ceci en général n'est pas le cas. D'où, la nécessité de définir un sous espace V de $W^{1,p}(\Omega)$ tel que $\mathcal{D}(\Omega)$ soit dense dans V.

Définition

Soient $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
On appelle $W_0^{m,p}(\Omega)$ (respectivement $H_0^m(\Omega)$) l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ (respectivement $H^m(\Omega)$).

Remarque

Par construction, $W_0^{m,p}(\Omega)$ est un sous espace fermé de $W^{m,p}(\Omega)$.

La question qui se pose est ce qu'on peut avoir $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$?
Le théorème suivant donne une réponse dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Théorème

Soient $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, c'est à dire $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

Elle va se faire par troncature et régularisation.

Etape 1. Troncature

Soit $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\begin{cases} \xi(x) = 1 & \text{si } \|x\| \leq 1, \\ 0 \leq \xi(x) \leq 1 & \text{si } 1 < \|x\| < 2, \\ \xi(x) = 0 & \text{si } \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\xi_n(x) = \xi(x/n).$$

Preuve (suite)

Soit $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. On pose $u_n = \xi_n u$. Alors, $u_n \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et est à support compact.
On affirme que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. En raison de simplicité, On se limite au cas où $m = 1$.
En effet, $u_n(x) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u(x)\, p.p.$ dans $\mathbb{R}^N$ et $|u_n(x) - u(x)|^p \leq 2^p |u(x)|^p$.
Donc, d'après le théorème de la convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x) - u(x)|^p \, dx \longrightarrow 0.$$

D'où, $u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Preuve (suite)

D'autre part, pour tout $1 \leq i \leq N$, $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_i} u + \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \xi_n$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Comme précédemment on a $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \xi_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} u \right|^p \, dx \leq \frac{1}{n^p} \left\| \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^p \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p ;$$

d'où, $\dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_i} u \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Par suite, pour tout $1 \leq i \leq N$, $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Preuve (suite)

Etape 2. Régularisation

D'après la première étape, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ t.q.\ \|u_{n_0} - u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_k = u_{n_0} * \rho_k$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et elle vérifie

$$\lim_{k\to+\infty} \|v_k - u_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

En outre, pour tous $1 \leq i \leq N$ et $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial v_k}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u_{n_0}}{\partial x_i} * \rho_k$; d'où, pour tout $1 \leq i \leq N$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \left\| \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{n_0}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$

L'espace $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N)$

Preuve (suite)

Par suite

$$\lim_{k\to+\infty} \|v_k - u_{n_0}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geq k_0,\ \ \|v_k - u_{n_0}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il résulte qu'il existe une suite $v_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geq k_0,$$

$$\|v_k - u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \|v_k - u_{n_0}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} + \|u_{n_0} - u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon.$$

D'où la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Caractérisation des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$

Le résultat suivant donne une caractérisation des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$ en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Soit $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f donnée par

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i2\pi xy} f(x)\, dx.$$

Alors, $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si l'application $y \to \|y\|\widehat{f}(y)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$.
Dans ce cas, on a

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left\|(1 + 4\pi^2\|y\|^2)^{1/2}\widehat{f}(y)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Preuve

Soit $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Donc, d'après le théorème de Plancherel,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \text{ et } \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{\nabla f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

On affirme que

$$\widehat{\nabla f}(y) = 2i\pi y\widehat{f}(y).$$

En effet, comme $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$, alors il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_n \longrightarrow f$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Donc

$$\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\|\nabla f_n - \nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{\nabla f_n} - \widehat{\nabla f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve (suite)

Par suite, il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_k$ telle que

$$\widehat{f}_{n_k}(y) \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}(y) \;\; p.p.\, y \in \mathbb{R}^N$$

et

$$\widehat{\nabla f}_{n_k}(y) \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \widehat{\nabla f}(y) \;\; p.p.\, y \in \mathbb{R}^N.$$

Or en utilisant le fait que $f_{n_k} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors une simple intégration par partie donne

$$\widehat{\nabla f}_{n_k}(y) = 2i\pi y \widehat{f}_{n_k}(y).$$

Et comme

$$2i\pi y\widehat{f}_{n_k}(y) \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 2i\pi y\widehat{f}(y) \;\; p.p.\, y \in \mathbb{R}^N,$$

alors $\widehat{\nabla f}(y) = 2i\pi y\widehat{f}(y)$. D'où, $y\widehat{f}(y) \in L^2_N(\mathbb{R}^N)$.

