UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
TÉTOUAN

COURS

CONTRÔLE OPTIMAL

ARIJ BOUZELMATE

Master : Mathématiques Appliquées à la Finance

Année Universitaire : **2018-2019**

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

L'objectif de ce polycopié est de présenter la théorie du contrôle optimal, cette théorie étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés), c'est à dire des systèmes dynamiques dépendant d'une variable t qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou d'un contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final en respectant éventuellement certains critères.

Du point de vue mathématique, un système contrôlé est un système dynamique dont l'état est décrit par une fonction inconnue dite fonction d'état (ou variable d'état) qui vérifie une ou plusieurs équations différentielles ou équations intégrales, équations stochastiques, etc.

Le cours est organisé en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à présenter quelques rappels d'algèbre linéaire qui nous seront utiles par la suite, comme l'exponentielle d'une matrice, la réduction des endomorphismes et l'étude des systèmes linéaires.

Le deuxième chapitre comporte la présentation de la théorie du contrôle optimal pour des systèmes linéaires, ainsi que la théorie du linéaire-quadratique et ses applications. Dans le cas de dimension finie, il existe pour les systèmes de contrôle linéaires une caractérisation très simple de la contrôlabilité, dûe à Kalman. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est plus complexe.

Dans le dernier chapitre, on étudie la théorie du contrôle optimal pour des systèmes non linéaires et on donne les techniques d'analyse nécessaires pour résoudre des problèmes de contrôle optimal qui se décomposent en deux parties, le problème de contrôlabilité et le problème du côut minimal.

Bonne Lecture
Arij Bouzelmate

CHAPITRE 1

RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

1 Exponentielle d'une matrice

Soit $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $\| \;\; \|$ une norme multiplicative (matricielle) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ (i.e. elle vérifie en plus l'inégalité : $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$; (par exemple les normes d'opérateurs sont multiplicatives).

Définition 1.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. On définit l'exponentielle de la matrice A par*

$$\exp(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

C'est une série normalement convergente dans le Banach $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, vu que

$$\left\| \sum_{k=1}^{q} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=1}^{q} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=1}^{q} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \exp(\|A\|).$$

Proposition 1.2.

– *Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, on a $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{k})$, et $(\exp(A))^{-1} = exp(-A)$.*

– *L'application exponentielle est $\mathbb{k}$-analytique (et donc en particulier est de classe C^∞ sur le corps $\mathbb{k}$).*

– *La différentielle de Fréchet $D(\exp())$ de l'application exponentielle en 0 est égale à l'identité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ c'est à dire*

$D(\exp(0)) = I$.

– *Pour toutes matrices* $A, B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$, *qui* ***commutent*** $(AB = BA)$, *on a*

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

– *Si* $P \in GL_n(\Bbbk)$, *alors* $P\exp(A)P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$.

– *Pour* $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$, *l'application* $f(t) = \exp(tA)$ *est dérivable, et* $f\,'(t) = A\exp(tA)$.

2 Réduction des endomorphismes

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$ est de dimension n^2 sur $\Bbbk$, donc les éléments $I, A, ..., A^{n^2}$ sont linéairement **dépendants**. Par conséquent il existe des polynômes P annulateurs de A, c'est à dire tels que $P(A) = 0$. L'anneau $\Bbbk[X]$ étant principal, l'idéal des polynômes annulateurs de A admet un unique générateur normalisé, i.e. un unique polynôme de plus petit degré, dont le coefficient dominant est égal à 1, annulant A ; on l'appelle polynôme minimal de la matrice A, noté π_A.

Par ailleurs, le polynôme caractéristique de A, noté χ_A, est défini par

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Théorème 2.1 (Théorème de Hamilton-Cayley)**.** *$\chi_A(A) = 0$.*

En particulier, le polynôme minimal π_A divise le polynôme caractéristique χ_A. Notons que degré $(\chi_A) = n$ et $\deg \pi_A \leq n$.

Exemple 2.1. *Pour une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ nilpotente, i.e. il existe un entier $p > 1$ (p le plus petit) tel que $N^p = 0$, on a nécessairement $p \leq n$, $\pi_N(\lambda) = \lambda^p$ et $\chi_N(\lambda) = \lambda^n$.*

Exemple 2.2. *Pour une matrice compagnon, c'est à dire une matrice de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\pi_A(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

*Le scalaire $\lambda \in \Bbbk$ est dit valeur propre s'il existe un vecteur non nul $v \in \Bbbk^n$, appelé vecteur propre, tel que $Av = \lambda v$. L'espace **propre** associé à la valeur propre λ est défini par*

$$E(\lambda) = ker(A - \lambda I);$$

c'est l'ensemble des vecteurs propres de A associés à la même valeur propre λ. Lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, les valeurs propres de A sont exactement les racines du polynôme caractéristique χ_A. En particulier on a

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - \lambda_i)^{m_i} \ \ et \ \ \pi_A(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - \lambda_i)^{s_i}$$

avec $s_i \leq m_i$. L'entier s_i (resp. m_i) est appelé ordre de nilpotence (resp. multiplicité) de la valeur propre λ_i.

*L'espace **caractéristique** de la valeur propre λ_i est défini par*

$$N(\lambda_i) = \ker(A - \lambda_i I)^{s_i}.$$

Théorème 2.2 (Théorème de décomposition des noyaux)**.** *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ et $P \in \mathbb{k}[X]$ un polynôme tel que*

$$P(X) = \prod_{i=1}^{r} P_i(X)$$

où les polynômes P_i sont premiers entre eux deux à deux. Alors

$$\ker P(A) = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \ker P_i(A).$$

De plus, chaque sous-espace $\ker P_i(A)$ est invariant par A, i.e $A(\ker P_i(A)) \subset \ker P_i(A))$, et la projection p_i sur $\ker P_i(A)$ parallèlement à $\underset{j\neq i}{\oplus} \ker P_j(A)$ est un polynôme en A. ($p_i = Q(A)$, Q étant un polynôme)

En appliquant ce théorème au polynôme minimal de A (matrice précédente : matrice compagnon), on obtient, lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}^n = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} N(\lambda_i).$$

Notons que $N(\lambda_i) = \ker(X - \lambda_i)^{s_i} = \ker(X - \lambda_i)^{m_i}, \ s_i = m_i$.

La restriction de A à $N(\lambda_i)$ est de la forme $\lambda_i I + N_i$, où N_i est une matrice nilpotente d'ordre s_i. On peut alors montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ admet une unique décomposition $A = D+N$, où D est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, N est nilpotente, et de plus $DN = ND$ (décomposition $D + N$).

On peut préciser ce résultat avec la théorie de Jordan.

Théorème 2.3 (Décomposition de Jordan)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$; on suppose que π_A est scindé sur $\mathbb{k}$ (ce qui est toujours le cas sur $\mathbb{C}$) tel que $\pi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{s_i}$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{k})$ telle que*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$$

où les matrices A_i sont diagonales par blocs

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & J_{i,e_i} \end{pmatrix}$$

et où les matrices $J_{i,k}$, $1 \leq i \leq r,\ 1 \leq k \leq e_i$, sont des blocs de Jordan, i.e. des matrices carrées de la forme

$$J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

n'ayant pas forcément toutes le même ordre $|J_{i,k}|$. Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, on a $e_i = \dim E(\lambda_i)$, et $\max\limits_{1 \leq k \leq e_i} |J_{i,k}| = s_i$.

3 Etude des systèmes linéaires

On considère le système linéaire

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t), \quad t \in I =]0, T[\tag{3.1}$$

où $Y : I \to \mathbb{k}^n$ est l'inconnue, $A : I \to \mathbb{k}^{n\times n}$ est une matrice à coefficients continus, $b : I \to \mathbb{k}^n$ est un vecteur à coefficients continus.

Théorème 3.1. *Pour chaque $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{k}^n$ il passe une seule solution de (3.1) définie sur I.*

Conséquence.

1) L'ensemble des solutions de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t)$ noté S_0, est un espace vectoriel de dimension n.

2) L'ensemble des solutions de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t)$ est de la forme $Y_0 + Y_1$ où $Y_0 \in S_0$ et Y_1 est une solution particulière de $Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t)$.

3.1 Etude de $Y'(t) = AY(t)$, A ne dépend pas de t

Soit A diagonalisable. Cela veut dire que A admet n vecteurs propres V_i linéairement indépendents, associés à n valeurs propres $\lambda_i \in K$, non nécessairement distinctes ; cela est aussi équivalent à dire que $A = PDP^{-1}$ où P (matrice de passage de la base canonique à la base propre) est une matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de A et D est une matrice diagonale ayant sur la diagonale les valeurs propres de A. Alors, les n fonctions $t \to \exp(\lambda_i t).Vi$ sont, à chaque instant t, linéairement indépendents et forment donc une base pour S_0. Cela implique que

(a) La solution générale de $Y'(t) = AY(t)$ est $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\lambda_i t)V_i$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$ ou également $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\lambda_i(t - t_0))V_i$.

(b) La solution de $Y'(t) = AY(t)$ qui passe par (t_0, Y_0) est $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\lambda_i(t - t_0))V_i$. où α_i sont tels que $Y(t_0) = Y_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$.

CHAPITRE 2

CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES LINÉAIRES

1 Problème étudié

Le problème général étudié dans cette partie est le suivant. Soient n et m deux entiers naturels non nuls, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient A, B et r trois applications L^∞ sur I (en fait, localement intégrables (L^1_{loc}) suffit) à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$).

$$A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$$

$$r : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) & \forall t \in I \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur I , à valeurs dans le sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. ($u \in L^\infty_{loc}(I, \Omega)$) .

Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour tout contrôle $u \in L^{\infty}_{loc}(I, \Omega)$, le système (1.1) admet une unique solution $x(.\,) : I \to \mathbb{R}^n$, absolument continue.

Avant de continuer l'étude du problème considéré, on donne quelques rappels sur la résolvante.

Définition 1.1. *On appelle résolvante du problème (1.1) la solution du problème de Cauchy*

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0) = A(t)R(t, t_0), \;\; R(t_0, t_0) = Id$$

où $R(t, t_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1.2. *La résolvante possède les propriétés suivantes :*

$$R(t_2, t_0) = R(t_2, t_1).R(t_1, t_0).$$

$$\big(\Rightarrow R(0, t) = R(t, 0)^{-1}\big)$$

Si $\Delta(t, t_0) = \det R(t, t_0)$, *on a*

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}(t, t_0) = trace A(t).\triangle(t, t_0), \;\; \Delta(t_0, t_0) = 1.$$

La solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

est donnée par

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds.$$

Remarque 1.1. *Lorsque* $t_0 = 0$, *on note plutôt* $M(t) = R(t, 0)$. *La formule de variation de la constante s'écrit alors*

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t)\int_{0}^{t} M(s)^{-1}b(s)ds.$$

Exemple 1.1. *(Cas des systèmes autonomes).*

Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors, dans ce cas, la résolvante est* $M : t \to \exp(tA)$, *et la solution de ce problème est*

$$x : t \longrightarrow \exp(tA)x_0.$$

Retour au problème étudié

la solution $x(\cdot)$ du système (1.1) associée au contrôle u est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &= M(t)x_0 + M(t)\int_0^t M(-s)(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &= M(t)x_0 + M(t)\int_0^t M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$, l'application $x(.)$ dépend de u. Donc si on change la fonction u, on obtient une autre trajectoire $t \to x(t)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Deux questions se posent alors naturellement :

– Etant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un contrôle u tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne x_0 à x_1 en un temps fini T ? **C'est le problème de contrôlabilité.**

– Si la condition précédente est remplie, existe-t-il un contrôle joignant x_0 à x_1, et qui est de plus minimise une certaine fonctionnelle $C(u)$? **C'est le problème de contrôle optimal.** La fonctionnelle $C(u)$ est un critère d'optimisation, on l'appelle le coût. Par exemple ce coût peut être égal au temps de parcours ; dans ce cas c'est le problème du temps minimal.

Dans la suite on donnera des théorèmes qui vont répondre à ces questions, et permettre en particulier de résoudre le problème de l'oscillateur harmonique linéaire.

2 Contrôlabilité

2.1 Ensemble accessible

Considérons le système contrôlé

$$\left.\begin{array}{l} \forall t \in I, \;\; x\,'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0 \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

Définition 2.1. *L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par*

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T) \mid u \in L^\infty([0, T], \Omega)\}$$

où $x_u(.)$ est la solution du système (2.1) associée au contrôle u.

Autrement dit $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (2.1) au temps T, lorsqu'on fait varier le contrôle u. Pour la cohérence on pose $Acc(x_0, 0) = \{x_0\}$.

2.1.1 Topologie des ensembles accessibles

Théorème 2.1. *Considérons le système de contrôle linéaire dans $\mathbb{R}^n$*

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est convexe et compact. Soient $T > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $t \in [0, T]$, $Acc(x_0, t)$ est convexe, compact et varie continûment avec t sur $[0, T]$.

Démonstration.

• **La convexité** de $Acc(x_0, t)$.

Soient $x_1^1,\ x_2^1 \in Acc(x_0, t)$ et $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que $\lambda x_1^1 + (1 - \lambda)x_2^1 \in Acc(x_0, t)$. Par définition, pour $i = 1, 2$, il existe un contrôle $u_i : [0, t] \to \Omega$ tel que la trajectoire $x_i(.)$ associée au contrôle u_i vérifie

$$x_i(0) = x_0,\;\; x_i(t) = x_i^1,\;\; x_i'(s) = A(s)x_i(s) + B(s)u_i(s) + r(s).$$

D'après la formule de variation de la constante,

$$x_i^1 = x_i(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u_i(s) + r(s))ds.$$

Pour tout $s \in [0,t]$, posons $u(s) = \lambda u_1(s) + (1-\lambda)u_2(s)$. Le contrôle u est dans $L^\infty([0,t],\Omega)$ car Ω est convexe, puisque $L^\infty([0,t],\Omega) \subset L^2([0,t],\Omega)$ on a $u \in L^2([0,t],\Omega)$. Soit $x(\cdot)$ la trajectoire associée à u. Alors, par définition de $Acc(x_0,t)$, on a

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u(s) + r(s))ds \ \in Acc(x_0,t).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_2^1 &= \lambda x_1(t) + (1-\lambda)\,x_2^1(t)\\ &= \lambda M(t)x_0 + (1-\lambda)M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)(\lambda u_1(s) + (1-\lambda)u_2(s)) + \lambda r(s) + (1-\lambda)r(s))ds\\ &= M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u(s) + r(s))ds = x(t).\end{aligned}$$

Donc

$$\lambda x_1^1 + (1-\lambda)\,x_2^1 \in Acc(x_0,t),$$

ce qui prouve la convexité de $Acc(x_0,t)$.

