Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Arij Bouzelmate

Masters: Mathématiques Appliquées à la Finance / Mathématiques et Applications

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
Soient f une fonction (ou bien une distribution) définie sur Ω et L un opérateur linéaire.
La question qui se pose, existe-t-il u tel que

$$Lu = f \quad \text{dans } \Omega?$$

Si u_0 est une solution particulière alors l'ensemble des solutions est un espace affine de la forme $\{u_0\} + W$ où W est l'espace vectoriel des solutions du problème homogène $Lu = 0$.
Pour avoir l'existence et l'unicité de la solution, on impose en plus de l'équation, des conditions aux limites $(C.L)$ (c'est à dire sur le bord de Ω noté $\partial\Omega$). Il existe des conditions aux limites de natures très différentes, Dirichlet, Neumann, mixtes,$\cdots$.

On se ramène donc à des problèmes de type suivant

$$(P)\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega, \\ C.L & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'idée pour résoudre le problème (P) est d'introduire des espaces de Banach, X pour u et Y pour f de sorte que les éléments de X vérifient les $C.L$ et que l'application L soit un isomorphisme de X dans Y. Dans ce cas , la solution de (P) est donnée par $u = L^{-1}(f)$. Comme L est linéaire, pour montrer que c'est un isomorphisme il faut et il suffit de montrer que L est continue, $KerL = \{0\}$ et $ImL = Y$.
En pratique, on montre que L^{-1} est continue, c'est à dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_X \leq C\|Lu\|_Y \quad \forall u \in X. \qquad (R)$$

Ceci implique que $KerL = \{0\}$. En effet, si $u \in X$ tel que $Lu = 0$, alors $\|u\|_X = 0$ et par suite $u = 0$.
Pour montrer que L est surjective, il faut noter tout d'abord que puisque L est continue alors ImL est un fermé. En effet, si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de ImL, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $Lx_n = y_n$ et donc

$$\|x_n - x_m\|_X \leq C\|L(x_n - x_m)\|_Y = C\|y_n - y_m\|_Y \quad \forall n,\, m \in \mathbb{N}.$$

D'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X qui est complet, donc il existe $x \in X$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans X. D'où, par la continuité de L, on a $Lx_n = y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Lx = y$, ce qui implique que $y \in ImL$.
Par suite, pour prouver que $ImL = Y$, il suffit de montrer que ImL est dense dans Y.

Il faut remarquer que pour montrer la relation (R), il suffit de la vérifier sur un sous ensemble F dense dans X. La raison pour laquelle on commence par montrer l'inégalité pour des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui est en général dense dans X.
En conclusion, le problème d'existence de solutions du problème (P) se ramène à établir une majoration de type (R) ; une telle majoration est appelée estimation à priori.
Un exemple d'une telle méthode est le théorème de Lax-Milgram et ses applications.

Théorème de Lax-Milgram

Théorème

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(.,.)$ et soit a une forme bilinéaire sur $H \times H$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
(i) *a est continue, c'est à dire il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \quad \textit{pour tous } u,\, v \in H,$$

(ii) *a est coercive, c'est à dire il existe une constante $\alpha > 0$ tel que*

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2 \quad \textit{pour tout } u \in H.$$

Théorème de Lax-Milgram (suite)

Alors, pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = < f, v > \quad \text{pour tout } v \in H. \tag{1}$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in H, \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - < f, u > = \min\limits_{v \in H} \left[\dfrac{1}{2}a(v,v) - < f, v > \right]. \end{cases} \tag{2}$$

Preuve

Elle va se faire en deux étapes.
Etape 1. L'existence et l'unicité.
Pour chaque $u \in H$, l'application $v \in H \longrightarrow a(u,v)$ est linéaire et continue, d'où c'est un élément de H' qu'on note Au. Comme a est linéaire par rapport à la première variable et est continue, alors l'application A est linéaire et continue de H dans H' puisqu'on a

$$|< Au, v >| = |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \quad \text{pour tous } u,\, v \in H,$$

et ceci implique que

$$\|Au\| \leq C\|u\| \quad \text{pour tout } u \in H.$$

De plus, en utilisant la coercivité de a et la continuité de Au, on obtient

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) =< Au, u >_{H',H} \leq \|Au\|_{H'}\|u\|_H \quad \text{pour tout } u \in H.$$

Preuve (suite)

Par suite,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|Au\|_{H'} \quad \text{pour tout } u \in H.$$

Donc, d'après l'introduction, A est injective et ImA est un fermé dans H'.
Pour montrer que A est surjective, il suffit de montrer que que ImA est dense dans H' (car H' est un Hilbert), ce qui revient à prouver que $(ImA)^\perp = \{0\}$.
Soit $u' \in (ImA)^\perp$, alors,

$$((u', Av))_{H'} = (\phi^{-1}(Av), \phi^{-1}(u'))_H = 0 \quad \text{pour tout } v \in H,$$

où ϕ est l'isomorphisme canonique de H dans H'.