Caractérisation des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$

Preuve (suite)

De plus,

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\widehat{\nabla f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(y)|^2\, dy + \int_{\mathbb{R}^N} 4\pi^2 \|y\|^2 |\widehat{f}(y)|^2\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + 4\pi^2\|y\|^2\right) |\widehat{f}(y)|^2\, dy.
\end{aligned}$$

Inversement, supposons que $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\|y\|\widehat{f}(y) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Comme f est une distribution tempérée, alors $\widehat{\nabla f}(y) = 2i\pi y\widehat{f}(y)$.
Donc, $\widehat{\nabla f} \in L^2_N(\mathbb{R}^N)$, d'où $\nabla f \in L^2_N(\mathbb{R}^N)$ et par suite $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Prolongement des fonctions de $W_0^{m,p}(\Omega)$

Proposition

Soit $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. *Si on désigne par* $\widetilde{u}$ *son prolongement par* 0 *en dehors de* Ω, *c'est à dire*

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si \;\; x \in \Omega, \\ 0 & si \;\; x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

alors $\widetilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il est évident que son prolongement $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, de plus on a

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Preuve (suite)

Ainsi l'application P définie par

$$\begin{aligned} P:\ \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N)(\supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)) \\ u &\longrightarrow \widetilde{u} \end{aligned}$$

est linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie induite par $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{m,p}(\Omega)$, alors P se prolonge en une application linéaire continue $\widetilde{P}$ sur $W_0^{m,p}(\Omega)$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \widetilde{P}:\ W_0^{m,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \\ u &\longrightarrow \widetilde{P}(u) \end{aligned}$$

où $\widetilde{P}(\varphi) = P(\varphi) = \widetilde{\varphi}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Preuve (suite)

Soit $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, alors il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u$ dans $W^{m,p}(\Omega)$. Donc

$$\widetilde{P}(u_n) = P(u_n) = \widetilde{u}_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{P}(u) \quad \text{dans } W^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

D'où, $\widetilde{u}_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{P}(u)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Par suite, on peut extraire une sous suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ telle que

$$\widetilde{u}_{n_k}(x) \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{P}(u)(x) \;\; p.p.x \in \mathbb{R}^N.$$

D'où

$$\widetilde{P}(u)(x) = \begin{cases} u(x) & p.p \;\; x \in \Omega, \\ 0 & p.p \;\; x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Il résulte que $\widetilde{P}(u) = \widetilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Remarque

Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$*, alors*

$$\forall |\alpha| \leq m, \quad D^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{D^\alpha u} \quad \textit{au sens des distributions}$$

et

$$\|\widetilde{u}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Non densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$

Remarque

En général, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$, c'est à dire $W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$. L'égalité dépend fortement de la taille de la frontière $\partial\Omega$.

Exemple

On se place dans le cas où $N = 1$ et $\Omega =]0, 1[$.
On considère la fonction constante u définie par $u(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$.
Alors, $u \in W^{m,p}(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$; mais $u \notin W_0^{1,p}(\Omega)$.
En effet, supposons que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Non densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$

Or pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} < (\widetilde{u})', \varphi > = - < \widetilde{u}, \varphi' > &= - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= - \int_0^1 \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) - \varphi(1) = < \delta_0 - \delta_1, \varphi > . \end{aligned}$$

D'où, $(\widetilde{u})' = \delta_0 - \delta_1$ qui ne peut pas être identifiée à une fonction de $L^p(\mathbb{R})$ (au sens où il n'existe pas une fonction $g \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $< \delta_0 - \delta_1, \psi > = \int_{\mathbb{R}} g(x)\psi(x)\,dx$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$). Ceci est contradictoire avec le fait que $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Equivalence des normes sur $W_0^{m,p}(\Omega)$

Remarque

Dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ l'application

$$u \longrightarrow \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \in [1; +\infty[,$$

est une semi-norme, ce n'est pas une norme car elle s'annule sur les constantes qui sont des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$. Par contre sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ c'est une norme.

Plus exactement on a le résultat suivant dans le cas où Ω est un ouvert borné.

Equivalence des normes sur $W_0^{m,p}(\Omega)$

Proposition

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soient $p \in [1; +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors
(i) Il existe une constante $C = C(\Omega, p)$ telle que

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(ii) Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_{1,p,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ définie par

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}.$$

Equivalence des normes sur $W_0^{m,p}(\Omega)$

(iii) Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, $\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$ est une norme sur $W_0^{m,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{m,p}(\Omega)$ définie par

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Preuve

(i) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Puisque Ω est un ouvert borné, alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega$, $|x_i| < r$ pour tout $1 \leq i \leq N$.
Soit $\widetilde{\varphi}$ le prolongement de φ par 0 en dehors de Ω. Alors, $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $supp(\widetilde{\varphi}) \subset \Omega$.
Soit $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega$, alors $\widetilde{\varphi}(x') = 0$ où $x' = (-r, x_2, \cdots, x_N)$ et

$$\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}(x') = \int_{-r}^{x_1} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N)\, dt.$$

Par suite, grâce à l'inégalité de Hölder, on a

$$|\widetilde{\varphi}(x)| \leq (x_1 + r)^{1/p'} \left(\int_{-r}^{x_1} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N) \right|^p dt \right)^{1/p},$$

Preuve (suite)

Comme p' est l'exposant conjugué de p, alors

$$\begin{aligned} |\widetilde{\varphi}(x)|^p &\leq (2r)^{p-1} \int_{-r}^{x_1} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N) \right|^p dt \\ &\leq (2r)^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N) \right|^p dt. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widetilde{\varphi}(x)|^p \, dx_2 \cdots dx_N \leq (2r)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(x) \right|^p dx.$$