• **La Compacité** de $Acc(x_0,t)$.

Cela revient à montrer que toute suite $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $Acc(x_0,t)$ admet une sous-suite convergente.

Pour tout entier n, on note u_n un contrôle reliant x_0 à x_n^1 en temps t, et soit $x_n(.)$ la trajectoire correspondante.

On a donc

$$x_n^1 = x_n(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u_n(s) + r(s))ds. \tag{2.2}$$

Par définition, les contrôles u_n sont à valeurs dans le compact Ω, et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0,t],\mathbb{R}^m)$ qui est un espace **réflexif**, on en déduit que, à sous-suite près, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un contrôle $u \in L^2([0,t],\mathbb{R}^m)$. Comme Ω est supposé convexe et compact, on a de plus $u \in L^2([0,t],\Omega)$. Par ailleurs, de la formule de représentation (2.2) on déduit aisément que la suite $(x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$. De plus, de l'égalité $x_n' = Ax_n + Bu_n + r$, et en utilisant le fait que

$A,\ B$ et r sont dans L^∞ sur $[0,T]$, on conclut que la suite $(x'_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée dans $L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$, autrement dit la suite $(x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1([0,t],\mathbb{R}^n)$. Mais cet espace de Sobolev est réflexif et se plonge de manière compacte dans $\mathcal{C}^0([0,t],\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie uniforme, on conclut que, à sous-suite près, la suite $(x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application $x(\cdot)$ sur $[0,t]$. En passant à la limite dans (2.2) il vient alors

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u(s)+r(s))ds$$

et en particulier

$$\lim_{i\to\infty} x^1_{n_i} = \lim_{i\to\infty} x_{n_i}(t) = x(t) \in Acc(x_0,t),$$

ce qui prouve la compacité.

• Montrons enfin la continuité de $Acc(x_0,t)$ par rapport à t , Soit $\varepsilon > 0$. On va chercher $\delta > 0$ tel que

$$\forall t_1,\ t_2 \in [0,T]\ \ |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \Delta(Acc(t_1), Acc(t_2)) \leq \varepsilon,$$

où on note pour simplifier $Acc(t) = Acc(x_0,t)$, et où

$$\Delta(Acc(t_1), Acc(t_2)) = \sup\left(\sup_{y\in Acc(t_2)} d(y, Acc(t_1), \sup_{y\in Acc(t_1)} d(y, Acc(t_2)\right). \tag{2.3}$$

Par la suite, on suppose $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. Il suffit de montrer que

1. $\forall y \in Acc(t_2),\qquad d(y, Acc(t_1)) \leq \varepsilon,$

2. $\forall y \in Acc(t_1),\qquad d(y, Acc(t_2)) \leq \varepsilon.$

Montrons juste le premier point (2. étant similaire). Soit $y \in Acc(t_2)$. Il suffit de montrer que

$$\exists z \in Acc(t_1)\ \text{ tel que }\ d(y,z) \leq \varepsilon.$$

Par définition de $Acc(t_2)$, il existe un contrôle $u \in L^2([0,T],\Omega)$ tel que la trajectoire associée à u, partant de

x_0, vérifie $x(t_2) = y$. On va voir que $z = x(t_1)$ convient. En effet on a

$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) &= M(t_2)x_0 + \int_0^{t_2} M(t_2)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &\quad - \left(M(t_1)x_0 + \int_0^{t_1} M(t_1)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds\right) \\ &= M(t_2)\int_{t_1}^{t_2} M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &\quad + (M(t_2) - M(t_1))\left(x_0 + \int_0^{t_1} M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds\right). \end{aligned}$$

Si $|t_1 - t_2|$ est petit, le premier terme de cette somme est petit par continuité de l'intégrale, le deuxième terme est petit par continuité de $t \longrightarrow M(t)$. D'où le résultat. □

Remarque 2.2. *Pourtant, et ce résultat est surprenant, la conclusion de ce théorème est encore vraie si Ω n'est pas convexe. Ceci implique en particulier le résultat suivant.*

Corollaire 2.2. *Supposons que Ω soit compact. Si on note $Acc_\Omega(x_{0,}t)$ l'ensemble accessible depuis x_0 en temps t pour des contrôles à valeurs dans Ω, alors on a*

$$Acc_\Omega(x_{0,}t) = Acc_{conv\Omega}(x_{0,}t),$$

où $conv(\Omega)$ est l'enveloppe convexe de Ω.

En particulier, on a $Acc_{\partial\Omega}(x_0,t) = Acc_\Omega(x_{0,}t) = Acc_{conv\Omega}(x_{0,}t)$, où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω.

Remarque 2.3. *Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solution de $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ x(0) = 0$, s'écrit*

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t M(t-s)B(s)u(s)ds \\ &= \int_0^t M(t)M(-s)B(s)u(s)ds = M(t)\int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds. \end{aligned}$$

Donc x est linéaire en u.

Cette remarque nous mène à la proposition suivante.

Proposition 2.3. *On suppose que $r = 0$, $x_0 = 0$ et $\Omega = \mathbb{R}^m$. Alors, pour tout $t > 0$, l'ensemble $Acc(0,t)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Si on suppose de plus que $A(t) \equiv A$ *et* $B(t) \equiv B$ *sont constantes (système autonome), alors, pour tous* $0 < t_1 < t_2$*, on a* $Acc(0,t_1) \subset Acc(0,t_2)$.

Démonstration. Soient $x_1^1,\ x_2^1 \in Acc(0,T)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour $i = 1, 2$, il existe par définition un contrôle u_i et une trajectoire associée $x_i(.)$ vérifiant $x_i(t) = x_i^1$.

D'où

$$x_i^1 = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_i(s) ds$$

Pour tout $s \in [0,T]$, posons $u(s) = \lambda u_1(s) + \mu u_2(s)$. Soit x la solution correspondante à u. Alors

$$x(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds.$$

Donc $x(t) \in Acc(0,t)$, de plus

$$\begin{aligned} x(t) &= M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) (\lambda u_1(s) + \mu u_2(s)) ds \\ &= \lambda M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_1(s) ds + \mu M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_2(s) ds \\ &= \lambda x_1^1 + \mu x_2^1. \end{aligned}$$

Ceci montre que $Acc(0,t)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Pour la deuxième partie de la proposition, soit $x_1^1 \in Acc(0,t_1)$. Par définition, il existe un contrôle u_1 sur $[0,t_1]$ tel que la trajectoire associée $x_1(.)$ vérifie $x_1(t_1) = x_1^1$. D'où

$$x_1^1 = x_1(t_1) = M(t_1) \int_0^{t_1} M(s)^{-1} B(s) u_1(s) ds.$$

De plus on a ici $M(t) = e^{tA}$. Définissons u_2 sur $[0,t_2]$ par

$$\begin{cases} u_2(t) = 0 \ \text{ si } \ 0 \le t \le t_2 - t_1 \\ u_2(t) = u_1(t_1 - t_2 + t) \ \text{ si } \ t_2 - t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$

Soit $x_2(.)$ la trajectoire associée à u_2 sur $[0,t_2]$. Alors

$$\begin{aligned} x_2(t_2) &= M(t_2)\int_0^{t_2} M(-t)Bu_2(t)dt \\ &= M(t_2)\int_{t_2-t_1}^{t_2} M(-t)Bu_2(t)dt \end{aligned}$$

car u_2 est nulle sur $[0,t_2-t_1]$.

On pose $t = s + t_2 - t_1 \Leftrightarrow s = t + t_1 - t_2$

$$\begin{aligned} x_2(t_2) &= M(t_2)\int_0^{t_1} M(-t_2+t_1-s)Bu_2(s+t_2-t_1)ds \\ &= M(t_2)\int_0^{t_1} M(-t_2)M(t_1)M(-s)Bu_2(s+t_2-t_1)ds \\ &= M(t_1)\int_0^{t_1} M(-s)Bu_2(s+t_2-t_1)ds \\ &= M(t_1)\int_0^{t_1} M(-s)Bu_1(s)ds = x_1^1. \end{aligned}$$

Ainsi, $x_1^1 \in Acc(0,t_2)$. □

Remarque 2.4. *Dans le cadre de la deuxième partie de la proposition, on note* $Acc(0) = \underset{t\geq 0}{\cup} Acc(0,t)$, *l'ensemble des points accessibles (en temps quelconque), c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$. *En effet, une union croissante de sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$ *est un sous-espace vectoriel.*

2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Définition 2.4. *(de la contrôlabilité).*

Le système contrôlé $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ *est dit contrôlable en temps* T *si* $Acc(x_0,T) = \mathbb{R}^n$, *c'est à dire, pour tous* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, *il existe un contrôle* u *tel que la trajectoire associée à* u *relie* x_0 *à* x_1 *en temps* T.

2.2.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

2.2.1.1 Cas sans contrainte sur le contrôle : Condition de Kalman

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Théorème 2.5. *On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle).*

Le système $x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est contrôlable (en temps T quelconque) si et seulement si la matrice

$$C = \left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right)$$

est de rang n.

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $rangC = n$ est appelée condition de Kalman.

Remarque 2.6. *La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0, alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

L'essentiel de la preuve du théorème 2.5 est contenu dans le lemme suivant.

Lemme 2.5. *La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire*

$$\begin{aligned}\Phi : \ L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longrightarrow \int_0^T (\exp(T-t)A)\, Bu(t)dt\end{aligned}$$

est surjective. C'est à dire

$$\left\{\int_0^T (\exp(T-t)A)\, Bu(t)dt, \ / \ u \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)\right\} = \Phi(L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)) = \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. (Du lemme) En fait, on va montrer : $rang(C) < n \Leftrightarrow \Phi$ n'est pas surjective.

$(\Rightarrow)$ Supposons tout d'abord que $rangC < n$, et montrons qu'alors Φ n'est pas surjective. L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que le produit $\psi C = 0$, (c'est à dire $\psi Cv = 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^m$), Par conséquent,

$$\psi B = \psi AB = \cdots = \psi A^{n-1}B = 0.$$

Or on sait que, d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, tels que

$$A^n = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit alors que $\psi A^n B = 0$ et en suite par récurrence immédiate que, pour tout entier k,

$$\psi A^k B = 0$$

et donc, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\psi \exp(tA) B = 0.$$

Par conséquent, pour tout contrôle u, on a

$$\psi \left(\int_0^T \left(\exp\left((T-t)A \right) \right) Bu(t)dt \right) = \psi \Phi(u) = 0.$$

Ce qui montre que Φ n'est pas surjective.

Réciproquement, si Φ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$ tel que pour **tout contrôle** u on ait

$$\int_0^T \psi \left(\exp(T-t)A \right) Bu(t)dt = 0.$$

Ceci implique que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\psi \left(\exp\left((T-t)A \right) \right) B = 0. \tag{2.4}$$

En $t = T$, on obtient $\psi B = 0$, en suite en dérivant (2.4) par rapport à t, puis en prenant $t = T$, on obtient $\psi AB = 0$. Ainsi, par dérivations successives, on obtient finalement

$$\psi B = \psi AB = \cdots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Donc $\psi C = 0$, et par la suite $rangC < n$. □

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème 2.5.

Démonstration. (Du théorème 2.5). Si la matrice C est de rang n, alors d'après le lemme l'application Φ est surjective, c'est à dire $\Phi(L^\infty[0,T],R^m) = \mathbb{R}^n$. Or, pour tout contrôle u, l'extrémité au temps T de la trajectoire associée à u est donnée par

$$x(T) = \exp(TA)x_0 + \int_0^T \exp((T-t)A)(Bu(t)+r(t))dt = \exp(TA)x_0 + \int_0^T \exp((T-t)A)r(t)dt + \Phi(u)$$

de sorte que l'ensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est

$$Acc(T,x_0) = \exp(TA)x_0 + \int_0^T \exp((T-t)A)r(t)dt + \Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n.$$

Ce qui montre que le système est contrôlable.

Réciproquement, si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable depuis x_0 défini par

$$x_0 = -\exp(-TA)\int_0^T \exp((T-t)A)r(t)dt.$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps T s'écrit

$$Acc(T,x_0) = \Phi(L^\infty)$$

et le système étant contrôlable, cet ensemble est égal à $\mathbb{R}^n$. Cela prouve que Φ est surjective, et donc, d'après le lemme, que la matrice C est de rang n. □

Remarque 2.7. *Si $x_0 = 0$ et si $r = 0$, la démonstration précédente est un peu simplifiée puisque dans ce cas, d'après la remarque 2.4, $Acc(0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

2.2.1.2 Cas avec contrainte sur le contrôle

Dans le théorème 2.5, on n'a pas mis de contrainte sur le contrôle. Cependant en adaptant la preuve on obtient aisément le résultat suivant.

Corollaire 2.6. *Sous la condition de Kalman précédente, si $r = 0$ et si 0 appartient à **l'interieur** de Ω, alors l'ensemble accessible $Acc(x_0, t)$ en temps t contient un voisinage du point $exp(tA)x_0$.*

Ce résultat découle de la continuité de l'application Φ.