Preuve (suite)

Par suite, en utilisant le fait que H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et le théorème de Riesz-Fréchet, on obtient pour tout $v \in H$,

$$0 = (\phi^{-1}(u'), \phi^{-1}(Av)) =< \phi\left(\phi^{-1}(Av)\right), \phi^{-1}(u') >=< Av, \phi^{-1}(u') > .$$

Prenons $v = \phi^{-1}(u')$, on obtient alors

$$0 =< Av, v >= a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

Donc, $v = 0$ et par suite $u' = 0$. Par conséquent, $(ImA)^{\perp} = \{0\}$. En conclusion, A est un isomorphisme de H dans H' et ainsi on a l'existence et l'unicité de la solution du problème (1).

Preuve (suite)

Etape 2. La caractérisation.
Supposons maintenant que a est symétrique. On considère la fonction F définie sur H par

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - < f, v > \quad \text{pour tout } v \in H.$$

Montrons que F atteint son minimum sur H. Pour cela, on considère une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire $u_n \in H$ et

$$F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \min_{v\in H} F(v) = d.$$

D'où

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ \ F(u_n) \leq d + 1.$$

Preuve (suite)

Or
$$F(u_n) \geq \frac{\alpha}{2}\|u_n\|^2 - \|f\|\|u_n\|,$$
d'où, nécessairement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H et comme H est réflexif (car c'est un Hilbert), alors on peut extraire une sous suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} \omega$ faiblement dans H.
Or la fonction F est convexe et continue pour la topologie forte de H donc elle est $s.c.i$ pour la topologie faible et par suite
$$F(\omega) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(u_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} F(u_{n_k}) = d.$$
Or $d = \min\limits_{v\in H} F(v)$, d'où $F(\omega) = d$ et alors F atteint son minimum au point $\omega \in H$.

Preuve (suite)

Montrons maintenant que $\omega = u$.
Tout d'abord, il faut noter que la fonction F est de classe C^1 et que

$$DF(v)(h) = \frac{1}{2}\Big[a(v,h) + a(h,v)\Big] - < f, h > \quad \text{pour tous } v,\ h \in H.$$

D'où, en utilisant le fait que a est symétrique,

$$DF(v)(h) = a(v,h) - < f, h > \quad \text{pour tous } v,\ h \in H.$$

Or ω est un minimum dans tout l'espace H, d'où $Df(\omega) = 0$ et donc

$$a(\omega, h) = < f, h > \quad \text{pour tout } h \in H.$$

Comme l'équation (1) admet une unique solution u, alors $\omega = u$. Ceci termine la preuve. $\square$

Remarque

Sous les hypothèses du théorème précédent, l'équation (1) *est équivalente à l'équation*

$$Au = f \quad \textit{dans } H \qquad (3)$$

où A est un isomorphisme de H dans H' défini par

$$< Au, v >= a(u, v) \quad \forall v \in H.$$

De plus, A^{-1} est continue de H' à valeurs dans H et vérifiant

$$\|A^{-1}f\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\| \quad \textit{pour tout } f \in H'.$$

D'où, $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\alpha}$.
L'équation (3) *est appelée équation variationnelle.*

Remarque

L'application a est une forme bilinéaire sur $H \times H$, *on peut définir la forme conjuguée* a^* *de a par*

$$a^*(u,v) = a(v,u) \quad \text{pour tous } u,\ v \in H.$$

Puis, on associe à a^* *l'opérateur* $A^* \in \mathcal{L}(H,H')$ *appelé conjugué de A et défini par*

$$< A^*u, v >= a^*(u,v) = a(v,u) =< Av, u > \quad \text{pour tous } u,\ v \in H.$$

Alors, A^* *a les mêmes propriétés que A.*

Lemme

Soit H un Hilbert sur $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans H. Alors,

$$a(v,u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a(v,u) \quad et \quad a(u_n,v) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a(u,v).$$

Preuve

Soient $u,\ v \in H$.
Comme $Av \in H'$, alors

$$a(v, u_n) = < Av, u_n > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < Av, u > = a(v, u).$$

De plus, comme $A^*v \in H'$, alors

$$a(u_n, v) = < Au_n, v > = < A^*v, u_n > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < A^*v, u > = < Au, v > = a(u, v).$$

Le lemme est prouvé. $\square$

Remarque

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} v$, faiblement dans H, on n'a pas en général $a(u_n, v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a(u, v)$.