Preuve (suite)

Comme $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(x_1, \cdots, x_N) = 0$ pour $|x_1| \geq r$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{\varphi}(x)|^p \, dx = \int_{-r}^{r} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widetilde{\varphi}(x)|^p \, dx_2 \cdots dx_N \right) dx_1$$
$$\leq (2r)^p \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(x) \right|^p dx.$$

Par suite

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq (2r)^p \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^p dx.$$

D'où, l'inégalité

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq (2r)^p \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right|^p dx.$$

Preuve (suite)

(ii) Il suffit de montrer la première propriété de la norme, les autres propriétés sont faciles à vérifier.
Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $\|u\|_{1,p,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. D'où, $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \nabla u$ dans $L^p(\Omega)$. Par suite, $\nabla u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^p(\Omega)$ et donc, d'après (i), $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^p(\Omega)$, ce qui donne $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$, d'où $u = 0$ $p.p.$ dans Ω.
Pour l'équivalence des deux normes, on utilise (i) et la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour obtenir

$$\|u\|_{1,p,\Omega} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq (1 + C^p)^{1/p}\|u\|_{1,p,\Omega} \quad \text{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Equivalence des normes sur $W_0^{m,p}(\Omega)$

Preuve (suite)

(iii) On suit le même raisonnement de (ii) en utilisant (par récurrence) le fait que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq C_2 \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\leq \cdots \leq C_m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(\Omega)}^p = C_m \|u\|_{m,p,\Omega}^p.\end{aligned}$$

On déduit en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{m,p}(\Omega)$ que

$$\|u\|_{m,p,\Omega} \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{m,p,\Omega} \quad \text{pour tout } u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

La démonstration est terminée. $\square$

Remarque

L’espace dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ sera en général distinct de celui de $W^{m,p}(\Omega)$ puisque $W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$.

Notation.
L’espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ étant muni de la topologie induite par $W^{m,p}(\Omega)$; on note par

$$\left(W_0^{m,p}(\Omega)\right)' = W^{-m,p'}(\Omega) \text{ et } (H^m(\Omega))' = H^{-m}(\Omega).$$

Théorème

Soient $p \in [1, +\infty[$, p' son exposant conjugué et $m \in \mathbb{N}^*$.
Il existe une application linéaire continue injective de $W^{-m,p'}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui permet d'identifier $W^{-m,p'}(\Omega)$ à un sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$.
De plus, pour tout élément f de $W^{-m,p'}(\Omega)$, il existe une famille $(f_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m}$ telle que

$$f_\alpha \in L^{p'}(\Omega) \;\text{ et }\; f = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha f_\alpha$$

et tout élément f donné par la formule précédente s'identifie à un élément de $W^{-m,p'}(\Omega)$.

Preuve

Soit $f \in W^{-m,p'}(\Omega) = \left(W_0^{m,p}(\Omega)\right)'$ donc elle est une forme linéaire continue sur $W_0^{m,p}(\Omega)$, sous espace fermé de $W^{m,p}(\Omega)$. D'après le théorème de Hahn Banach elle se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{f}$ sur $W^{m,p}(\Omega)$. Il existe donc une famille $(f_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m} \in L_\Gamma^{p'}(\Omega)$ ($\Gamma = Card\{\alpha \in \mathbb{N}^N;\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$) telle que

$$< \widetilde{f}, u >_{(W^{m,p}(\Omega))', W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega f_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx, \qquad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Preuve (suite)

En particulier pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$
\begin{aligned}
< \widetilde{f}, \varphi >_{(W^{m,p}(\Omega))', W^{m,p}(\Omega)} &= < f, \varphi >_{W^{-m,p'}(\Omega), W^{m,p}(\Omega)} \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} f_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} < f_\alpha, D^\alpha \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} < (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Donc, l'application $\varphi(\in \mathcal{D}(\Omega)) \longrightarrow < f, \varphi >_{W^{-m,p'}(\Omega), W^{m,p}(\Omega)}$ est un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

L'espace dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$

Preuve (suite)

Donc on peut définir une application $\tau : \; W^{-m,p'}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ par

$< \tau(f), \varphi > = < f, \varphi >$ pour tout $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

C'est à dire, $\tau(f)$ est la restriction de $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$.
τ est évidemment linéaire. Elle est continue car si une suite $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ dans $W^{-m,p'}(\Omega)$, c'est à dire

$$< f_n, \varphi > \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall \varphi \in W_0^{m,p}(\Omega),$$

alors

$$< \tau(f_n), \varphi > = < f_n, \varphi > \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ce qui veut dire que $\tau(f_n) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\rightharpoonup} 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

L'espace dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$

Preuve (suite)