Remarque 2.8. *Les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A. Par exemple il est clair que si*

1. *La condition de Kalman est remplie,*
2. *$r = 0$ et $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$,*
3. *Toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative (c'est à dire la matrice A est stable),*

alors tout point de $\mathbb{R}^n$ peut être conduit à l'origine en temps fini (éventuellement grand).

Dans le cas mono-entrée $m = 1$, on a un résultat plus précis que nous admettrons.

Théorème 2.9. *Soit $B \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur. Considérons le système $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$, avec $u(t) \in \Omega$. Alors tout point de $\mathbb{R}^n$ peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire (A, B) vérifie la condition de Kalman (c'est à dire la matrice $C = (B,\ AB,\ A^2B, \cdots,\ A^{n-1}B)$ est de rang n) et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.*

2.2.1.3 Similitude de systèmes, forme de Brunovski

Définition 2.7. *Les systèmes de contrôle linéaires $x_1' = A_1x_1 + B_1u$ et $x_2' = A_2x_2 + B_2u$ sont dits semblables (ou bien les paires (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont semblables) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A_2 = PA_1P^{-1}$ et $B_2 = PB_1$.*

Remarque 2.10. *On a alors $x_2 = Px_1$.*

Proposition 2.8. *Pour deux systèmes semblables $x_1' = A_1x_1 + B_1u$ et $x_2' = A_2x_2 + B_2u$, la propriété de Kalman est intrinsèque, c'est à dire*

$$(B_2, A_2B_2, \cdots, A_2^{n-1}B_2) = P(B_1, A_1B_1, \cdots, A_1^{n-1}B_1)$$

En particulier, le rang de la matrice de Kalman est invariant par similitude.

Proposition 2.9. *Soient* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, *la paire* (A, B) *est semblable à une paire* (A', B') *de la forme*

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_3 \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} B'_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $A'_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $B'_1 \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{R})$, *$r$ étant le rang de la matrice de Kalman de la paire* (A, B). *De plus, la paire* (A'_1, B'_1) *est contrôlable.*

Démonstration. (Question de choix d'une base).

Supposons que le rang r de la matrice de Kalman C de la paire (A, B) soit strictement plus petit que n (sinon il n'y a rien à montrer). Le sous-espace

$$F = ImC = ImB + ImAB + \cdots + ImA^{n-1}B \subset \mathbb{R}^n$$

est de dimension r. D'après le théorème d'Hamilton-Cayley il est clair que F est invariant par A ($A(ImB) = ImAB$). Soit G un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^n$, et soient $(f_1, \cdots, f_r)$ une base de F, et $(f_{r+1}, \cdots, f_n)$ une base de G.

Soit P la matrice de passage de la base $\{f_1, \cdots, f_n\}$ à la base canonique $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice relative à la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est A.

On note A' la matrice de φ relative à la base $\{f_1, \cdots, f_n\}$ qui vérifie $A' = PAP^{-1}$.

Puisque F est invariant par φ, on a

$$A' = PAP^{-1} = \overbrace{\begin{pmatrix} A'_1 & A'_3 \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix}}^{Af_j} f_i.$$

D'autre part, si x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, dont on note X ses coordonnées dans $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et X' ses coordonnées dans $\{f_1, \cdots, f_n\}$, X et X' vérifient $X' = PX$.

Puisque $ImB \subset F$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ PBx \in F$ (ses composantes sur $f_{r+1}, \cdots, f_n$ sont nulles) c'est à dire PB est de la forme :

$$B' = PB = \begin{pmatrix} B'_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on voit facilement que le rang de la matrice de Kalman de la paire (A'_1, B'_1) est égal à celui de la paire (A, B). □

Théorème 2.11. *(Forme de Brunovski)*

Si $m = 1$ et si la paire (A, B) est contrôlable, alors elle est semblable à la paire $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$, où

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et où les coefficients a_i sont ceux du polynôme caractéristique de A, c'est à dire

$$\chi_A(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Remarque 2.12. *Avec ces nouvelles matrices, le système $X' = \widetilde{A}X + \widetilde{B}u$ est alors équivalent à l'équation différentielle scalaire d'ordre n*

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x(t) = u(t)$$

où $x^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k.

Démonstration. Raisonnons par analyse et synthèse. On suppose qu'il existe une base $\{f_1, \cdots, f_n\}$ dans laquelle la paire (A, B) prend la forme $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$.

$B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, si B prend la forme $\widetilde{B}$, alors on a nécessairement $f_n = B$ à scalaire près.

Grâce à la représentation d'une matrice dans une base

$$Af_n = f_{n-1} - a_1 f_n,$$

$$Af_{n-1} = f_{n-2} - a_2 f_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Af_2 = f_1 - a_{n-1} f_n,$$

$$Af_1 = -a_n f_n.$$

Définissons donc les vecteurs $f_1, \cdots, f_n$ par les relations

$$f_n = B,$$

$$f_{n-1} = Af_n + a_1 f_n,$$

$$f_{n-2} = Af_{n-1} + a_2 f_n,$$

$$\dots\dots$$

$$f_1 = Af_2 + a_{n-1} f_n.$$

La famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est bien une base de $\mathbb{R}^n$ puisque

$$Vect\{f_n\} = Vect\{B\},$$

$$Vect\{f_n, f_{n-1}\} = Vect\{B, AB\},$$

$$Vect\left\{f_n, f_{n-1}, f_{n-2}\right\} = Vect\left\{B, AB, A^2B\right\},$$

$$\vdots$$

$$Vect\{f_n, \cdots, f_1\} = Vect\{B, AB, \cdots, A^{n-1}B\} = \mathbb{R}^n \text{ (Système Contrôlé).}$$

Il reste à vérifier que l'on a bien $Af_1 = -a_n f_n$. On a

$$Af_1 = A^2 f_2 + a_{n-1} Af_n$$

$$= A^2(Af_3 + a_{n-2} f_n) + a_{n-1} Af_n$$

$$= A^3 f_3 + a_{n-2} A^2 f_n + a_{n-1} Af_n$$

$$\vdots$$

$$= A^n f_n + a_1 A^{n-1} f_n + ... + a_{n-1} A f_n$$

$$= (A^n + a_1 A^{n-1} + ... + a_{n-1} A) f_n$$

$$= -a_n f_n$$

Car d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, on a

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + ... + a_n I = 0.$$

En conclusion dans la base $\{f_1, ..., f_n\}$, la paire (A, B) prend la forme $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$. □

2.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires instationnaires

Les deux théorèmes suivants donnent une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas instationnaire.

Théorème 2.13. *Le système $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$C(T) = \int_0^T M(t)^{-1} B(t) B^T(t) \left(M(t)^{-1}\right)^T dt$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Remarque 2.14. *Cette condition dépend de T, mais ne dépend pas du point initial x_0. Autrement dit, si un système linéaire instationnaire est contrôlable en temps T depuis x_0, alors il est contrôlable en temps T depuis tout point.*

Remarque 2.15. *On a $C(T) = C(T)^T$, et $x^T C(T) x = \langle x, C(T)x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, c'est à dire $C(T)$ est une matrice carrée réelle symétrique positive.*

Démonstration. Pour toute solution $x(t)$, on a, d'après la formule de variation de la constante,

$$x(T) = x^* + M(T) \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt$$

où

$$x^* = M(T)x_0 + M(T)\int_0^T M(t)^{-1}r(t)dt.$$

$(\Leftarrow)$ On suppose que $C(T)$ est inversible, montrons que pour tout x_1 il existe u tel que $x(T) = x_1$.

Posons $u(t) = B^T(t)\left(M^{-1}(t)\right)^T\psi$, avec $\psi \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$x(T) = x^* + M(T)C(T)\psi$$

et il suffit de prendre $\psi = C^{-1}(T)M(T)^{-1}(x_1 - x^*)$.

$(\Rightarrow)$ Si $C(T)$ n'est pas inversible, alors il existe $\psi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ tel que $\psi^T C(T)\psi = 0$. On en déduit que

$$\int_0^T \left\|B(t)^T\left(M(t)^{-1}\right)^T\psi\right\|_2^2 dt = 0.$$

D'où $\psi^T M^{-1}(t)B(t) = 0$ p.p. sur $[0,T]$. Ainsi, pour tout contrôle u, on a

$$\psi^T\int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt = 0.$$

Posons

$$\psi_1^T = \left(M^{-1}(T)\right)^T\psi = \left(\psi^T M(T)^{-1}\right)^T \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \psi^T M(T)^{-1} = \psi_1$$

$$\Leftrightarrow \psi^T = \psi_1 M(T).$$

On a alors

$$\psi_1 M(T)\int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt = 0.$$

Donc $\psi_1 \neq 0$ est orthogonal à $M(T)\displaystyle\int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt$.

Soit $x_u(T)$ la solution correspondante à u.

$$x_u(t) = x^* + M(T)\int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt$$

$$\Leftrightarrow x_u(T) - x^* = M(T)\int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt.$$

D'où $x_u(T)-x^*$ est orthogonale à ψ_1 c'est à dire $x_u(T)-x^* \in \psi_1^\perp$ et donc le système n'est pas contrôlable. $\square$

Remarque 2.16. *Si le système est autonome, (A et B sont constantes), on a $M(t) = \exp(tA)$, et donc*

$$C(T) = \int_0^T \exp(-sA)BB^T \exp(-sA^T)ds.$$

Dans ce cas, $C(T_1)$ est inversible si et seulement si $C(T_2)$ est inversible, et en particulier la condition de contrôlabilité ne dépend pas de T (ce qui est faux dans le cas instationnaire).

Théorème 2.17. *Considérons le système*

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

où les applications A, B sont de classe C^∞ sur $[0, T]$. Définissons par récurrence

$$B_0(t) = B(t),\, B_1(t) = A(t)B_0(t) - \frac{dB_0(t)}{dt},\ B_{i+1}(t) = A(t)B_i(t) - \frac{dB_i(t)}{dt}.$$

1. *S'il existe $t \in [0, T]$ tel que*

$$Vect\{B_i(t)v \mid v \in \mathbb{R}^m,\ i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n,$$

alors le système est contrôlable en temps T.

2. *Si de plus les applications A et B sont analytiques sur $[0, T]$ alors le système est contrôlable en temps T si et seulement si*

$$\forall t \in [0, T],\ \ Vect\{B_i(t)v \mid v \in \mathbb{R}^m,\ i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n.$$

Remarque 2.18. *Dans le cas autonome, on retrouve la condition de Kalman à savoir la matrice C est de rang n.*

3 Temps-optimalité

3.1 Existence de trajectoires temps-optimales

Il faut tout d'abord formaliser, à l'aide de $Acc(x_0, t)$, la notion de temps minimal. Considérons comme précédemment le système de contrôle dans $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) + r(t),$$

où les contrôles u sont à valeurs dans un compact d'intérieur non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient x_0 et x_1 deux points de $\mathbb{R}^n$. Supposons que x_1 soit accessible depuis x_0, c'est-à-dire qu'il existe au moins une trajectoire reliant x_0 à x_1. Parmi toutes les trajectoires reliant x_0 à x_1, on aimerait caractériser celles qui le font en temps minimal t^*.

Théorème 3.1. *(Existence).*

Si le point x_1 est accessible depuis x_0, alors il existe une trajectoire temps-minimale reliant x_0 à x_1.

Démonstration. Si t^* est le temps minimal, alors pour tout $t < t^*$, $x_1 \notin Acc(x_0, t)$ (en effet sinon, x_1 serait accessible à partir de x_0 en un temps inférieur à t^*). Par conséquent on a,

$$t^* = inf\{t \geq 0 \mid x_1 \in Acc(x_0, t)\}.$$

Ce temps t^* est bien défini puisque, d'après le théorème 2.1, $Acc(x_0, t)$ varie continûment avec t, donc l'ensemble $\{t \geq 0 \mid x_1 \in Acc(x_0, t)\} = F(t)$ est fermé dans $\mathbb{R}$ (car l'application $\varphi : t \longrightarrow Acc(x_0, t)$ est continue, $F = \varphi^{-1}(E)$ où $E = \bigcup_{\substack{t\in[0,T] \\ x_1 \in Acc(x_0,t)}} Acc(x_0, t)$ est fermé). Donc cette borne inférieure est atteinte.

Le temps $t = t^*$ est le premier temps pour lequel $Acc(x_0, t)$ contient x_1.

De plus, on a nécessairement

$$x_1 \in \partial Acc(x_0, t^*) = Acc(x_0, t^*) \setminus \overset{\circ}{Acc}(x_0, t^*).$$

En effet, si x_1 appartenait à l'intérieur de $Acc(x_0, t^*)$ alors pour $t < t^*$ proche de t^*, x_1 appartiendrait encore à $Acc(x_0, t)$ car $Acc(x_0, t)$ varie continûment avec t. Mais ceci contredit le fait que t^* soit le temps minimal. $\square$

Remarque 3.2. *On peut aussi se poser le problème d'atteindre une cible non réduite à un point. Ainsi, soit* $(M_1(t))_{0\leq t\leq T}$ *une famille de sous-ensembles compacts de* $\mathbb{R}^n$ *variant continûment en* t. *Tout comme précédemment, on voit que* ***s'il existe*** *un contrôle* u *à valeurs dans* Ω *joignant* x_0 *à* $M_1(T)$, *alors il existe un contrôle temps-minimal défini sur* $[0, t^*]$ *joignant* x_0 *à* $M_1(t^*)$.

Ces remarques donnent une vision géométrique de la notion de temps minimal, et conduisent à la définition suivante.

Définition 3.1. *Le contrôle* u *est dit* ***extrémal*** *sur* $[0, t]$ *si la trajectoire du système (2.1) associée à* u *vérifie* $x(t) \in \partial Acc(x_0, t)$.

En particulier, tout contrôle temps-minimal est extrémal. La réciproque est évidemment fausse car l'extrémalité ne fait pas la différence entre la minimalité et la maximalité.

Dans le paragraphe suivant on donne une caractérisation de cette propriété.

3.2 Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal.