Théorème de Stampacchia

Théorème

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(.,.)$ et soit a une forme bilinéaire sur $H \times H$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

(i) *a est continue, c'est à dire il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \quad \textit{pour tous } u,\, v \in H,$$

(ii) *a est coercive, c'est à dire il existe une constante $\alpha > 0$ tel que*

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2 \quad \textit{pour tout } u \in H.$$

Théorème de Stampacchia (suite)

Soit K un convexe fermé non vide de H.
Alors, pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$a(u, v-u) \geq < f, v-u > \quad \text{pour tout } v \in K. \tag{4}$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in K, \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - < f, u > = \min\limits_{v \in K} \left[\dfrac{1}{2}a(v,v) - < f, v > \right]. \end{cases} \tag{5}$$

Remarque

L'inéquation (4) *est appelée inéquation variationnelle.*

Preuve

On commence comme lors de la preuve du théorème de Lax-Milgram.
(i) Pour tout $u \in H$, l'application $v \in H \longrightarrow a(u, v)$ est linéaire continue, alors c'est un élément de H' noté Au. L'opérateur A ainsi défini est évidemment linéaire et continue. D'autre part, comme $Au \in H'$, alors d'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe un élément de H noté $\phi^{-1}(Au)$ tel que

$$a(u, v) =< Au, v >= (v, \phi^{-1}(Au)) = (\phi^{-1}(Au), v) \quad \text{pour tout } v \in H$$

où ϕ est l'isomorphisme canonique de H dans H'.
Soit maintenant $f \in H'$, en utilisant une autre fois le théorème de Riesz-Fréchet, on trouve

$$< f, v - w >= (\phi^{-1}(f), v - w) \quad \text{pour tous } v,\ w \in H.$$

Preuve (suite)

Alors, l'inéquation variationnelle (4) devient : Trouver $u \in K$ tel que

$$(\phi^{-1}(Au), v - u) \geq (\phi^{-1}(f), v - u) \quad \text{pour tout } v \in K.$$

Ce qui équivaut à

$$(\lambda\phi^{-1}(f) - \lambda\phi^{-1}(Au) + u - u, v - u) \leq 0 \quad \text{pour tous } v \in K \text{ et } \lambda > 0,$$

et donc, d'après la caractérisation de la projection sur un convexe fermé,

$$u = P_K\Big(\lambda\phi^{-1}(f) - \lambda\phi^{-1}(Au) + u\Big) \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Soit $0 < \lambda < \dfrac{\alpha}{C^2}$. Considérons maintenant la fonction F définie de K dans K par $F(v) = P_K\Big(\lambda\phi^{-1}(f) - \lambda\phi^{-1}(Av) + v\Big)$ pour tout $v \in K$.

Preuve (suite)

Comme la projection P_K est une contraction large et ϕ^{-1} et A sont linéaires, alors

$$
\begin{aligned}
&\|F(v_1) - F(v_2)\| \leq \\
&\left\|\lambda\phi^{-1}(f) - \lambda\phi^{-1}(Av_1) + v_1 - \Big(\lambda\phi^{-1}(f) - \lambda\phi^{-1}(Av_2) + v_2\Big)\right\| \\
&= \left\|v_1 - v_2 - \lambda\Big(\phi^{-1}(Av_1) - \phi^{-1}(Av_2)\Big)\right\| \\
&= \left\|v_1 - v_2 - \lambda\phi^{-1}\Big(A(v_1 - v_2)\Big)\right\|
\end{aligned}
$$

Comme A est continue, ϕ^{-1} est une isométrie et $(\phi^{-1}(Av), v) = a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \ \ \forall v \in H$, alors

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|^2 \leq \big(1 + \lambda^2 C^2 - 2\lambda\alpha\big)\|v_1 - v_2\|^2.$$

Preuve (suite)

Comme $0 < \lambda < \dfrac{\alpha}{C^2}$, alors $0 < 1 + \lambda^2 C^2 - 2\lambda\alpha < 1$, d'où F est une contraction stricte sur K et par suite elle admet un unique point fixe $u \in K$, c'est à dire u est l'unique solution de l'inéquation variationnelle (4).