τ est injective. En effet, soit $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ telle que $\tau(f) = 0$, alors

$$< \tau(f), \varphi >=< f, \varphi >= 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{m,p}(\Omega)$, alors

$$< f, u >= 0 \qquad \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

C'est à dire que f est identiquement nulle dans $W^{-m,p'}(\Omega)$.
Réciproquement, si $f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha$ avec $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ alors f est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Par suite, $f = \tau(g)$ où g est le prolongement linéaire continue de f sur $W_0^{m,p}(\Omega)$ défini par

$$< g, u >= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx. \quad \square$$

le but de ce paragraphe est d'établir des inégalités qui permettent de plonger l'espace de Sobolev $W^{m,p}$ dans d'autres espaces comme L^q et C^k. Ces inclusions dépendent de la position de p par rapport à la dimension N. Plus exactement trois domaines vont être distingués, $p \in [1, N[$, $p = N$ et $p \in]N, +\infty]$.
On se place dans le cas où $p \in [1, N[$.
S'il existe des constantes $C > 0$ (C est indépendante de u) et $q \in [1, +\infty[$ telles que pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a l'estimation

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

alors q n'est pas arbitraire, il dépend de p et de N.

En effet, soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Posons pour $\lambda > 0$,

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x); \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Alors

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

c'est à dire

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\lambda^{1-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où nécessairement, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

On appelle $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ le conjugué de Sobolev de p (pour $p \in [1, N[$).

On remarque que $p^* \in]p, +\infty[$.

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Théorème

Supposons $p \in [1, N[$. Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de p et de N telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{pour tout } u \in C_c^1(\mathbb{R}^N).$$

Preuve

On distingue deux cas.

Cas 1. $p = 1$.

Dans ce cas, le conjugué de Sobolev $p^* = \dfrac{N}{N-1}$.

Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour chaque $i = 1, \cdots, N$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\, dy_i.$$

Preuve (suite)

Donc

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N) \right| dy_i \\ &\leq \int_{-\infty}^{x_i} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\| \, dy_i.\end{aligned}$$

D'où

$$|u(x)|^{N/(N-1)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{x_i} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\| \, dy_i \right)^{1/(N-1)}.$$

Preuve (suite)

Intégrons cette inégalité par rapport à x_1 et utilisons l'inégalité de Hölder itérée à $(N-1)$ fonctions de la forme

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{N} |g_i| \, dx_1 \leq \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |g_i|^{p_i} \, dx_1 \right)^{1/p_i},$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)} \, dx_1 \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{x_i} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\| \, dy_i \right)^{1/(N-1)} dx_1$$

Preuve (suite)

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{x_1} \|\nabla u(y_1, x_2, \cdots, x_N)\| \, dy_1 \right)^{1/(N-1)}$$

$$\prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\| \, dy_i \right)^{1/(N-1)} \quad dx_1$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(y_1, x_2, \cdots, x_N)\| \, dy_1 \right)^{1/(N-1)}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\| \, dy_i \right)^{1/(N-1)} \quad dx_1$$

Preuve (suite)

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(y_1, x_2, \cdots, x_N)\| \, dy_1\right)^{1/(N-1)}$$

$$\prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\| \, dy_i \, dx_1\right)^{1/(N-1)}.$$

Posons

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(y_1, x_2, \cdots, x_N)\| \, dy_1$$

et pour $i = 2, \cdots, N$,

$$I_i = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\| \, dx_1 \, dy_i.$$

Preuve (suite)

Alors, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme suivante

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1 \leq \prod_{i=1}^{N} I_i^{1/(N-1)}.$$

Intégrons maintenant ceci par rapport à x_2 ; on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)} dx_1 dx_2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} I_i^{1/(N-1)} dx_2 \\ &= I_2^{1/(N-1)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{N} I_i^{1/(N-1)} dx_2.\end{aligned}$$

Appliquons de nouveau l'inégalité de Hölder itérée, on trouve

Preuve (suite)

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)}\,dx_1\,dx_2 \le I_2^{1/(N-1)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} I_i\,dx_2\right)^{1/(N-1)}$$

$$= I_2^{1/(N-1)} \left(\int_{\mathbb{R}} I_1\,dx_2\right)^{1/(N-1)} \prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} I_i\,dx_2\right)^{1/(N-1)}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, y_2, x_3, \cdots, x_N)\|\,dx_1\,dy_2\right)^{1/(N-1)}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(y_1, x_2, \cdots, x_N)\|\,dy_1\,dx_2\right)^{1/(N-1)}$$

$$\prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, x_2, \cdots, y_i, \cdots, x_N)\|\,dx_1\,dx_2\,dy_i\right)^{1/(N-1)}.$$

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Preuve (suite)

D'où,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1 dx_2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u(x)\|\, dx_1 dx_2 \right)^{2/(N-1)}$$
$$\prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla u(x_1, x_2, \cdots, y_i, \cdots, x_N)\|\, dx_1 dx_2 dy_i \right)^{1/(N-1)}.$$

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Preuve (suite)

Puis on intègre par rapport à $x_3, \cdots, x_N$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx \\
&\le \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_N)\|\, dx_1 \dots dy_i \dots dx_N \right)^{1/(N-1)} \\
&= \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u(x)\|\, dx \right)^{1/(N-1)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u(x)\|\, dx \right)^{N/(N-1)}
\end{aligned}$$

qui est la majoration voulue pour $p = 1$.