Théorème 3.3. *Considérons le système de contrôle linéaire*

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0,$$

où le domaine des contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *sur le contrôle est compact. Soit* $T > 0$. *Le contrôle* u *est extrémal sur* $[0, T]$ *si et seulement s'il existe une solution non triviale* $p(t)$ *de l'équation*

$$p'(t) = -p(t)A(t)$$

telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v\in\Omega} p(t)B(t)v \tag{3.1}$$

pour presque tout $t \in [0,T]$. Le vecteur ligne $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint ou état adjoint.

Remarque 3.4. *La condition initiale $p(0)$ dépend en fait du point final x_1, comme on le verra dans la démonstration. Puisqu'elle n'est pas directement connue, l'usage de ce théorème sera plutôt indirect, on le verra dans les exemples.*

Remarque 3.5. *Dans le cas mono-entrée (contrôle scalaire), et si de plus $\Omega = [-a,a]$ où $a > 0$, la condition de maximisation $p(t)B(t)u(t) = \max_{v\in[-a,a]} p(t)B(t)v$, implique immédiatement que $u(t) = a.signe(p(t)B(t)) = (\pm a)$. La fonction $\varphi(t) = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation, et un temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$ change de signe est appelé un temps de commutation. C'est en particulier un zéro de la fonction φ.*

Démonstration. (Du Théorème 3.3). On a vu que $Acc_\Omega(x_0,T) = Acc_{Conv(\Omega)}(x_0,T)$, et par conséquent on peut supposer que Ω est convexe.

($\Rightarrow$) On suppose que u est extrémal sur $[0,T]$, et soit x la trajectoire associée à u. On a $x(T) \in \partial Acc(x_0,T)$. Par convexité de $Acc(x_0,T)$, il existe un hyperplan tangent à $Acc(x_0,T)$ au point $x(T)$. Soit p_T un vecteur normal à cet hyperplan.

D'après le théorème du convexe,

$$\forall y_1 \in Acc(x_0,T) \quad p_T(y_1 - x(T)) \le 0. \tag{3.2}$$

Par définition de $Acc(x_0,T)$, il existe un contrôle u_1 tel que la trajectoire associée $y(t)$ vérifie $y_1 = y(T)$. L'inégalité (3.2) se réécrit

$$p_T x(T) \ge p_T y(T).$$

D'où

$$p_T x(T) = \int_0^T p_T M(T) M^{-1}(s)(B(s)u(s) + r(s))ds$$

$$\geq \int_0^T p_T M(T) M^{-1}(s)(B(s)u_1(s) + r(s))ds = p_T y(T).$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T p_T M(T) M^{-1}(s) B(s) u(s) ds \geq \int_0^T p_T M(T) M^{-1}(s) B(s) u_1(s) ds.$$

Appelons $p(t)$ la solution sur $[0, T]$ de $p' = -pA$, telle que $p(T) = p_T$. Alors il est clair que

$$p(t) = p(0)M(t)^{-1} \text{ et } p_T = p(T) = p(0)M(T)^{-1}.$$

Il s'ensuit que

$$p_T M(T) = p(0)$$

$$\Rightarrow \forall s \in [0, T], \;\; p_T M(T) M(s)^{-1} = p(0) M(s)^{-1} = p(s),$$

et donc

$$\int_0^T p(s)B(s)u_1(s)ds \leq \int_0^T p(s)B(s)u(s)ds \tag{3.3}$$

(y est quelconque donc u_1 est quelconque $\Rightarrow$le résultat $p(s)B(s)u(s) = \max_{v \in \Omega} p(s)B(s)v)$).

Par conséquent (3.1) est vraie.

($\Leftarrow$) **Réciproquement,** supposons qu'il existe un vecteur adjoint tel que le contrôle u vérifie (3.1). Notons $x(\cdot)$ la trajectoire associée à u. On voit facilement en **remontant** le raisonnement précédent que

$$\forall y_1 \in Acc(x_0, T) \;\; p(T)(y_1 - x(T)) \leq 0. \tag{3.4}$$

Raisonnons alors par l'absurde, et supposons que $x(T) \in IntAcc(x_0, T)$. Alors il existerait un point y_1 de $Acc(x_0, T)$ qui serait sur la demi-droite d'origine $x(T)$ et de direction $p(T)$. Mais alors $p(T)(y_1 - x(T)) > 0$, ce qui contredirait (3.4). Donc $x(T) \in \partial Acc(x_0, T)$, et u est extrémal. □

Remarque 3.6. *Si u est extrémal sur $[0, T]$ alors u est aussi extrémal sur $[0, t]$ pour tout $t \in [0, T]$, et de plus $p(t)$ est un vecteur normal extérieur à $Acc(x_0, t)$. c'est à dire si x est une trajectoire associée à u tel que $x(T) \in \partial Acc(x_0, T)$*

*alors pour tout $t \in [0, T]$ on a $x(t) \in \partial A(cc(x_0, t)$ et $p(t)$ est perpendiculaire au plan tangent à $Acc(x_0, t)$ au point $x(t)$, cette condition $p(t)$ $\perp$plan tangent à $Acc(x_0, t)$ en $x(t)$ est appelée principe de **transversalité**.*

Cette remarque découle facilement de la preuve et de la propriété (3.1).

Remarque 3.7. *Puisque tout contrôle temps-minimal est extrémal, le théorème précédent, qui est le principe du maximum dans le cas linéaire, donne une condition nécessaire d'optimalité.*

Remarque 3.8. *Si u est un contrôle temps-minimal joignant en temps T une cible M_1, où $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, alors on peut de plus choisir le vecteur adjoint pour que le vecteur $p(T)$ soit unitaire et normal à un hyperplan séparant (au sens large) $Acc(x_0, T)$ et M_1. C'est une condition dite de transversalité, obtenue facilement dans la preuve précédente.*

Comme exemple théorique d'application, montrons le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Considérons dans $\mathbb{R}^n$ le système linéaire autonome ($m = 1$)*

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

avec $B \in \mathbb{R}^n$ et $|u(t)| \leq 1$, (c'est à dire $\Omega = [-1, 1]$) et la paire (A, B) vérifie la condition de Kalman.

1. *Si toutes les valeurs propres de A sont réelles, alors tout contrôle extrémal a au plus $n - 1$ commutations sur $\mathbb{R}^+$.*
2. *Si toutes les valeurs propres de A ont une partie imaginaire non nulle, alors tout contrôle extrémal a un nombre infini de commutations sur $\mathbb{R}^+$.*

Remarque 3.9. *Les points de commutation sont les zéros de la fonction $p(t)B(t)$ où p est l'état adjoint qui est solution de $p' = -pA$.*

Démonstration. D'après le théorème 2.11, le système peut s'écrire sous forme de Brunovski avec,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et il est alors équivalent à une équation différentielle scalaire d'ordre n de la forme

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_n = u(t), \quad |u| \leq 1.$$

Soit p le vecteur adjoint, solution du système $p'(t) = -p(t)A(t)$ et $\lambda(t)$ la dernière coordonnée du p, alors $\lambda(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\lambda^{(n)} - a_1 \lambda^{(n-1)} + \cdots\cdots + (-1)^n a_n \lambda = 0.$$

Question : Comment résoudre cette dernière équation linéaire ?

Quelle relation y a t-il entre les racines de l'équation caratéristique et les valeurs propres de A.

$$p(t)Bu(t) = \lambda(t)u(t) = \max_{v \in \mathbb{R}^n, |v| \leq 1} p(t)Bv.$$

On déduit que tout contrôle extrémal est de la forme $u(t) = signe \lambda(t)$.

De plus on a $\lambda(t)$ est de la forme :

1. Si toutes les valeurs propres $(\mu_j)_{1 \leq j \leq r}$ de A sont réelles, alors $\lambda(t)$ s'écrit sous la forme

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^{r} P_j(t) \exp(\mu_j t)$$

où P_j est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n_j - 1$, et où $\mu_1, ..., \mu_r$, sont les r valeurs propres distinctes de $-A$, de multiplicités respectives $n_1, ..., n_r$, (équations différentielles linéaires).

Notons que $n = n_1 + ... + n_r$. On montre alors facilement, par récurrence, que $\lambda(t)$ admet au plus $n-1$ zéros.

2. Si toutes les valeurs propres de A ont une partie imaginaire non nulle, alors comme précédemment, on peut écrire

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^{r} (P_j(t) \cos \beta_j t + Q_j(t) \sin \beta_j t) \exp(\alpha_j t)$$

où $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ et $P_j,\ Q_j$ sont des polynômes réels non nuls. En mettant en facteur un terme $t^k \exp \alpha_i t$ de plus haut degré (c'est à dire dominant), on voit facilement que $\lambda(t)$ a un nombre infini de zéros. □

3.3 Synthèse Optimale pour le problème de l'oscillateur harmonique linéaire

Appliquons la théorie précédente à l'exemple de l'oscillateur harmonique.

On considère l'équation du mouvement suivante

$$mx''(t) = -k_1(x - l) + u(t).$$

et on impose la contrainte $|u(t)| \leq 1$.

Répondons aux deux questions suivantes :

1. Pour toute condition initiale $x(0) = x_0$, $x'(0) = y_0$, existe-t-il une force extérieure horizontale $u(t)$ (un contrôle) vérifiant la contrainte $|u(t)| \leq 1$, qui permette d'amener la masse ponctuelle à sa position d'équilibre $x(T) = 0$, $x'(T) = 0$ en un temps fini T?

2. Si la première condition est remplie, peut-on de plus déterminer cette force de manière à minimiser le temps ?

Enfin, ces deux problèmes résolus, nous représenterons dans le plan de phase la trajectoire optimale obtenue.

3.3.1 Contrôlabilité du système

Pour simplifier on suppose $m = k_1 = 1,\ l = 0$, (ce qui peut se faire en effectuant des changements de variables et de fonctions).

On pose $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},\ y(t) = x'(t),\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

On a facilement $rg(B, AB) = 2$, par ailleurs les valeurs propres de A sont de partie réelle nulle. Donc, d'après le théorème 2.9, le système est contrôlable à 0, c'est à dire, il existe des contrôles u vérifiant la contrainte $|u| \leq 1$ tels que les trajectoires associées relient X_0 à 0, ce qui répond à la première question.

3.3.2 Interprétation physique

• Si on n'applique aucune force extérieure, i.e. $u = 0$, alors l'équation du mouvement est $x''(t) + x(t) = 0$ et dont la solution est $x(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$. Donc la masse ponctuelle oscille, et ne s'arrête jamais, elle ne parvient pas à sa position d'équilibre.

• Si l'on applique certaines forces extérieures, afin d'amortir les oscillations, la théorie prévoit qu'on parvient à stopper l'objet en un temps fini.

3.3.3 Calcul du contrôle optimal

D'après le paragraphe précédent, il existe des contrôles permettant de relier X_0 à 0. On cherche maintenant à le faire en **temps minimal**. Pour cela, on applique le théorème 3.3, selon lequel le contrôle optimal est donné par l'expression :

$$u(t) = signe(p(t)B),$$

où $p(t) = (p_1(t), p_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ est solution de $p'(t) = -p(t)A$.

$$\Rightarrow p_1' = p_2,\ p_2' = -p_1, \text{ d'où } p_2'' + p_2 = 0.$$

Donc

$$p_2(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) = w \cos(t + r).$$

et

$$p_1(t) = \lambda \sin(t) - \mu \cos(t) = w \sin(t + r)$$

Finalement on a $u(t) = signe(p(t)B) = signe(p_2(t))$.

On voit bien que suivant la valeur de t le contrôle $u(t)$ change de signe. En particulier, la durée entre deux zéros consécutifs de $p_2(t)$ est exactement π. Par conséquent le contrôle optimal est constant par morceaux sur des intervalles de longueur π, et prend alternativement les valeurs ± 1.

• Si $u = -1$, on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -x(t) - 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

• Si $u = +1$, on a

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -x(t) + 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

La trajectoire optimale finale, reliant X_0 à 0, sera constituée d'arcs successifs, solutions de (3.5) et (3.6).

3.3.4 Représentation graphique

Solutions de (3.5). On obtient facilement $(x + 1)^2 + y^2 = cste = r^2$, donc les courbes solutions de (3.5) sont des cercles centrés en $(-1, 0)$, et de période 2π.

Solutions de (3.6). On obtient facilement $(x - 1)^2 + y^2 = cste = r^2$. Les solutions sont des cercles centrés en $(1, 0)$, de période 2π.

La trajectoire optimale de X_0 à 0 doit donc suivre alternativement un arc de cercle centré en $(-1, 0)$, et un arc de cercle centré en $(1, 0)$.

Quitte à changer t en $-t$, nous allons raisonner en temps inverse, et construire la trajectoire optimale menant de 0 à X_0. Pour cela, nous allons considérer toutes les trajectoires optimales partant de 0, et nous sélectionnerons celle qui passe par X_0.

En faisant varier $p(0)$, on fait varier la trajectoire optimale. En effet, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $p(0)$ détermine $p(t)$ pour tout t, ce qui définit un contrôle optimal $u(t)$, et donc une trajectoire optimale.

Prenons des exemples pour commencer à représenter l'allure des trajectoires optimales possibles.

• Si $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = 0$, alors $p_2(t) = -\sin(t)$, donc sur $]0, \pi[$ on a $u(t) = signe(p_2(t)) = -1$. La trajectoire optimale correspondante, partant de 0 est donnée par

$$x(t) = -1 + \cos(t), \;\; y(t) = -\sin(t).$$

Elle suit donc pendant un temps π l'arc de cercle Γ^- solution de (3.5), partant de 0.

• Si $p_1(0) = -1$, $p_2(0) = 0$, alors $p_2(t) = \sin(t)$, donc sur $]0, \pi[$ on a $u(t) = signe(p_2(t)) = +1$ La trajectoire optimale correspondante, partant de 0, suit donc pendant un temps π l'arc de cercle Γ^+ solution de (3.6), partant de 0, donnée par $x(t) = 1 - \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ car on a pris $x(0) = y(0) = 0$.