(ii) Supposons maintenant que a est symétrique.

Soit l'application $(.,.)_a$ définie de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ par

$$(u, v)_a = a(u, v) \quad \text{pour tous } u,\, v \in H.$$

Alors, $(.,.)_a$ est un produit scalaire sur H. De plus, si on pose $\|u\|_a = \sqrt{(u,u)_a}$ pour tout $u \in H$. Alors

$$\alpha \|u\|^2 \leq \|u\|_a^2 \leq C\|u\|^2.$$

Donc, la norme $\|.\|_a$ est équivalente à la norme $\|.\|$ de H.

Preuve (suite)

Par suite, H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_a$. Appliquons le théorème de Riesz-Fréchet, on obtient $w \in H$ tel que

$$< f, v >= (v, w)_a = a(v, w) = a(w, v) \quad \text{pour tout } v \in H.$$

Donc, d'après l'équation (4), on a

$$a(w - u, v - u) = (w - u, v - u)_a \leq 0 \quad \text{pour tout } v \in K.$$

C'est à dire $u = P_K(w)$ (projection au sens du produit scalaire $(.,.)_a$). Ceci équivaut à

$$\|w - u\|_a = \min_{v \in K} \|w - v\|_a.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\|w - u\|_a^2 = \min_{v \in K} \frac{1}{2}\|w - v\|_a^2.$$

Preuve (suite)

C'est à dire

$$\frac{1}{2}\|w\|_a^2 + \frac{1}{2}\|u\|_a^2 - (w,u)_a = \min_{v\in K}\left[\frac{1}{2}\|w\|_a^2 + \frac{1}{2}\|v\|_a^2 - (w,v)_a\right].$$

D'où

$$\frac{1}{2}\|u\|_a^2 - < f, u > = \min_{v\in K}\left[\frac{1}{2}\|v\|_a^2 - < f, v >\right].$$

Par suite

$$\frac{1}{2}a(u,u) - < f, u > = \min_{v\in K}\left[\frac{1}{2}a(v,v) - < f, v >\right].$$

Ceci termine la preuve. □

Remarque

Supposons qu'on a les mêmes hypothèses du théorème de Stampacchia avec K un sous espace fermé. Alors en utilisant la caractérisation de la projection sur un sous espace vectoriel fermé, on a pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$a(u,v) = < f, v > \quad \textit{pour tout } v \in K.$$

De plus, si a est symétrique, u a la même caractérisation que celle du théorème de Stampacchia.

Application du théorème de Lax-Milgram

Soient H et V deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ tels que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ avec injections continues et denses. Soit a une forme bilinéaire continue et coercive de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$.
Soient $A \in \mathcal{L}(V, V')$ l'opérateur associé à a par le théorème de Lax-Milgram et A_H l'opérateur défini sur $D(A_H) = \{u \in V;\ Au \in H\}$ par

$$A_H u = Au \quad \text{pour tout } u \in D(A_H).$$

Il faut distinguer l'opérateur A qui est linéaire continu de V dans V' et l'opérateur A_H qui est linéaire de $D(A_H)$ dans H, mais pas nécessairement continu lorsque $D(A_H)$ est muni de la norme induite par celle de H ($D(A_H)$ est un sous espace vectoriel de H).

En effet, on a

$$\|Au\|_{V'} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(V,V')}\|u\|_V \text{ et } \|u\|_H \leq c_1\|u\|_V \quad \text{pour tout } u \in V.$$

et

$$\|Au\|_{V'} \leq c_2\|Au\|_H \quad \text{pour tout } u \in D(A_H).$$

Mais ceci n'implique pas que

$$\|A_H u\|_H = \|Au\|_H \leq k\|u\|_H \quad \text{pour tout } u \in D(A_H).$$

La situation change si l'on change de norme sur $D(A_H)$.

Proposition

Sous les mêmes hypothèses précédentes on a
(i) *L'opérateur* A_H *est bijectif de* $D(A_H)$ *dans H.*
(ii) $D(A_H)$ *est dense dans H et* A_H *est de graphe fermé, c'est à dire, si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $D(A_H)$ *telle que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \quad dans\ H$$

et

$$Au_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad dans\ H,$$

alors, $u \in D(A_H)$ *et* $f = Au$.