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Preuve (suite)

Cas 2. $p \in]1, N[$.
On considère la fonction $|u|^\alpha$ avec $\alpha > 1$. Alors, $|u|^\alpha \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ et on a $\nabla(|u|^\alpha) = \alpha |u|^{\alpha-2} u \nabla u$. Par suite en utilisant le premier cas on obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\alpha N/(N-1)}\, dx\right)^{(N-1)/N} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(|u|^\alpha)(x)\|\, dx$$
$$= \alpha \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\alpha-1} \|\nabla u\|\, dx$$

$$\leq \alpha \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p(\alpha-1)/(p-1)}\, dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u\|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Preuve (suite)

On prend $\alpha = \dfrac{p(N-1)}{N-p} > 1$, alors $\dfrac{\alpha N}{N-1} = \dfrac{p(\alpha-1)}{p-1} = \dfrac{pN}{N-p} = p^*$.
Donc

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{(N-1)/N-(p-1)/p} \leq \frac{p(N-1)}{N-p}\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Comme $\dfrac{N-1}{N} - \dfrac{p-1}{p} = \dfrac{1}{p^*}$, alors

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{p(N-1)}{N-p}\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Ceci termine la preuve. $\square$

Théorème

Supposons $p \in [1, N[$. *Alors,*
(i) *il existe une constante* $C > 0$ *dépendant seulement de* p *et de* N *telle que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{pour tout } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

En particulier

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.
(ii) *Pour tout* $q \in [p, p^*]$,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.

Preuve

(i) Puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

D'après le théorème de Gagliardo-Nirenberg, on a pour tous n, $m \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ et par suite

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

Preuve (suite)

Or la continuité de l'injection $L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ assure que $u_n \rightharpoonup v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ faible, d'où nécessairement $v = u$. D'autre part, on a

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

(ii) Soit $q \in [p, p^*]$, alors il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}.$$

Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors d'après (i) $u \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

Estimation pour $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

Preuve (suite)

Donc par l'inégalité d'interpolation

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}\|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} &\leq \alpha\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1-\alpha)\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Par suite, d'après (i)

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Ce qui complète la preuve. $\square$

Opérateur de prolongement

Théorème

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Alors, il existe un opérateur de prolongement

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

linéaire, tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

(i) $Pu_{|\Omega} = u$,

(ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$,

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

où C dépend seulement de Ω.

Estimation pour $W^{1,p}(\Omega)$

Théorème

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Supposons $p \in [1, N[$. Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de p, N et Ω telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \textit{pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Preuve

On introduit l'opérateur de prolongement

$$P : \; W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

En utilisant le fait que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ avec injection continue et l'opérateur de prolongement P, on obtient

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Pu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad \square$$

Estimation pour $W_0^{1,p}(\Omega)$ - Inégalité de Poincaré

Théorème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Supposons $p \in [1, N[$. Alors, pour tout $q \in [1, p^*]$, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de p, N, q et Ω telle que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Preuve

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } W^{1,p}(\Omega).$$

Donc, en prolongeant u_n par 0 en dehors de Ω, on obtient

$$\widetilde{u_n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad \text{dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Par suite, comme $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ avec injection continue, alors

$$\widetilde{u_n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad \text{dans } L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

et

$$\|\widetilde{u_n}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\|\nabla\widetilde{u_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C_1\|\widetilde{\nabla u_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Preuve (suite)

Donc en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci dessus, on obtient

$$\|\widetilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|\nabla \widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C_1 \|\widetilde{\nabla u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Comme Ω est borné, alors pour tout $1 \leq q \leq p^*$, $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec injection continue et donc

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

La démonstration est terminée. $\square$

Estimation pour $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$

Théorème

Supposons $p = N$. Alors,

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^N) \ \ \forall q \in [1, +\infty[$$

avec injection continue.

Preuve

Soit $q \in [1, +\infty[$, alors il existe $\varepsilon \in]0, N-1]$ tel que $q < \dfrac{N(N-\varepsilon)}{\varepsilon}$.
On définit p_ε^* par $\dfrac{1}{p_\varepsilon^*} = \dfrac{1}{p_\varepsilon} - \dfrac{1}{N}$; où $p_\varepsilon = N - \varepsilon \in [1, N[$. Donc $q \in [1, p_\varepsilon^*[$.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur $K \subset supp(\varphi)$.