Pour tout autre choix de $p(0)$ tel que $p_2(0) > 0$ (resp $p_2(0) < 0$), la trajectoire optimale correspondante part de l'origine en suivant Γ^+ (resp Γ^-) jusqu'à ce que $p_2(t) = 0$. On note t_1 le premier zéro de p_2, $0 < t_1 \leq \pi$ et M_1 le poit ateint au temps t_1, $M_1 = (x(t_1), y(t_1))$. Au-delà de ce point, $p_2(t)$ change de signe, donc le contrôle commute et prend la valeur -1 (resp $+1$), pendant une durée π (c'est à dire jusqu'à ce que $p_2(t)$ change à nouveau de signe). La trajectoire optimale doit alors être solution de (3.5) (resp de (3.6)), en partant du point de commutation M_1, et doit donc suivre un arc de cercle centré en $(-1, 0)$ (resp $(1, 0)$), pendant un temps π. C'est donc un demi-cercle, vu la paramétrisation des courbes de (3.5). La trajectoire optimale rencontre un deuxième point de commutation N lorsque à nouveau $p_2(t)$ change de signe.

Poursuivons alors notre raisonnement. On se rend compte que les points de commutation de cette trajectoire optimale partant de 0 sont situés sur la courbe W construite de la manière suivante : W est l'union de tous les translatés à gauche de Γ^- par la translation précédente, et aussi de tous les translatés à droite de

Γ^+.

Les trajectoires optimales sont alors construites de la manière suivante : on part de 0 et l'on suit un morceau de Γ^+ ou Γ^-, jusqu'à un premier point de commutation. Si par exemple on était sur Γ^+, alors partant de ce point on suit un arc de cercle centré en $(-1, 0)$, au-dessus de W, jusqu'à ce qu'on rencontre W. De ce deuxième point de commutation, on suit un arc de cercle centré en $(1, 0)$ jusqu'à rencontrer W en un troisième point de commutation, etc.

On est maintenant en mesure de répondre à la deuxième question, du moins graphiquement. Le but est de relier 0 et X_0 par une trajectoire optimale. La théorie prévoit qu'on peut effectivement le faire. Une trajectoire partant de 0 est, comme on vient de le voir ci-dessus, déterminée par deux choix :

1. partant de 0, on peut suivre un morceau de Γ^+ ou de Γ^-.
2. il faut choisir le premier point de commutation.

Si maintenant on se donne un point $X_0 = (x_0, y_0)$ du plan de phase, on peut déterminer graphiquement ces deux choix, et obtenir un tracé de la trajectoire optimale. Dans la pratique il suffit d'inverser le temps, c'est à dire de partir du point final et d'atteindre le point initial.

4 Théorie linéaire-quadratique

Dans cette section on s'intéresse aux systèmes de contrôle linéaires avec un coût quadratique. Ces systèmes sont d'une grande importance dans la pratique, comme on le verra par la suite. En effet un coût quadratique est souvent très naturel dans un problème, par exemple lorsqu'on veut minimiser l'écart au carré par rapport à une trajectoire **nominale** (problème de poursuite). Par ailleurs même si les systèmes de contrôle sont en général non linéaires, on est très souvent amené à linéariser le système le long d'une trajectoire, par exemple dans des problèmes de stabilisation.

Nous allons donc considérer un système de contrôle linéaire dans $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \tag{4.1}$$

muni d'un coût quadratique du type

$$C(u) = x(T)^T Qx(T) + \int_0^T \left(x(t)^T W(t)x(t) + u(t)^T U(t)u(t)\right) dt, \tag{4.2}$$

où $T > 0$ est fixé, et où, pour tout $t \in [0,T]$, $U(t) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est symétrique **définie** positive, $W(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive. On suppose que les dépendances en t de A, B, W et U sont L^∞ sur $[0,T]$. Par ailleurs le coût étant quadratique, l'espace naturel des contrôles est $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$.

Le problème de contrôle optimal est alors le suivant, que nous appellerons problème LQ (linéaire-quadratique).

Problème LQ : Un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ étant fixé, l'objectif est de déterminer les trajectoires solution de (4.1) qui minimisent le coût $C(u)$.

Notons que l'on n'impose aucune contrainte sur le point final $x(T)$. Pour toute la suite, on pose

$$\|x(t)\|_W^2 = x(t)^T W(t)x(t),\ \|u(t)\|_U^2 = u(t)^T U(t)u(t), \text{ et } g(x) = x^T Qx,$$

de sorte que

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T \left(\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2 \right) dt.$$

Les matrices Q, W, U sont des matrices de pondération.

Remarque 4.1. *Par hypothèse les matrices Q et $W(t)$ sont symétriques positives, mais pas nécessairement définies positives. Par exemple si $Q = 0$ et $W = 0$ alors le coût est toujours minimal pour le contrôle $u = 0$.*

Remarque 4.2. *Comme dans le chapitre précédent, on suppose pour alléger les notations que le temps initial est égal à 0. Cependant tous les résultats qui suivent sont toujours valables si on considère le problème LQ sur un intervalle $[t_0, T]$, avec des contrôles dans l'espace $L^2([t_0, T], \mathbb{R}^m)$.*

Remarque 4.3. *Les résultats des deux premières sections de ce chapitre seront en fait valables pour des systèmes linéaires perturbés $x' = Ax + Bu + r$, et avec une fonction g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ continue et C^1. Nous préciserons pour chaque résultat les extensions possibles. De même nous envisagerons le cas où $T = +\infty$.*

4.1 Existence de trajectoires optimales

Introduisons l'hypothèse suivante sur U.

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m),\ u \neq 0,\ \int_0^T \|u(t)\|_U^2\, dt > \alpha \int_0^T u(t)^T u(t) dt. \tag{4.3}$$

Par exemple cette hypothèse est vérifiée si l'application $t \longrightarrow U(t)$ est continue sur $[0, T]$ et $T < +\infty$, et s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^m,\ v \neq 0$, on ait

$$v^T U(t) v > c v^T v.$$

On a le théorème d'existence suivant.

Théorème 4.4. *(Existence). Sous l'hypothèse (4.3), il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ.*

Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence d'une telle trajectoire. Considérons une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de contrôles sur $[0, T]$, (càd $C(u_n)$ est décroissante et minorée par 0), donc la suite $C(u_n)$ converge vers la borne inférieure des coûts. En particulier cette suite est bornée. Or par hypothèse, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$ on ait $C(u) > \alpha \|u\|_{L^2}^2$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$. Par conséquent à sous-suite près elle converge faiblement vers un contrôle u de $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$. Notons x_n (resp. x) la trajectoire associée au contrôle u_n (resp. u) sur $[0,T]$. D'après la formule de variation de la constante, on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$x_n(t) = M(t)x_0 + M(t)\int_0^t M(s)^{-1}B(s)u_n(s)ds. \tag{4.4}$$

On montre alors aisément que, à sous-suite près, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers l'application x sur $[0,T]$ (en fait on peut même montrer que la convergence est uniforme, il suffit d'utiliser l'équation $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ et le fait que l'injection de H^1 dans C^0 est compacte).

Passant maintenant à la limite dans (4.4), on obtient, pour tout $t \in [0,T]$,

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t)\int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds,$$

et donc x est une solution du système associée au contrôle u.

Montrons qu'elle est minimisante. Pour cela on utilise le fait que puisque $u_n \rightharpoonup u$ dans L^2, on a l'inégalité

$$\int_0^T \|u(t)\|_U^2\, dt \leq \liminf \int_0^T \|u_n(t)\|_U^2\, dt,$$

et donc $C(u) \leq \liminf C(u_n)$. Mais comme (u_n) est une suite minimisante, $C(u)$ est égal à la borne inférieure des coûts, càd le contrôle u est minimisant, ce qui montre l'existence d'une trajectoire optimale.

Pour l'unicité on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1. *La fonction C est strictement convexe.*

Démonstration. Tout d'abord remarquons que pour tout $t \in [0,T]$, la fonction $f(u) = u^T U(t)u$ définie sur $\mathbb{R}^m$ est strictement convexe puisque par hypothèse la matrice $U(t)$ est symétrique définie positive. ($\Rightarrow \forall x, y \in$

$\mathbb{R}^m,\ 2|x^TUy| < x^TUx + y^TUy$ pour $x \neq y$).

Ensuite, notons $x_u(\cdot)$ la trajectoire associée à un contrôle u. On a pour tout $t \in [0,T]$,

$$x_u(t) = M(t)x_0 + M(t)\int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds.$$

Par conséquent, comme dans la preuve du thèorème 2.1, l'application qui à un contrôle u associe $x_u(t)$ est convexe (car elle est linéaire en u), ceci pour tout $t \in [0,T]$. La matrice $W(t)$ étant symétrique positive, ceci implique la convexité de l'application qui à un contrôle u associe $x(t)^TW(t)x(t)$. On raisonne de la même facon pour le terme $x(T)^TQx(T)$. Enfin, l'intégration respectant la convexité, on en déduit que le coût est strictement convexe en u. □

L'unicité de la trajectoire optimale en résulte trivialement. □

Remarque 4.5. *(Extension du théorème 4.4). Si la fonction g, apparaissant dans le coût, est une fonction continue quelconque de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, bornée inférieurement ou convexe, et/ou si le système de contrôle est perturbé par une fonction $r(t)$, alors le théorème précédent reste vrai.*

Remarque 4.6. *(Cas d'un intervalle infini). Le théorème est encore valable si $T = +\infty$, avec $g = 0$, pourvu que le système (4.1) soit contrôlable (en temps quelconque).*

En effet il suffit juste de montrer qu'il existe des trajectoires solutions du système (4.1) sur $[0,+\infty[$ et de coût fini. Or si le système est contrôlable, alors il existe un contrôle u et un temps $T > 0$ tel que la trajectoire associée à u relie x_0 à 0 sur $[0,T]$. On prolonge alors le contrôle u par 0 sur $]T,+\infty[$, de sorte que la trajectoire reste en 0. On a ainsi construit une trajectoire solution du système sur $[0,+\infty[$ et de coût fini. Ceci permet d'affirmer l'existence d'une suite de contrôles minimisants. Les autres arguments de la preuve sont inchangés. On obtient donc le résultat suivant.

Proposition 4.2. *Considérons le problème de déterminer une trajectoire solution de*

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

sur $[0,+\infty[$ et minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2 \right) dt.$$

Si le système est contrôlable en un temps $T > 0$, et si l'hypothèse (4.3) est vérifiée sur $[0, +\infty[$, alors il existe une unique trajectoire minimisante.

Remarque 4.7.

• *Si l'on suppose de plus que les applications $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ sont L^2 sur $[0, +\infty[$, et si $W(\cdot)$ vérifie comme U une hypothèse de cœrcivité (4.3), alors la trajectoire minimisante tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.*

En effet, on montre facilement en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'application $x'(\cdot)$ est dans L^1, et par conséquent que $x(t)$ converge. Sa limite est alors forcément nulle.

• *Dans le cas autonome (A et B sont constantes), si $W(\cdot)$ vérifie comme U une hypothèse de coercivité (4.3), alors la trajectoire minimisante tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.*

En effet, il suffit d'écrire l'inégalité

$$\|x'(t)\| \leq \|A\| \, \|x(t)\| + \|B\| \, \|u(t)\| \leq Cste(\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2),$$

puis en intégrant on montre de même que l'application $x'(\cdot)$ est dans L^1.

4.2 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Théorème 4.8. *(caractérisation, principe de Pontryagin). La trajectoire x, associée au contrôle u, est optimale pour le problème LQ si et seulement s'il existe un vecteur adjoint $p(t)$ vérifiant pour presque tout $t \in [0, T]$*

$$p'(t) = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t) \tag{4.5}$$

et la condition finale

$$p(T) = -x(T)^T Q. \tag{4.6}$$

De plus le contrôle optimal u s'écrit, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$u(t) = U(t)^{-1}.B(t)^T.p(t)^T. \tag{4.7}$$

Démonstration. Soit u un contrôle optimal et x la trajectoire associée sur $[0, T]$. Le coût est donc minimal parmi toutes les trajectoires solutions du système, partant de x_0, le point final étant non fixé. Considérons alors des perturbations du contrôle u dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ du type

$$u_{pert}(t) = u(t) + \delta u(t),$$

engendrant les trajectoires

$$x_{pert}(t) = x(t) + \delta x(t),$$

avec $\delta x(0) = 0$. La trajectoire x_{pert} deverait être solution du système

$$x'_{pert} = Ax_{pert} + Bu_{pert},$$

on en déduit que

$$\delta x' = A\delta x + B\delta u,$$

et par conséquent, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\delta x(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) \delta u(s) ds. \tag{4.8}$$

Par ailleurs il est bien clair que le coût $C(\cdot)$ est une fonction lisse sur $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ (elle est même analytique) au sens de Fréchet. Le contrôle u étant minimisant, on doit avoir

$$dC(u) = 0.$$

Or

$$C(u_{pert}) = g(x_{pert}(T)) + \int_0^T (\|x_{pert}(t)\|_W^2 + \|u_{pert}(t)\|_U^2) dt,$$

et comme Q, $W(t)$ et $U(t)$ sont symétriques, on en déduit que

$$\frac{1}{2}dC(u).\delta u = x(T)^T Q\delta x(T) + \int_0^T (x(t)^T W(t)\delta x(t) + u(t)^T U(t)\delta u(t))dt = 0, \tag{4.9}$$

ceci étant valable pour toute perturbation δu. Cette équation va nous conduire à l'expression du contrôle optimal u. Mais introduisons tout d'abord le vecteur adjoint $p(t)$ comme solution du problème de Cauchy

$$p'(t) = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t), \quad p(T) = -x(T)^T Q.$$