Proposition (suite)

(iii) $D(A_H)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire du graphe défini par

$$(u,v)_{D(A_H)} = (u,v)_H + (Au,Av)_H \quad \text{pour tous } u,\ v \in H.$$

(iv) A_H est un isomorphisme de $\big(D(A_H), \|.\|_{D(A_H)}\big)$ dans H.

Preuve

(i) Soit $f \in H \simeq H'$, d'où $f \in V'$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in V$ tel que $Au = f$, d'où $Au \in H$ et alors $u \in D(A_H)$.
(ii) $a)$ Montrons que $[D(A_H)]^{\perp} = \{0\}$.
Soit $f \in [D(A_H)]^{\perp}$. Comme $f \in H \simeq H' \subset V'$ (H est l'espace pivot), alors

$$< f, v >_{V',V} = (f, v)_H = 0 \quad \text{pour tout } v \in D(A_H),$$

Comme $f \in V'$, alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in V$ tel que $Au = f \in H$. Donc, $u \in D(A_H)$ et par suite $< f, u >_{V',V} = 0$. D'où,

$$< Au, u >_{V',V} = a(u, u) = 0.$$

Comme a est coercive sur $V \times V$, alors $u = 0$ et par suite $f = Au = 0$.

Preuve (suite)

$b)$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D(A_H)$ telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } H \quad \text{et} \quad Au_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } H.$$

Comme $H \hookrightarrow V'$ avec injection continue alors

$$Au_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } V'.$$

Comme A^{-1} est continue de V' dans V, alors

$$A^{-1}(Au_n) = u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A^{-1}f \quad \text{dans } V.$$

Donc, $u = A^{-1}f \in V$. D'où, $Au = f \in H$ et par suite $u \in D(A_H)$.

Preuve (suite)

(iii) Il est évident que $(.,.)_{D(A_H)}$ est un produit scalaire. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $D(A_H)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans H et donc elles convergent dans H. En utilisant le fait que A_H est de graphe fermé, on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $D(A_H)$.
(iv) A_H est bijective d'après (i) et est linéaire. Montrons que A_H est continue de $D(A_H)$ dans H.
Soit $u \in D(A_H)$, alors

$$\|A_H u\|_H = \|Au\|_H \leq \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2} = \|u\|_{D(A_H)}.$$

Donc, A_H est continue et par suite c'est un isomorphisme de $D(A_H)$ muni de la norme $\|.\|_{D(A_H)}$ dans H. $\square$

Remarque

Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a

$$\|A_H^{-1}\| \leq \left(1 + \left(\frac{c_1 c_2}{\alpha}\right)^2\right)^{1/2}$$

où c_1 et c_2 sont respectivement les constantes de la continuité des deux injections $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$.
En effet, soit $u \in D(A_H)$. Alors, en utilisant l'injection continue $V \hookrightarrow H$, on obtient

$$\|u\|^2_{D(A_H)} = \|u\|^2_H + \|Au\|^2_H \leq c_1^2 \|u\|^2_V + \|A_H u\|^2_H.$$

Remarque (suite)

Comme $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\alpha}$ et l'injection $H \hookrightarrow V'$ est continue, alors

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|Au\|_{V'} \leq \frac{c_2}{\alpha}\|Au\|_H = \frac{c_2}{\alpha}\|A_H u\|_H.$$

Donc

$$\|u\|^2_{D(A_H)} \leq \left(\frac{c_1 c_2}{\alpha}\right)^2 \|A_H u\|^2_H + \|A_H u\|^2_H = \left(1 + \left(\frac{c_1 c_2}{\alpha}\right)^2\right) \|A_H u\|^2_H.$$

D'où

$$\|u\|_{D(A_H)} \leq \left(1 + \left(\frac{c_1 c_2}{\alpha}\right)^2\right)^{1/2} \|A_H u\|_H.$$

Par suite
$$\|A_H^{-1}\| \leq \left(1 + \left(\frac{c_1 c_2}{\alpha}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Définition

Soient V un espace normé et A un opérateur défini sur V à valeurs dans V'. On dit que

1) *A est monotone de V dans V', si* $< Au - Av, u - v >_{V',V} \geq 0 \quad \forall u, v \in V$.