Preuve (suite)

Soit $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Comme φu est à support compact, alors $L^N(supp(\varphi u)) \hookrightarrow L^r(supp(\varphi u))$ avec injection continue pour tout $1 \leq r \leq N$ et par suite $\varphi u \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq r \leq N$. En particulier, $\varphi u \in W^{1,p_\varepsilon}(\mathbb{R}^N)$.
En utilisant les injections continues $L^{p_\varepsilon^*}(K) \hookrightarrow L^q(K)$ (car $1 \leq q < p_\varepsilon^*$), $W^{1,p_\varepsilon}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p_\varepsilon^*}(\mathbb{R}^N)$ et $L^N(supp(\varphi u)) \hookrightarrow L^{p_\varepsilon}(supp(\varphi u))$ (car $1 \leq p_\varepsilon < N$), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(K)} = \|\varphi u\|_{L^q(K)} &\leq C\|\varphi u\|_{L^{p_\varepsilon^*}(K)} \leq C\|\varphi u\|_{L^{p_\varepsilon^*}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_1\|\varphi u\|_{W^{1,p_\varepsilon}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2\|\varphi u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \leq C_3\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Théorème de Morrey

Théorème

Supposons $p > N$. Alors,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.
De plus, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $p \in]N, +\infty[$, on a

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad p.p.\ x, y \in \mathbb{R}^N$$

avec $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$ et C est une constante qui dépend seulement de p et N.

Preuve

Si $p = +\infty$, on a

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.
Si $p \in]N, +\infty[$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On montre qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad p.p.\ x,\, y \in \mathbb{R}^N.$$

Soient $r > 0$ et P_r un pavé de $\mathbb{R}^N$ de côté r contenant 0 et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Soit $z \in P_r$, alors d'après la formule de Taylor avec reste intégrale,

$$|\varphi(z) - \varphi(0)| = \int_0^1 \nabla\varphi(tz).z\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(tz) z_i\, dt.$$

Preuve (suite)

Donc

$$|\varphi(z)-\varphi(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tz)\right| |z_i|\, dt \leq r \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tz)\right| dt.$$

Par suite

$$\int_{P_r} |\varphi(z)-\varphi(0)|\, dz \leq r \int_{P_r} \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tz)\right| dt\, dz$$

$$\leq r \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 dt \int_{P_r} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tz)\right| dz \leq r \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 t^{-N}\, dt \int_{P_{tr}} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y)\right| dy.$$

Preuve (suite)

Comme

$$\left|\int_{P_r} \varphi(z)\, dz - r^N \varphi(0)\right| = \left|\int_{P_r} \varphi(z)\, dz - \int_{P_r} \varphi(0)\, dz\right| \leq \int_{P_r} |\varphi(z) - \varphi(0)|\, dz,$$

alors

$$\begin{aligned}
\left| r^{-N} \int_{P_r} \varphi(z)\, dz - \varphi(0)\right| &\leq r^{1-N} \int_0^1 t^{-N}\, dt \sum_{i=1}^N \int_{P_{tr}} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y)\right| dy \\
&\leq r^{1-N} \int_0^1 t^{-N}\, dt \sum_{i=1}^N \left(\int_{P_{tr}} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y)\right|^p dy\right)^{1/p} \left(\int_{P_{tr}} dy\right)^{1/p'} \\
&= r^{1-N} \int_0^1 t^{-N}\, dt \sum_{i=1}^N \left(\int_{P_{tr}} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y)\right|^p dy\right)^{1/p} (tr)^{N/p'}
\end{aligned}$$

Preuve (suite)

$$
\begin{aligned}
&= r^{1-N+N/p'} \int_0^1 t^{N/p'-N}\, dt \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{P_{tr}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) \right|^p \, dy \right)^{1/p} \\
&\leq r^{\alpha} \int_0^1 t^{N/p'-N}\, dt \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) \right|^p \, dy \right)^{1/p} \\
&= \frac{r^{\alpha}}{\alpha} \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) \right|^p \, dy \right)^{1/p},
\end{aligned}
$$

où p' est l'exposant conjugué de p et $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p} \in]0,1[$.

Preuve (suite)

Donc
$$\left| r^{-N} \int_{P_r} \varphi(z)\, dz - \varphi(0) \right| \leq \frac{r^\alpha}{\alpha} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Posons
$$\overline{\varphi}_{P_r} = \frac{1}{mes(P_r)} \int_{P_r} \varphi(z)\, dz = r^{-N} \int_{P_r} \varphi(z)\, dz.$$

C'est à dire $\overline{\varphi}_{P_r}$ est la moyenne de φ sur P_r.
On a donc
$$|\overline{\varphi}_{P_r} - \varphi(0)| \leq \frac{r^\alpha}{\alpha} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Prenons maintenant x, $y \in \mathbb{R}^N$ quelconques. Il existe alors un pavé de côté $r = \|x - y\|$ contenant x et y.
Considérons les translations suivantes

$$\psi(z) = \varphi(z + x) \quad \text{et} \quad \phi(z) = \varphi(z + y) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}^N.$$

Preuve (suite)

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors $\psi,\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, de plus

$$\nabla\psi(z) = \nabla\varphi(z+x) \ \text{ et } \ \nabla\phi(z) = \nabla\varphi(z+y) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}^N$$

et

$$\|\nabla\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'autre part, en utilisant le fait que pour tout $\delta \geq 0$, $mes(P_r) = mes(P_{r+\delta})$ et $\overline{\varphi}_{P_r} = \overline{\varphi}_{P_{r+\delta}}$, on a