La formule de variation de la constante nous conduit à

$$p(t) = \Lambda M(t)^{-1} + \int_0^t x(s)^T W(s)M(s)ds\, M(t)^{-1}$$

pour tout $t \in [0, T]$, où Λ est déterminé par la condition aux limites via la formule :

$$\Lambda = -x(T)^T QM(T) - \int_0^T x(s)^T W(s)M(s)ds.$$

Revenons alors à l'équation (4.9) et transformons le terme du milieu de second membre

$$\begin{aligned}
\int_0^T (x(t)^T W(t)\delta x(t) &= \int_0^T x(t)^T W(t)M(t)(\int_0^t M(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds)dt \\
&= \int_0^T x(t)^T W(t)M(t)dt \int_0^T M(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds - \int_0^T \int_0^t x(s)^T W(s)M(s)dsM(t)^{-1}B(t)\delta u(t)dt \\
&= \left(-x(T)^T QM(T) - \Lambda\right) \int_0^T M(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds - \int_0^T \int_0^t x(s)^T W(s)M(s)dsM(t)^{-1}B(t)\delta u(t)dt \\
&= -x(T)^T QM(T) \int_0^T M(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds - \int_0^T \Lambda M(t)^{-1}B(t)\delta u(t)dt - \\
&\int_0^T \int_0^t x(s)^T W(s)M(s)dsM(t)^{-1}B(t)\delta u(t)dt \\
&= -x(T)^T QM(T) \int_0^T M(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds - \int_0^T \Lambda M(t)^{-1}B(t)\delta u(t)dt - \\
&\int_0^T \left[\int_0^t x(s)^T W(s)M(s)ds\right] M(t)^{-1}B(t)\delta u(t)dt \\
&= -x(T)^T QM(T) \int_0^T M(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds - \\
&\int_0^T \left[\Lambda M(t)^{-1} + \int_0^t x(s)^T W(s)M(s)dsM(t)^{-1}\right] B(t)\delta u(t)dt \\
&= -x(T)^T QM(T) \int_0^T M(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds - \int_0^T p(t)B(t)\delta u(t)dt.
\end{aligned}$$

Or

$$\delta x(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) \delta u(s) ds.$$

Donc

$$x(T)^T Q \delta x(T) = x(T)^T Q M(T) \int_0^T M(s)^{-1} B(s) \delta u(s) ds$$

ce qui donne

$$\int_0^T x(t)^T W(t) \delta x(t) = -x(T)^T Q \delta x(T) - \int_0^T p(t) B(t) \delta u(t) dt.$$

Donc (4.9) s'écrit

$$\frac{1}{2} dC(u).\delta u = x(T)^T Q \delta x(T) - x(T)^T Q \delta x(T) - \int_0^T p(t) B(t) \delta u(t) dt + \int_0^T u(t)^T U(t) \delta u(t)) dt = 0.$$

On trouve alors

$$\frac{1}{2} dC(u).\delta u = \int_0^T \left[u(t)^T U(t) - p(t) B(t) \right] \delta u(t)) dt = 0.$$

Ceci pour toute application $\delta u \in L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ ce qui implique l'égalité pour presque tout $t \in [0,T]$

$$u(t)^T U(t) - p(t) B(t) = 0$$

et en fin on a

$$u(t) = U^{-1}(t) B^T p(t)^T.$$

Ce qui est la conclusion souhaitée.

Réciproquement : S'il existe un vecteur adjoint $p(t)$ vérifiant (4.5) et (4.6) et si le contrôle u est donné par (4.7), alors il est bien clair d'après le raisonnement précédent que

$$dC(u) = 0.$$

Or C étant strictement convexe ceci implique que u est un minimum global de C. □

Remarque 4.9. *Si le système de contrôle est perturbé par une fonction $r(t)$, alors le théorème précédent reste vrai. Il le reste, de même, si la fonction g apparaissant dans le coût est une fonction convexe C^1 quelconque de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, sauf que la condition finale sur le vecteur adjoint (4.6) devient*

$$p(T) = -\frac{1}{2}\nabla g(x(T)), \tag{4.10}$$

comme on le voit facilement dans la démonstration (en l'absence de convexité, la condition nécessaire reste vraie). Cette condition s'appelle condition de transversalité.

Remarque 4.10. *Dans le cas d'un intervalle infini $(T = +\infty)$ la condition devient*

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = 0. \tag{4.11}$$

Définition 4.3. *On appelle Hamiltonienne, la fonction $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ définie par*

$$H(x,p,u) = p.(Ax + Bu) - \frac{1}{2}(x^T W x + u^T U u),$$

en utilisant toujours la convention que p est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^n$. Alors les équations données par le principe du maximum LQ s'écrivent

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu,$$

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -pA + x^T W,$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

puisque $pB - u^T U = 0$. *Ceci annonce le principe du maximum général. Mais en fait ici dans le cas* LQ *on peut dire mieux : d'une part le principe du maximum* LQ *est une condition nécessaire et suffisante de minimalité (alors que dans le cas général c'est une condition nécessaire seulement), d'autre part il est possible d'exprimer le contrôle sous forme de boucle fermée, grâce à la théorie de Riccati (voir la section suivante).*

Exemple 1. Considérons, avec $n = m = 1$, le système de contrôle

$$x' = u, x(0) = x_0,$$

et le coût

$$C(u) = \int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2)dt.$$

Les données du problème $A = 0,\ B = 1,\ Q = 0,\ W = 1$ et $U = 1$.

On cherche le vecteur adjoint qui est solution de

$$p' = -pA + x^T W = x^T \quad \text{et} \quad p(T) = 0$$

mais

$$u(t) = U^{-1} B^T p^T = p.$$

Si la trajectoire x associée au contrôle u est optimale alors d'après le théorème précédent on doit avoir

$$x' = u = p \Rightarrow x'' = p'^T = x.$$

On en déduit alors

$$x(t) = \alpha ch(t) + \beta sh(t), \quad p(t) = x'(t) = \alpha sh(t) + \beta ch(t).$$

On détermine α et β par les conditions

$$x(0) = x_0 \Rightarrow \alpha = x_0$$

$$p(T) = 0 \Rightarrow \beta = -x_0 \frac{sh(T)}{ch(T)},$$

d'où l'on a :

$$x(t) = x_0 \left(ch(t) - \frac{sh(T)}{ch(T)} sh(t) \right),$$

$$p(t) = x_0 \left(sh(t) - \frac{sh(T)}{ch(T)} ch(t) \right).$$

Exemple 2. Considérons le problème du véhicule se déplaçant en ligne droite, modélisé par le système de contrôle

$$x'' = u, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

On souhaite, pendant un temps T fixé, maximiser la distance parcourue tout en minimisant l'énergie fournie.

On choisit donc le critère

$$C(u) = -x(T) + \int_0^T u(t)^2 dt.$$

En appliquant le théorème 4.8 on obtient les équations

$$x' = y, \;\; y' = u,$$

$$p_1' = 0, \quad p_2' = -p_1,$$

et la condition (4.10) donne

$$p_1(T) = \frac{1}{2}, \qquad p_2(T) = 0.$$

En intégrant on trouve le contrôle

$$u(t) = \frac{T-t}{2}$$

et la distance parcourue

$$x(T) = \frac{1}{6}T^3.$$

Remarque 4.11. *Dans l'exemple précédent on aurait pu mettre des poids différents dans le coût, suivant qu'on accorde plus d'importance à maximiser la distance parcourue ou minimiser l'énergie. On peut aussi choisir le coût*

$$C(u) = -x(T)^2 + \int_0^T u(t)^2 dt,$$

qui conduit à

$$u(t) = x(T)(T-t) \ \ et \ \ x(T) = \frac{T^3}{3T^3 - 6}.$$

4.3 Fonction valeur et équation de Riccati

4.3.1 Fonction valeur

Soit $T > 0$ fixé, et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Considérons le problème LQ de trouver une trajectoire solution de

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \tag{4.12}$$

minimisant le coût quadratique

$$C_T(u) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T \left(\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2 \right) dt. \tag{4.13}$$

Définition 4.4. *La fonction valeur S_T au point x_0 est la borne inférieure des coûts pour le problème LQ. Autrement dit*

$$S_T(x_0) = inf\{C_T(u) \mid x_u(0) = x_0\}.$$

Remarque 4.12. *Sous l'hypothèse (4.3) et d'après le théorème 4.4, on a l'existence d'une unique trajectoire optimale, dans ce cas cette borne inférieure est un minimum.*

4.3.2 Equation de Riccati

Théorème 4.13. *Sous l'hypothèse (4.3), pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique trajectoire optimale x associée au contrôle u pour le problème (4.12), (4.13). Le contrôle optimal se met sous forme*

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)x(t), \tag{4.14}$$

où $E(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est solution sur $[0,T]$ de l'équation matricielle de Riccati

$$E'(t) = W(t) - A(t)^T E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U(t)^{-1}B(t)^T E(t),\ E(T) = -Q. \tag{4.15}$$

De plus, pour tout $t \in [0,T]$, la matrice $E(t)$ est symétrique, et

$$S_T(x_0) = -x_0^T E(0)x_0. \tag{4.16}$$

Remarque 4.14. *En particulier le théorème affirme que le contrôle optimal u se met sous forme*

$$u(t) = K(t)x(t),$$

où $K(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)$. Cette forme se prête bien aux problèmes de stabilisation.

Démonstration. D'après les théorèmes 4.4 et 4.8, il existe une unique trajectoire optimale qui est caractérisée par le système d'équations

$$x' = Ax + Bu = Ax + BU^{-1}B^T p^T,$$

$$p' = -pA + x^T W,$$

avec $x(0) = x_0$ et $p(T) = -x(T)^T Q$.

Puisque le contrôle s'écrit

$$u = U^{-1}B^T p^T,$$

il suffit de montrer que l'on peut écrire $p(t) = x(t)^T E(t)$, où $E(t)$ est solution de (4.15).

On doit montrer deux conditions

1. Si p s'écrit $p(t) = x(t)^T E(t)$, alors $E(t)$ est solution de (4.15).

2. Si $E(t)$ est solution de (4.15). On montre qu'on a effectivement $p = x(t)^T E(t)$.

Démontrons 1. Pour cela, on suppose $p(t) = x(t)^T E(t)$, on porte dans les équations vérifiées par $x(t)$ et $p(t)$

$$x' = Ax + BU^{-1}B^T p^T = \left(A + BU^{-1}B^T E^T\right) x(t), \text{ et } \quad x(0) = x_0$$

$$\begin{aligned} p' &= \left(x(t)^T\right)' E(t) + x(t)^T E(t)' = \left[\left(A + BU^{-1}B^T E^T\right) x(t)\right]^T E(t) + x(t)^T E(t)' \\ &= x(t)^T A(t)^T E(t) + x(t)^T EBU^{-1}B^T E(t) + x(t)^T E(t)' \end{aligned}$$

$$p' = -pA + x^T W = -x(t)^T E(t)A(t) + x^T W, \ p(T) = -x(T)^T Q.$$

On déduit

$$\begin{aligned} &- x(t)^T E(t)A(t) + x^T(t)W = x^T(t)A(t)^T E(t) + x(t)^T EBU^{-1}B^T E(t) + x(t)^T E(t)' \\ &\Leftrightarrow x(t)^T \left[W - E(t)A(t) - A(t)^T E(t) - EBU^{-1}B^T E(t)\right] = x(t)^T E(t)'. \end{aligned}$$

$x(t)$ étant une solution non triviale, on déduit donc que E vérifie l'équation (4.15).

De la condition $p(T) = x(T)^T E(T) = -x(t)^T Q$, on déduit $E(T) = -Q$.

Démontrons 2. Soit $E(t)$ solution de (4.15). En utilisant l'unicité de la trajectoire optimale, on va maintenant montrer que p s'écrit effectivement sous la forme $p(t) = x(t)^T E(t)$.

Tout d'abord $E(t)$ est symétrique car Q et W sont symétriques, et $E(t)^T$ vérifie le même problème que $E(t)$, donc d'après l'unicité on a $E(t)^T = E(t)$. A priori on ne sait pas cependant que la solution est bien définie sur $[0, T]$ tout entier. On montrera cela plus loin (lemme 4.5).

Posons maintenant $p_1(t) = x_1(t)^T E(t)$, où x_1 est solution de

$$x_1' = Ax_1 + Bu_1, \;\; x_1(0) = x_0$$

et

$$u_1 = U^{-1} B^T E^T x_1.$$

On a alors

$$p_1' = \left(x_1^T\right)' E + x_1^T E' =$$

$$(Ax_1 + BU^{-1}B^T E x_1)^T E + x_1^T (W - A^T E - EA - EBU^{-1}B^T E) = -p_1 A + x_1^T W.$$

On alors (x_1, p_1, u_1) vérifie le système

$$\begin{cases} x_1' = Ax_1 + Bu_1, \;\; x_1(0) = x_0. \\ p_1' = -p_1 A + x_1^T W, \;\;\; p_1(T) = -x_1^T Q. \\ u_1 = U^{-1} B^T E^T x_1 = U^{-1} B^T p_1^T \end{cases}$$

Ce triplet (x_1, p_1, u_1) vérifie exactement les équations du théorème 4.8. Par conséquent la trajectoire x_1 est optimale, et par unicité, il vient $x_1 = x$, $u_1 = u$, puis $p_1 = p$. En particulier on a donc $p = x^T E$, et $u = U^{-1} B^T E^T x$.

Déduisons-en la formule (4.16). Pour cela calculons d'abord, le long de la trajectoire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(x(t)^T E(t) x(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left[p(t)x(t)\right] = p'(t)x(t) + p(t)x'(t) \\ &= (-p(t)A(t) + x(t)^T W(t))x(t) + p(t)(A(t)x(t) + B(t)u(t)) \\ &= x(t)^T W(t) x(t) + p(t)B(t)u(t). \end{aligned}$$

Par ailleurs de l'expression de u on déduit

$$u^T U u = (U^{-1} B^T E^T x)^T U \left(U^{-1} B^T E^T x\right) = x^T E B U^{-1} B^T E^T x = pBu.$$

Finalement on a l'égalité

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)^T E(t)x(t)\right) = x(t)^T W(t)x(t) + u^T(t)Uu(t).$$

Or $u = U^{-1}B^T E^T x$ est le contrôle réalisant le minimum de $C(u)$, par conséquent

$$S_T(x_0) = C(u) = x(T)^T Qx(T) + \int_0^T \frac{d}{dt}\left(x(t)^T E(t)x(t)\right) dt$$

et puisque $E(T) = -Q$ et $x(0) = x_0$, il vient $S_T(x_0) = -x_0^T E(0)x_0$.