2) *A est monotone stricte de V dans V', s'il est monotone et*

$$< Au - Av, u - v >_{V',V} = 0 \Longleftrightarrow u = v.$$

3) *A est fortement monotone de V dans V', s'il existe $C > 0$ et $p \geq 1$ tels que*

$$< Au - Av, u - v >_{V',V} \geq C\|u - v\|^p \quad \forall u, v \in V.$$

4) *A est borné, s'il transforme tout borné en un borné.*

5) *A est hémicontinu, si pour tous $u, v, w \in V$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\lambda \longrightarrow < A(u + \lambda v), w >_{V',V}$ est continue.*

Lemme

Soit V un espace de Banach réflexif sur $\mathbb{R}$. Soit A un opérateur monotone, hémicontinu et borné de V dans V'. Alors, A est continu de V fort dans V' faible.

Preuve

Soit $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans V fort. Montrons que $Au_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} Au$ dans V' faible, c'est à dire que

$$< Au_n, v > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < Au, v > \qquad \forall v \in V.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $y \in V$ tel que $< Au_n, y > \not\longrightarrow < Au, y >$.

Preuve (suite)

Comme A est borné, alors $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans V' qui est réflexif, d'où on peut extraire une sous suite $(Au_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $Au_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ dans V' faible.

Comme A est monotone, alors

$$< Au_{n_k} - Av, u_{n_k} - v > \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Comme $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans V fort et $Au_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ dans V' faible, alors

$$< Au_{n_k}, u_{n_k} - v > \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} < f, u - v > \quad \forall v \in V$$

et

$$< Av, u_{n_k} - v > \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} < Av, u - v > \quad \forall v \in V.$$

Preuve (suite)

D'où
$$< f - Av, u - v > \geq 0 \quad \forall v \in V.$$
Soit $w \in V$ quelconque. Alors, en prenant $v = u - \lambda w$ où $\lambda > 0$, on obtient
$$< f - A(u - \lambda w), w > \geq 0 \quad \forall \lambda > 0.$$
Et en prenant $v = u + \lambda w$ où $\lambda > 0$, on obtient
$$< f - A(u + \lambda w), w > \leq 0 \quad \forall \lambda > 0.$$
En utilisant le fait que A est hémicontinu et en faisant tendre λ vers 0 dans les deux inégalités précédentes, on obtient
$$< f - Au, w > = 0.$$

Preuve (suite)

Ceci pour tout $w \in V$. Donc, $f = Au$. C'est à dire, $Au_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} Au$ dans V' faible. D'où, en particulier

$$< Au_{n_k}, y > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < Au, y > .$$

Ce qui est absurde. Donc, $Au_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} Au$ dans V' faible. La preuve est terminée. $\square$

Théorème de Brouwer

Théorème

Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^N$ et soit T une fonction continue de K dans K. Alors, T admet un point fixe.

Lemme

Soit F une application continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ telle que

$$\exists\, r > 0 \ \textit{tel que}\ (F(x), x) \geq 0 \ \textit{pour tout}\ \|x\| = r.$$

Alors, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $\|x_0\| \leq r$ et $F(x_0) = 0$.

Preuve

On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $x \in \overline{B(0,r)},\ F(x) \neq 0$.
Considérons l'application T définie sur $\overline{B(0,r)}$ par

$$T(x) = -r\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

Preuve (suite)

Alors, T est à valeurs dans $\overline{B(0,r)}$ et est continue, donc d'après le théorème de Brouwer, elle admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $y \in \overline{B(0,r)}$ vérifiant

$$y = T(y) = -r\frac{F(y)}{\|F(y)\|}.$$

D'où,

$$\|y\| = r \text{ et } (F(y), y) = (F(y), T(y)) = \left(F(y), -r\frac{F(y)}{\|F(y)\|}\right) = -r\|F(y)\| < 0.$$

Ce qui est absurde. Ceci termine la preuve. $\square$

Théorème de Minty-Browder

Théorème

Soit V un espace de Banach réflexif et séparable sur $\mathbb{R}$. Soit A un opérateur monotone, hémicontinu et borné de V dans V' et coercif au sens suivant

$$\lim_{\|v\| \to +\infty} \frac{< Av, v >}{\|v\|} = +\infty.$$

Alors, A est surjectif, c'est à dire

$$\forall f \in V', \; \exists u \in V \;\; \textit{tel que} \;\; Au = f \;\; \textit{dans} \; V'.$$

Si de plus, A est strictement monotone, alors A est bijectif.

Preuve

Elle va se faire en deux étapes.
Etape 1. L'unicité.
Supposons que A est strictement monotone.
Soit $f \in V'$. Si u_1 et u_2 sont deux solutions, c'est à dire

$$Au_1 = Au_2 = f,$$

alors, $Au_1 - Au_2 = 0$ et par suite

$$< Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 >= 0.$$

D'où, $u_1 = u_2$.