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}_{P_r} &= \frac{1}{mes(P_r)} \int_{P_r} \psi(z)\,dz = \frac{1}{mes(P_r)} \int_{P_r} \varphi(z+x)\,dz \\
&= \frac{1}{mes(P_{r+\|x\|})} \int_{P_{r+\|x\|}} \varphi(z)\,dz = \overline{\varphi}_{P_{r+\|x\|}} = \overline{\varphi}_{P_r}.
\end{aligned}$$

Preuve (suite)

Donc

$$|\overline{\varphi}_{P_r} - \varphi(x)| = |\overline{\psi}_{P_r} - \psi(o)| \leq \frac{r^\alpha}{\alpha}\|\nabla\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \frac{r^\alpha}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

De la même façon, on montre que

$$|\overline{\varphi}_{P_r} - \varphi(y)| = |\overline{\phi}_{P_r} - \phi(o)| \leq \frac{r^\alpha}{\alpha}\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \frac{r^\alpha}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Par suite

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - \overline{\varphi}_{P_r}| + |\overline{\varphi}_{P_r} - \varphi(y)| \leq \frac{2r^\alpha}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Preuve (suite)

On déduit que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{2\|x-y\|^{\alpha}}{\alpha} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Maintenant soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Par suite, il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$ telle que

$$u_{n_k}(x) \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u(x) \;\; p.p.\, x \in \mathbb{R}^N.$$

D'où, $|u(x) - u(y)| \leq \dfrac{2\|x-y\|^{\alpha}}{\alpha} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad p.p.\ x, y \in \mathbb{R}^N.$

Preuve (suite)

Montrons maintenant que l'injection $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est continue. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ et P_1 un pavé de côté 1 contenant x. Alors, comme

$$|\overline{\varphi}_{P_1} - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

alors

$$|\varphi(x)| \leq |\overline{\varphi}_{P_1}| + \frac{1}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\varphi\|_{L^1(P_1)} + \frac{1}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Puisque l'injection $L^p(P_1) \hookrightarrow L^1(P_1)$ est continue, alors, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$|\varphi(x)| \leq C_1\|\varphi\|_{L^p(P_1)} + \frac{1}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Preuve (suite)

D'où, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\varphi(x)| \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Maintenant pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on raisonne comme pécédemment c'est à dire en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ pour déduire que

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \;\; p.p.\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Par conséquent, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Ce qui termine la preuve. $\square$

Conséquences du théorème de Morrey

Remarque

Il est important de remarquer que pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*, avec* $p \in]N, +\infty[$*, il existe une fonction* $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^N)$ *telle que* $u = \tilde{u}$ *p.p. sur* $\mathbb{R}^N$*. Autrement dit, on peut associer un représentant continu à tout* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*, pour* $p \in]N, +\infty[$*.*

Conséquences du théorème de Morrey

Proposition

Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *avec* $p \in]N, +\infty[$*. Alors*

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0.$$

Preuve

Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Alors, il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Donc, en appliquant le théorème de Morrey, u est aussi limite uniforme de la suite $(u_n)_n$. D'où le résultat. $\square$

Plongements de Sobolev

Le théorème suivant généralise les inclusions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ à celles de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème

Soient $p \in [1, +\infty[$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$, *on a*

(*i*) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$, *alors* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*(m)}(\mathbb{R}^N)$ *où* $\dfrac{1}{p^*(m)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$,

(*ii*) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$, *alors* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $\forall q \in [1, +\infty[$,

(*iii*) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$, *alors* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^N)$ *où* k *un entier tel que* $k < m - \dfrac{N}{p} \leq k + 1$,

avec injections continues.

Plongements de Sobolev

Dans le cas où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, on a le résultat suivant.

Théorème

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on a

(i) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(m)}(\Omega)$ où $\dfrac{1}{p^*(m)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$,

(ii) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$,

(iii) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ où k un entier tel que

$k < m - \dfrac{N}{p} \leq k + 1$,

avec injections continues.

Théorème de compacité de Rellich-Kondrachov

Si de plus l'ouvert Ω est borné, on a le résultat suivant dans le cas où $m = 1$.

Théorème

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On a

(i) Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \;\; \forall q \in [1, p^*[$ où $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

(ii) Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \;\; \forall q \in [1, +\infty[$,

(iii) Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$,

avec injections compactes.

Remarque

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \;\; \text{avec injection compacte.}$$

On sait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ mais pas dans $W^{m,p}(\Omega)$. Ainsi si on veut approcher des éléments de $W^{m,p}(\Omega)$ par des éléments de classe C^∞, on ne peut pas leur imposer d'être nuls sur la frontière $\partial\Omega$, on se contente uniquement d'une convergence dans $L^p(\Omega)$. D'où la nécessité de définir un autre espace dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Théorème

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Supposons $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors, l'ensemble $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ des restrictions des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ à $\overline{\Omega}$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Trace-Dérivée normale

Définition

Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.
(i) *On appelle trace de φ sur $\partial\Omega$, la restriction de φ à $\partial\Omega$ définie par*

$$\varphi_{|\partial\Omega}(\sigma) = \varphi(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \partial\Omega.$$

(ii) *On appelle dérivée normale de φ sur $\partial\Omega$, l'application $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ définie par*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\sigma) n_i(\sigma) = \nabla\varphi(\sigma).n(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \partial\Omega,$$

où $n(\sigma) = (n_1(\sigma), \cdots, n_N(\sigma))$ est le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\Omega$ au point $\sigma \in \partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur de Ω.