Lemme 4.5. *L'application $t \longrightarrow E(t)$ est bien définie sur $[0, T]$ tout entier.*

Démonstration. On sait que $E(t)$ vérifie le problème

$$E'(t) = W(t) - A(t)^T E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U(t)^{-1}B(t)^T E(t),\ E(T) = -Q.$$

Si l'application $E(t)$ n'est pas définie sur $[0, T]$ entier, alors il existe $0 < t_* < T$ tel que $\|E(t)\|$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers t_* par valeurs supérieures, c'est à dire $\lim\limits_{t\to t^{*+}} ||E(t)|| = +\infty$. En particulier pour tout $\alpha > 0$ il existe $t_0 \in]t_*, T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, avec $\|x_0\| = 1$, tels que

$$|x_0^T E(t_0)x_0| > \alpha. \tag{4.17}$$

D'après le théorèmes 4.4 et 4.8, il existe une unique trajectoire optimale $x(\cdot)$ pour le problème LQ sur $[t_0, T]$, telle que $x(t_0) = x_0$. Cette trajectoire est caractérisée par le système d'équations

$$x' = Ax + BU^{-1}B^T p^T, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$p' = -pA + x^T W, \quad p(T) = -x(T)^T Q.$$

Le raisonnement précédent, en remplaçant l'intervalle $[0, T]$ par l'intervalle $[t_0, T]$, montre que $S_{T-t_0}(x_0, u) = -x_0^T E(t_0)x_0$. Par ailleurs, $S_{T-t_0}(x_0, u)$ est inférieur au coût de la trajectoire solution du système, partant de x_0, associée au contrôle nul sur l'intervalle $[t_0, T]$, c'est à dire $S_{T-t_0}(x_0, u) \leq S_{T-t_0}(x_0, 0)$, or il est facile de voir que ce coût est majoré par une constante multiplicative $D > 0$ par $\|x_0\|^2$.

$$S_{T-t_0}(x_0, u) \leq S_{T-t_0}(x_0, 0) = x(T)^T Q x(T) + \int_{t_0}^{T} \|x(t)\|_W^2 \, dt \leq D \|x_0\|^2,$$

car $x(t)$ est borné et x_0 est non nul.

On en déduit donc que $|x_0^T E(t_0) x_0| \leq D \|x_0\|^2$, ce qui contredit (4.17). $\square$

Ceci achève la preuve du théorème 4.13. $\square$

CHAPITRE 3

THÉORIE DU CONTRÔLE OPTIMAL NON LINÉAIRE

L'objectif de cette partie est de présenter des techniques d'analyse de problèmes de contrôle optimal non linéaires.

D'un point de vue global, un problème de contrôle optimal se formule sur une variété M, mais notre point de vue est local et on travaille sur un ouvert V petit de $\mathbb{R}^n$.

La problématique générale du contrôle optimal est la suivante.

Considérons un système de contrôle général

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{0.1}$$

où f est une application de classe C^1 de $I \times V \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $(t_0, x_0) \in I \times V$. Par ailleurs on suppose que les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un sous-ensemble de $L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^m)$.

Ces hypothèses assurent, pour tout contrôle u, l'existence et l'unicité d'une solution maximale $x_u(t)$ sur un intervalle $J \subset I$, du problème de Cauchy (0.1).

Par commodité d'écriture on suppose dans toute la suite que $t_0 = 0$.

Pour tout contrôle $u \in L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^m)$, la trajectoire associée $x_u(\cdot)$ est définie sur un intervalle maximal $[0, t_e(u)[$, où $t_e(u) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Par exemple si $t_e(u) < +\infty$ alors la trajectoire explose en $t_e(u)$ (théorème d'échappement, ou d'explosion).

Pour tout $T > 0, T \in I$, on note U_T l'ensemble des contrôles admissibles sur $[0, T]$, c'est-à-dire l'ensemble des contrôles tels que la trajectoire associée soit bien définie sur $[0, T]$, autrement dit $T < t_e(u)$.

Soient f^0 une fonction de classe C^1 sur $I \times V \times \Omega$, et g une fonction continue sur V. Pour tout contrôle $u \in U_T$ on définit le coût de la trajectoire associée $x_u(\cdot)$ sur l'intervalle $[0, T]$ par :

$$C(T, u) = g(T, x_u(T)) + \int_0^T f^{\,0}(t, x_u(t), u(t))dt. \tag{0.2}$$

Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de V . Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x_u(\cdot)$ solutions de

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t))$$

telles que $x_u(0) \in M_0, \;\; x_u(T) \in M_1$, et minimisant le coût $C(T, u)$.

On dit que le problème de contrôle optimal est à temps final non fixé si le temps final T est libre, sinon on parle de problème à temps final fixé.

Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable. C'est le problème de contrôlabilité. Ensuite, une fois ce problème résolu, il faut chercher parmi toutes ces trajectoires possibles celles qui le font en coût minimal.

1 Application entrée-sortie

Considérons pour le système (0.1) le problème de contrôle suivant : étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver un temps T et un contrôle u sur $[0,T]$ tel que la trajectoire x_u associée à u, solution de (0.1) vérifie

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(T) = x_1.$$

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 1.1. *Soit $T > 0$. L'application entrée-sortie en temps T du système contrôlé (0.1) initialisé à x_0 est l'application*

$$E_T : \underset{u \longrightarrow x_u(T)}{U \longrightarrow \mathbb{R}^n}$$

où U est l'ensemble des contrôles admissibles, c'est à dire, l'ensemble des contrôles u tels que les trajectoires associées sont bien définies sur $[0,T]$.

Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps T associe à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u. Une question importante en théorie du contrôle est d'étudier cette application en décrivant son image, ses singularités, etc.

1.1 Régularité de l'application entrée-sortie

La régularité de E_T dépend bien entendu de l'espace de départ et de la forme du système.

1.1.1 Pour un système général

Proposition 1.2. *Considérons le système (0.1) où f est C^p, $p \geq 1$, et soit $U \subset L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)$ le domaine de définition de E_T , c'est-à-dire l'ensemble des contrôles dont la trajectoire associée est bien définie sur $[0,T]$. Alors U est un ouvert de $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)$ et E_T est C^p au sens L^∞.*

De plus la différentielle (au sens de Fréchet) de E_T en un point $u \in U$ est donnée par le système linéarisé en u de la manière suivante. Posons, pour tout $t \in [0, T]$,

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t)), \;\; B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t))$$

Le système de contrôle linéaire

$$\begin{cases} y_v'(t) = A(t)y_v(t) + B(t)v(t) \\ y_v(0) = 0 \end{cases}$$

est appelé système linéarisé le long de la trajectoire x_u. La différentielle de Fréchet de E_T en u est alors l'application $dE_T(u)$ telle que, pour tout $v \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$

$$dE_T(u).v = y_v(T) = M(T) \int_0^T M^{-1}(s)B(s)v(s)ds$$

où $M(\cdot)$ est la résolvante du système linéarisé, c'est à dire, la solution matricielle de

$$M'(t) = A(t)M(t), \quad M(0) = Id.$$

Démonstration. Pour la démonstration on admet que U est ouvert.

Par hypothèse $u(\cdot)$ et sa trajectoire associée x_u sont définies sur $[0, T]$.

L'ensemble des contrôles étant l'ensemble des applications, mesurables et bornées, muni de la norme L^∞, l'application E_T est de classe C^p sur un voisinage de $u(\cdot)$ en vertu des théorèmes de dépendance par rapport à un paramètre.

Exprimons sa différentielle au sens de Fréchet. Soit $v(\cdot)$ un contrôle fixé, on note $x(\cdot) + \delta x(\cdot)$ la trajectoire associée à $u(\cdot) + v(\cdot)$, issue en $t = 0$ de x_0.

On a $E_T(u + v) - E_T(u) = \delta x(T)$ et on essaye de séparer la partie linéaire de la partie quadratique et etc. (En fait $dE_T(u)v =$ partie linéaire de $\delta x(T)$).

Par un développement de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x+\delta x)(t) &= f(t,x(t)+\delta x(t),u(t)+v(t)) \\ &= f(t,x(t),u(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t),u(t))\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t,x(t),u(t))v(t) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(t,x(t),u(t))(\delta x(t),v(t)) + \cdots\end{aligned}$$

Par ailleurs, $x'(t) = f(t,x(t),u(t))$, donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta x)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t),u(t))\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t,x(t),u(t))v(t) \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(t,x(t),u(t))(\delta x(t),v(t)) + \cdots\end{aligned}$$

En écrivant $\delta x = \delta_1 x + \delta_2 x + \cdots$ où $\delta_1 x$ est la partie linéaire en v, $\delta_2 x$ la partie quadratique, etc, et en identifiant, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta_1 x)(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t),u(t))\delta_1 x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t,x(t),u(t))v(t) \\ &= A(t)\delta_1 x(t) + B(t)v(t)\end{aligned}$$

Or $x(0) + \delta x(0) = x_0 = x(0)$, donc $\delta x(0) = 0$ et la condition initiale de cette équation différentialle est $\delta_1 x(0) = 0$. En intégrant, on obtient

$$\delta_1 x(T) = M(T)\int_0^T M^{-1}(s)B(s)v(s)ds$$

où M est la résolvante du système homogène $\frac{d}{dt}(\delta_1 x)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t),u(t))\delta_1 x(t)$, c'est-à-dire $M'(t) = A(t)M(t)$ avec $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t),u(t))$ et $M(0) = I_n$.

On observe que $\delta_1 x(T)$ est linéaire et continu par rapport à $v(\cdot)$ en topologie L^∞. C'est donc la différentielle de Fréchet en $u(\cdot)$ de E_T. $\square$

Remarque 1.1. *En général E_T n'est pas définie sur $L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$ tout entier à cause de phénomènes d'explosion. Par exemple si on considère le système scalaire $x' = x^2 + u,\ x(0) = 0$, on voit que pour $u = 1$ la trajectoire associée explose en $t = \frac{\pi}{2}$, et donc n'est pas définie sur $[0,T]$ si $T \geq \frac{\pi}{2}$.*

1.1.2 Pour un système affine

Définition 1.3. *On appelle système affine contrôlé un système de la forme*

$$x'(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) f_i(x(t)),$$

où les f_i sont des champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $f_i = [f_{i1}, ..., e_{in}]$.

Pour un système affine on peut améliorer le résultat précédent.

Proposition 1.4. *Considérons un système affine lisse, et soit U le domaine de définition de E_T Alors U est un ouvert de $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, et l'application entrée-sortie E_T est lisse au sens L^2, et est analytique si les champs de vecteurs sont analytiques.*

Il est très intéressant de considérer L^2 comme espace de contrôles. En effet dans cet espace on bénéficie d'une structure hilbertienne qui permet de faire une théorie spectrale de l'application entrée-sortie, et on bénéficie d'autre part de bonnes propriétés de compacité faible.

2 Contrôlabilité

On veut répondre à la question suivante : étant donné le système (0.1), où peut-on aller en temps T en faisant varier le contrôle u? On est tout d'abord amené à définir la notion d'ensemble accessible.

Définition 2.1. *L'ensemble accessible en temps T pour le système (0.1), noté $Acc(x_0, T)$, est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$. Autrement dit, c'est l'image de l'application* ***entrée-sortie*** *en temps T.*

Théorème 2.1. *Considérons le système de contrôle*

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

où la fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}^{1+n+m}$, et les contrôles u appartiennent à l'ensemble U des fonctions mesurables à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset L^\infty([0, T], \Omega)$. On suppose que

- *il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée est uniformément bornée par b sur $[0, T]$, c'est à dire*

$$\exists b > 0 \text{ tel que } \forall u \in U \quad \forall t \in [0, T] \; quad \, \|x_u(t)\| \leq b, \tag{2.1}$$

- *Pour tout (t, x), l'ensemble des vecteurs vitesses*

$$V(t, x) = \{f(t, x, u) \mid u \in \Omega\} = f(t, x, \Omega) \tag{2.2}$$

est convexe.

Alors l'ensemble $Acc(x_0, t)$ est compact et varie continûment en t sur $[0, T]$.

Démonstration. Notons tout d'abord que puisque Ω est compact alors $V(t, x)$ est également compact.

Montrons la compacité de $Acc(x_0, t)$. Cela revient à montrer que toute suite (x_n) de points de $Acc(x_0, t)$ admet une sous-suite convergente.

Pour tout entier n soit u_n un contrôle reliant x_0 à x_n en temps t, et soit $x_n(\cdot)$ la trajectoire correspondante. On a donc

$$x_n = x_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_n(s), u_n(s))ds.$$

Posons, pour tout entier n et presque tout $s \in [0, t]$,

$$g_n(s) = f(s, x_n(s), u_n(s))$$

D'après les hypothèses il s'ensuit que la suite de fonctions $(g_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty([0, t], \mathbb{R}^n)$, et par conséquent à sous-suite près elle converge vers une fonction $g(\cdot)$ pour la topologie **faible étoile** de $L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$.

Posons alors, pour $\tau \in [0, t]$

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau g(s)ds \ \ ,$$

ce qui définit une application $x(\cdot)$ absolument continue sur $[0, t]$. De plus on a, pour tout $s \in [0, t]$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n(s) = x(s),$$

c'est à dire la suite de fonctions $(x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $x(\cdot)$. Le but est de montrer que la trajectoire $x(\cdot)$ est associée à un contrôle u à valeurs dans Ω, ce qui revient à montrer que pour presque tout $s \in [0, t]$ on a $g(s) = f(s, x(s), u(s))$.