Preuve (suite)

Etape 2. L'existence.

Elle se fait par une méthode d'approximation, appelée méthode de Galerkin.

Comme V est séparable, alors il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ libre et totale dans V, c'est à dire, elle est formée d'éléments linéairement indépendants et l'espace engendré par $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans V.

On note par V_m l'espace vectoriel engendré par $(w_1, \cdots, w_m)$ muni de la norme induite par celle de V. Comme V_m est de dimension finie, alors il est fermé et toutes les normes sur V_m sont équivalentes.

On munit V_m de la norme $\|.\|_{V_m}$ associée au produit scalaire défini par

$$\forall\, x,\, y \in V_m, \quad x = \sum_{k=1}^{m} x_k w_k, \quad y = \sum_{k=1}^{m} y_k w_k, \quad (x, y)_{V_m} = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k.$$

Donc, V_m est un espace de Hilbert.

Preuve (suite)

Soit $f \in V'$.
(i) Montrons qu'il existe $u_m \in V_m$ tel que

$$< Au_m, w_k >=< f, w_k > \quad \forall k = 1, \cdots, m. \qquad (1)$$

D'après le théorème de Riesz-Fréchet, pour tout élément $g \in V'_m$, il existe un unique élément $\phi_m^{-1}(g) \in V_m$ tel que

$$< g, x >= (x, \phi_m^{-1}(g))_{V_m} = (\phi_m^{-1}(g), x)_{V_m} \quad \text{pour tout } x \in V_m,$$

où ϕ_m est l'isomorphisme canonique de V_m dans V'_m.
En particulier, $Au_m - f \in V' \subset V'_m$ et donc l'équation (1) devient

$$< Au_m - f, w_k >= (\phi_m^{-1}(Au_m - f), w_k)_{V_m} = 0 \quad \forall k = 1, \cdots, m,$$

c'est à dire $\phi_m^{-1}(Au_m - f) = 0$.

Preuve (suite)

On considère maintenant l'application F définie par

$$F(x) = \phi_m^{-1}(Ax - f) \quad \text{pour tout } x \in V_m.$$

Il est clair que $F(x) \in V_m$. Montrons que F est continue de V_m dans V_m. Soit $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans V_m. Alors

$$Ax_n - f \rightharpoonup Ax - f \;\text{ faible dans } V_m'.$$

Comme ϕ_m^{-1} est linéaire continue de V_m' dans V_m, alors

$$\phi_m^{-1}(Ax_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_m^{-1}(Ax - f) \quad \text{dans } V_m.$$

C'est à dire

$$F(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(x) \quad \text{dans } V_m.$$

Preuve (suite)

Par suite F est continue de V_m dans V_m.
De plus, pour tout $x \in V_m \subset V$, on a

$$\begin{aligned}(F(x), x) = (\phi_m^{-1}(Ax - f), x)_{V_m} &= < Ax - f, x > \\ &\geq < Ax, x > - \|f\|_{V'} \|x\|_V \underset{\|x\|_V \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.\end{aligned}$$

D'où, en utilisant le fait que la norme induite par V et la norme $\|.\|_{V_m}$ sont équivalentes sur V_m ,

$$\exists\, r > 0 \;\text{ tel que } (F(x), x) \geq 0 \;\text{ pour tout }\; \|x\|_{V_m} = r.$$

Par suite, il existe $u_m \in V_m$ tel que $F(u_m) = 0$, c'est à dire u_m est solution de (1).

Preuve (suite)

(ii) Estimation à priori.

Comme $u_m \in V_m$, alors $u_m = \sum_{k=1}^{m} x_{m_k} w_k$ où $x_{m_k} \in \mathbb{R}$.

D'après l'équation (1), on a

$$< Au_m, u_m >=< f, u_m > .$$

D'où

$$< Au_m, u_m >\leq \|f\|_{V'} \|u_m\|_V.$$

Et comme

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{< Av, v >}{\|v\|} = +\infty,$$

alors nécessairement $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans V. Or A est borné, d'où $(Au_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans V'.

Preuve (suite)

(iii) Passage à la limite.
Comme V est réflexif alors V' est réflexif ; on peut donc extraire deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Au_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } V \text{ faible et } Au_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} \varphi \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Montrons que $\varphi = Au = f$. Pour cela, on se fixe $j \in \mathbb{N}$, alors pour tout $k \geq j$, on a

$$< Au_k, w_j >=< f, w_j > .$$

Donc, en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$< \varphi, w_j >=< f, w_j > .$$

Ceci pour tout $j \in \mathbb{N}$. Mais la suite $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est totale dans V, d'où $< \varphi, v >=< f, v >$ pour tout $v \in V$. Par suite, $\varphi = f$.