(*iii*) Par récurrence, on définit la dérivée normale d'ordre $j \in \mathbb{N}$ par

$$\frac{\partial^j \varphi}{\partial n^j}(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{j-1}\varphi}{\partial n^{j-1}}(\sigma)\right) n_i(\sigma) \quad \forall \sigma \in \partial\Omega.$$

La question qui se pose maintenant : Peut-on définir la trace et les dérivées normales d'une fonction $u \in W^{m,p}(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$ et jusqu'à quel ordre ? La réponse est donnée par les deux théorèmes suivants.

Trace-Dérivée normale

Théorème

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Supposons $p \in [1, +\infty[$. Alors, l'application γ_0 définie par

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \ \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^p(\partial\Omega) \\ \varphi &\longrightarrow \gamma_0\varphi = \varphi_{|\partial\Omega} \end{aligned}$$

est linéaire continue sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ muni de la topologie induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$. Elle se prolonge donc en une application linéaire continue notée encore γ_0 de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$. Donc, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

$\gamma_0 u = u_{|\partial\Omega}$ s'appelle la trace de u sur $\partial\Omega$. De plus le noyau de γ_0 est l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$. Autrement dit $W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega);\ u = 0 \ \text{sur}\ \partial\Omega\right\}$.

Théorème

Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Supposons $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors, l'application $\gamma = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{m-1})$ définie par

$$\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow (L^p(\partial\Omega))^m$$

$$\varphi \longrightarrow \gamma\varphi = (\gamma_0\varphi, \gamma_1\varphi, \cdots, \gamma_{m-1}\varphi) = (\varphi_{|\partial\Omega}, \frac{\partial\varphi}{\partial n}, \cdots, \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial n^{m-1}})$$

est linéaire continue sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ muni de la topologie induite par celle de $W^{m,p}(\Omega)$. Elle se prolonge donc en une application linéaire continue notée encore γ de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $(L^p(\partial\Omega))^m$. Donc, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\gamma u\|_{(L^p(\partial\Omega))^m} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Trace-Dérivée normale

Pour tout $j \in \{1, \cdots, m-1\}$, $\gamma_j u = \dfrac{\partial^j u}{\partial n^j}$ s'appelle la dérivée normale d'ordre j de u sur $\partial\Omega$.
De plus le noyau de γ est l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$. Autrement dit

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega);\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Trace-Dérivée normale

Dans le cas où $p = 2$, on a les résultats suivants.

Définition

Soit Ω *un ouvert régulier de* $\mathbb{R}^N$. *Soit* γ_0 *l'application trace de* $H^1(\Omega)$ *dans* $L^2(\partial\Omega)$.
On définit alors

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega)) = Im(\gamma_0).$$

L'opérateur $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ *est alors linéaire continu et surjectif.*

Proposition

Soit Ω *un ouvert régulier de* $\mathbb{R}^N$. *Alors, l'espace* $H^{1/2}(\partial\Omega)$ *est dense dans* $L^2(\partial\Omega)$.

Remarque

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$.
Si $u \in H^2(\Omega)$, alors $u \in H^1(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ pour tout $i = 1, \cdots, N$. On peut donc non considérer seulement $\gamma_0(u)$ mais aussi $\gamma_0\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ qui sont des fonctions de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. En particulier, la dérivée normale $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$ est un élément de $L^2(\partial\Omega)$.

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Elle coincide en dimension 1 avec la formule d'intégration par parties.
Dans la suite, on désigne par $n = (n_1, \cdots, n_N)$ le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\Omega$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$ la dérivée normale de u sur la frontière $\partial\Omega$.

Formule d'Ostrogradsky

Théorème

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit F une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ (un champ de vecteurs). Alors

$$\int_{\Omega} div(F(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} F.n\, d\sigma.$$

Formules de Green

Formule de Green classique

Corollaire

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Alors, pour toutes fonctions $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $v \in C^1(\overline{\Omega})$ on a

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma - \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\,dx.$$

Remarque

La formule de Green est une conséquence de la formule d'Ostrogradsky en prenant $F(x) = v(x)\nabla u(x)$ et en utilisant le fait que

$$div\big(v(x)\nabla u(x)\big) = v(x)\Delta u(x) + \nabla u(x).\nabla v(x).$$

Formule de Green dans $H^1(\Omega)$

Théorème

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Alors, pour toutes fonctions u, $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} u\,v\,n_i\,d\sigma - \int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx \qquad \forall i = 1, \cdots, N.$$

Formules de Green

Formule de Green dans $H^2(\Omega)$

Théorème

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Alors, pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i v\,d\sigma - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx \qquad \forall i = 1, \cdots, N.$$

Et donc

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma - \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\,dx.$$