Preuve (suite)

D'autre part, A est monotone, d'où pour tout $v \in V$,

$$0 \leq < Au_k - Av, u_k - v >_{V',V} = < Au_k, u_k >_{V',V} - < Au_k, v >_{V',V} - < Av, u_k - v >_{V',V}$$
$$= < f, u_k > - < Au_k, v >_{V',V} - < Av, u_k - v >_{V',V} .$$

Donc, en passant à la limite quand $k \to +\infty$, on obtient pour tout $v \in V$,

$$0 \leq < f, u > - < f, v >_{V',V} - < Av, u - v >_{V',V} = < f - Av, u - v >_{V',V} .$$

Soit $w \in V$. Prenons $v = u - \lambda w$ où $\lambda > 0$, alors

$$< f - A(u - \lambda w), w >_{V',V} \geq 0 \quad \forall \lambda > 0.$$

Preuve (suite)

En utilisant le fait que A est hémicontinu et en faisant tendre λ vers 0, on déduit que

$$< f - Au, w >_{V',V} \geq 0.$$

Ceci a lieu pour tout $w \in V$. En changeant w en $-w$, on obtient

$$< f - Au, w >_{V',V} = 0 \quad \text{pour tout } w \in V.$$

D'où, $f = Au$, ce qui prouve que A est surjectif.
La preuve est terminée. $\square$

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. On se propose d'étudier le problème de Dirichlet suivant

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \quad (1) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \quad (2) \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur Ω et $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

Solution classique

Définition

Soit $f \in C(\overline{\Omega})$.
On appelle solution classique du problème de Dirichlet (P), toute fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant (1) et (2).

Si f n'est pas continue sur $\overline{\Omega}$, pour résoudre le problème (P), on va appliquer le théorème de Lax-Milgram en le ramenant à un poblème variationnel.
Pour déterminer la forme bilinéaire a, on fait un calcul formel.
Supposons que u est régulière. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors, on a

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\varphi\,d\sigma + \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Application au problème de Dirichlet

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\varphi = 0$ sur $\Gamma = \partial\Omega$, par suite

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx + \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Il faut signaler que la formule précédente est bien définie si on a seulement $u,\ \varphi \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$. D'où la définition suivante.

Solution faible

Définition

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$.
On appelle solution faible du problème de Dirichlet (P), toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$< \nabla u, \nabla v >_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} + < u, v >_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} = < f, v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} .$$

Remarque

Si $f \in L^2(\Omega)$, la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ est définie par

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega u(x) v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Existence et unicité de la solution faible

Théorème

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Alors, le problème de Dirichlet (P) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$. De plus, u minimise dans $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(\Omega)} - < f, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} .$$

Application au problème de Dirichlet

Preuve

On pose

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega u(x)v(x)\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_\Omega u(x)v(x)\, dx \qquad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

et

$$L(v) = < f, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

La formulation faible du problème (P) devient : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Nous allons vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

Preuve (suite)

L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ est un espace de Hilbert puisqu'il est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$.
$L = f$ est bien une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ (par définition de $H^{-1}(\Omega)$).
Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
Soient u, $v \in H_0^1(\Omega)$, alors u, $v \in L^2(\Omega)$ et ∇u, $\nabla v \in L_N^2(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $uv \in L^1(\Omega)$ et $\nabla u \nabla v = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire.

Preuve (suite)

De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = \left|(u,v)_{H^1(\Omega)}\right| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega).$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega u(x)v(x)\,dx = < f, v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Application au problème de Dirichlet

Preuve (suite)

De plus, comme a est symétrique, u est caractérisé par

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - < f, u >_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)} = \min_{v \in H^1_0(\Omega)} \left[\frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(\Omega)} - < f, v >_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)} \right].$$

C'est à dire

$$J(u) = \min_{v \in H^1_0(\Omega)} J(v).$$

La preuve est terminée. $\square$

Remarque

Sous les hypothèses du théorème précédent, on a l'estimation à priori suivante

$$\|u\|_{H^1((\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

En effet, on a

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = a(u,u) = < f, u >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'où, le résultat.

Proposition

Soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors, la solution u du problème de Dirichlet (P) appartient à $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.