Pour cela, définissons, pour tout entier n et presque tout $s \in [0, t]$,

$$h_n(s) = f(s, x(s), u_n(s)),$$

et introduisons l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{h(.) \in L^2([0, t], \mathbb{R}^n) \mid h(s) \in V(s, x(s)) \text{ p. p. } s \in [0, t]\},$$

de sorte que $h_n \in \mathcal{V}$ pour tout entier n, car $h_n \in L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$ et $h_n(s) = f(s,x(s),u_n(s)) \in V(s,x(s))$.

Pour tout (t,x) l'ensemble $V(t,x)$ est compact convexe.

En utilisant le fait que, de toute suite convergeante fortement dans L^2 on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout, on montre que $\mathcal{V}$ est convexe fermé dans $L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$ pour la topologie forte.

Donc il est également fermé dans $L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie faible.

Or, similairement à (g_n), la suite de fonctions (h_n) est bornée dans L^2, et donc à sous-suite près converge en topologie faible vers une fonction h, qui appartient nécessairement à $\mathcal{V}$ puisque ce sous-ensemble est fermé faiblement dans $L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$.

Enfin, montrons que $g = h$ presque partout. Pour cela, écrivons, pour toute fonction $\varphi \in L^2([0,t],\mathbb{R})$,

$$\int_0^t \varphi(s)g_n(s)ds = \int_0^t \varphi(s)h_n(s)ds + \int_0^t \varphi(s)\left(g_n(s) - h_n(s)\right)ds. \tag{2.3}$$

D'après les hypothèses, la fonction f est globalement lipschitzienne en x sur $[0,T] \times \overline{B}(0,b) \times \Omega$, et donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour presque tout $s \in [0,t]$,

$$\|g_n(s) - h_n(s)\| \leq C\,\|x_n(s) - x(s)\|$$

La suite de fonctions (x_n) converge simplement vers $x(\cdot)$, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^t \varphi(s)\left(g_n(s) - h_n(s)\right)ds \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Finalement en passant à la limite dans (2.3), il vient

$$\int_0^t \varphi(s)g(s) = \int_0^t \varphi(s)h(s)$$

pour toute fonction $\varphi \in L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$, et par conséquent $g = h$ presque partout sur $[0,t]$.

En particulier $g \in \mathcal{V}$, et donc pour presque tout $s \in [0,t]$ il existe $u(s) \in \Omega$ tel que

$$g(s) = f(s, x(s), u(s)).$$

En appliquant un lemme de sélection mesurable de théorie de la mesure (notons que $g \in L^\infty([0,t], \mathbb{R}^n)$, on peut montrer que l'application $u(\cdot)$ peut être choisie mesurable sur $[0, T]$.

Ainsi, la trajectoire $x(\cdot)$ est associée sur $[0,t]$ au contrôle u à valeurs dans Ω, et $x(t)$ est la limite des points x_n. Ceci montre la compacité de $Acc(x_0, t)$.

Il reste à établir la continuité par rapport à t de l'ensemble accessible. Soient t_1, t_2 deux réels tels que $0 < t_1 < t_2 \leq T$, et x_2 un point de $Acc(x_0, t_2)$. Par définition il existe un contrôle u à valeurs dans Ω, de trajectoire associée $x(\cdot)$, tel que

$$x_2 = x(t_2) = x_0 + \int_0^{t_2} f(t, x(t), u(t))dt.$$

Il est bien clair que le point

$$x_1 = x(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$$

appartient à $Acc(x_0, t_1)$, et de plus d'après les hypothèses sur f on a

$$\|x_2 - x_1\| \leq C|t_2 - t_1|.$$

On conclut alors facilement. □

Remarque 2.2. *L'hypothèse (2.1) est indispensable, elle n'est pas une conséquence des autres hypothèses. En effet considérons de nouveau le système de la remarque précedante c'est à dire* $x\prime = x^2 + u,\ \ x(0) = 0$, *où on suppose que* $|u| \leq 1$ *et que le temps final est* $T = \dfrac{\pi}{2}$. *Alors pour tout contrôle* u *constant égal à* c, *avec* $0 < c < 1$, *la trajectoire associée est* $x_c(t) = \sqrt{c}\tan\left(\sqrt{c}t\right)$, *donc est bien définie sur* $[0, T]$, *mais lorsque* c *tend vers* 1 *alors* $x_c(T)$ *tend vers* $+\infty$. *Par ailleurs il est facile de voir que sur cet exemple l'ensemble des contrôles admissibles, à valeurs dans* $[-1, 1]$, *est l'ensemble des fonctions mesurables telles que* $u(t) \in [-1, 1[$.

Définition 2.2. *Le système (0.1) est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si*

$$\underset{T\geq 0}{\cup} Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Il est dit contrôlable en temps T si $Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$.

Par des arguments du type théorème des fonctions implicites, l'étude de la contrôlabilité du système linéarisé (qui est plus simple), permet de déduire des résultats de contrôlabilité locale du système de départ. Par exemple on déduit du théorème de contrôlabilité dans le cas linéaire la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Considérons le système (0.1) où $f(x_0, u_0) = 0$. Notons*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) \;\; et \;\; B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0).$$

On suppose que

$$rg(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n.$$

Alors le système est localement contrôlable en x_0.

3 Contrôle optimal

3.1 Présentation du problème

Maintenant, en plus d'un problème de contrôle, on se donne un problème de minimisation : parmi toutes les solutions du système (0.1) reliant x_0 à x_1, trouver une trajectoire qui minimise une certaine fonction coût $C(T, u)$. Une telle trajectoire, si elle existe, est dite optimale pour ce coût. L'existence de trajectoires optimales dépend de la régularité du système et du coût. Il se peut aussi qu'un contrôle optimal n'existe pas dans la classe de contrôles considérés, mais existe dans un espace plus gros : c'est le phénomène de Lavrentiev. En particulier on a intérêt à travailler dans un espace de contrôles complet et qui ait de bonnes propriétés de compacité.

3.2 Existence de trajectoires optimales

3.2.1 Pour des systèmes généraux

Théorème 3.1. *Considérons le système de contrôle*

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

où f est C^1 de $\mathbb{R}^{1+n+m}$ dans $\mathbb{R}^n$, les contrôles u sont à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, et où éventuellement, on a des contraintes sur l'état

$$c_1(x) \leq 0, \cdots, c_r(x) \leq 0$$

où $c_1, ...c_r$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$. Soient M_0 et M_1 deux **compacts** *de $\mathbb{R}^n$ tels que M_1 est accessible depuis M_0. Soit U l'ensemble des contrôles à valeurs dans Ω joignant M_0 à M_1. Soient f_0 une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{1+n+m}$ dans $\mathbb{R}$, et g une fonction continue de $\mathbb{R}^{1+n}$ dans $\mathbb{R}$. On considère le coût*

$$C(u) = g(t(u), x(t(u)) + \int_0^{t(u)} f_0(s, x(s), u(s))ds \tag{3.1}$$

où $t(u) > 0$ est tel que $x(t(u)) \in M_1$. On suppose que

- *Il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in U$ est uniformément bornée par b sur $[0, t(u)]$, ainsi que le temps $t(u)$, c'est à dire :*

$$\exists b > 0 \mid \forall u \in \mathcal{U} \ \ \forall t \in [0, t(u)], \ \ t(u) + \|x_u(t)\| \leq b.$$

- *Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$, l'ensemble*

$$\widetilde{V}(t,x) = \left\{ \begin{pmatrix} f(t,x,u) \\ f^0(t,x,u) + \gamma \end{pmatrix} \mid \ u \in \Omega, \ \gamma \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{3.2}$$

est convexe.

*Alors il existe un contrôle **optimal** u sur $[0, t(u)]$ tel que la trajectoire associée joint M_0 à M_1 en temps $t(u)$ et en coût minimal.*

Bien entendu pour un problème de contrôle optimal à temps final fixé, on impose $t(u) = T$ (et en particulier on suppose que la cible M_1 est accessible depuis M_0 en temps T).

La preuve de ce théorème est semblable à celle du théorème 2.1. La prise en compte de contraintes sur l'état ne pose aucun problème. Notons que l'hypothèse (3.2) implique la convexité de l'ensemble des vecteurs vitesses, et aussi (terme $\gamma > 0$) une propriété de convexité d'épigraphe. Nous donnons tout de même cette preuve ci-dessous.

Remarque 3.2. *On peut montrer un résultat plus général où l'ensemble de départ M_0 et la cible M_1 dépendent du temps t, ainsi que le domaine des contraintes Ω sur le contrôle.*

Démonstration. Soit δ l'infimum des coûts $C(\ \ )$ sur l'ensemble des contrôles admissibles $u \in L^\infty([0, t(u)], \Omega)$ engendrant des trajectoires telles que $x(0) \in M_0$, $x(t(u)) \in M_1$ et vérifiant les contraintes sur l'état $c_1(x(\cdot)) \leq 0, ..., c_r(x(\cdot)) \leq 0$.

Considérons une suite minimisante de trajectoires $x_n(\cdot)$ associées à des contrôles u_n, c'est-à-dire une suite de trajectoires vérifiant ces propriétés et telle que $C(u_n) \to \delta$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Pour tout n on note

$$\widetilde{F}_n(t) = \begin{pmatrix} f(t, x_n(t), u_n(t)) \\ f^{\,0}(t, x_n(t), u_n(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n(t) \\ F_n^0(t) \end{pmatrix}$$

pour presque tout $t \in [0, t(u_n)]$. D'après les hypothèses, la suite de fonctions $(\widetilde{F}_n(.))$ (étendues par 0 sur $]t_n(u_n), b]$) est bornée dans $L^\infty([0, b], \mathbb{R}^n)$, et par conséquent à sous-suite près elle converge vers une fonction

$$\widetilde{F}(.) = \begin{pmatrix} F(t) \\ F^0(t) \end{pmatrix}$$

pour la topologie faible étoile de $L^\infty([0, b], \mathbb{R}^{n+1})$,. A sous-suite près de même la suite $(t_n(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T > 0$, et on a $\widetilde{F}(t) = 0$ pour $t \in]T, b]$. Enfin, par compacité de M_0, à sous-suite près la suite $(x_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x_0 \in M_0$. Posons alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(s)ds,$$

ce qui construit une fonction $x(\cdot)$ absolument continue sur $[0, T]$. De plus on a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n(t) = x(t),$$

c'est à dire la suite de fonctions $(x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $x(\cdot)$. Comme dans la preuve du théorème 2.1, le but est de montrer que la trajectoire $x(\cdot)$ est associée à un contrôle u à valeurs dans Ω, et que de plus ce contrôle u est optimal pour le problème considéré.

Pour tout entier n et presque tout $t \in [0, t(u_n)]$, on pose

$$\widetilde{h}_n(t) = \begin{pmatrix} f(t, x(t), u_n(t)) \\ f^{\,0}(t, x(t), u_n(t)) \end{pmatrix}$$

Si $T > t(u_n)$, on étend $\widetilde{h}_n$ sur $[0, T]$ par

$$\widetilde{h}_n(t) = \begin{pmatrix} f(t,x(t),v) \\ f^{\,0}(t,x(t),v) \end{pmatrix}$$

où $v \in \Omega$ est quelconque. Par ailleurs, on définit

$$\beta = \max\{|f^{\,0}(t,x,u)| \text{ tq } 0 \leq t \leq b,\ \ \|x\| \leq b,\ \ u \in \Omega\}.$$

Comme Ω est compact, $\beta > 0$ est bien défini. Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on modifie alors légèrement la définition de $\widetilde{V}(t,x)$ pour le rendre compact (tout en le gardant convexe), en posant

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_\beta(t,x) &= \left\{ \begin{pmatrix} f(t,x,u) \\ f^{\,0}(t,x,u)+\gamma \end{pmatrix} \mid u \in \Omega,\ \gamma \geq 0,\ |f^{\,0}(t,x,u)+\gamma| \leq \beta \right\} \\ &= \begin{pmatrix} f(t,x,\Omega) \\ f^{\,0}(t,x,\Omega)+\gamma \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \\ [-\beta,+\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On définit alors

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \{\widetilde{h}(.) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{n+1}) \mid h(t) \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t)) \ \text{ pp tout } t \in [0,T]\}.$$

Par construction, on a $\widetilde{h}_n \in \widetilde{\mathcal{V}}$ pour tout entier n.

Lemme 3.1. *L'ensemble $\widetilde{\mathcal{V}}$ est convexe fermé fort dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^{n+1})$.*

Démonstration. (Du lemme 3.1. Montrons que $\widetilde{\mathcal{V}}$ est convexe. Soient $\widetilde{r}_1$, $\widetilde{r}_2 \in \widetilde{\mathcal{V}}$, et $\lambda \in [0,1]$. Par définition, pour presque tout $t \in [0,T]$ on a $\widetilde{r}_1(t) \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t))$, et $\widetilde{r}_2(t) \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t))$, or $\widetilde{V}_\beta(t,x(t))$ est convexe donc $\lambda\widetilde{r}_1(t) + (1-\lambda)\widetilde{r}_2(t) \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t))$. Donc $\lambda\widetilde{r}_1 + (1-\lambda)\widetilde{r}_2 \in \widetilde{\mathcal{V}}$.

Montrons que $\widetilde{\mathcal{V}}$ est fermé fort dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$. Soit $(\widetilde{r}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\widetilde{\mathcal{V}}$ convergeante vers $\widetilde{r}$ pour la topologie forte de $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$. Montrons que $\widetilde{r} \in \widetilde{\mathcal{V}}$. A sous-suite près, $(\widetilde{r}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers $\widetilde{r}$, or par définition, pour presque tout $t \in [0,T]$ on a $\widetilde{r}_n(t) \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t))$, et $\widetilde{V}_\beta(t,x(t))$ est compact, donc $\widetilde{r} \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t))$ pour presque tout $t \in [0,T]$. □

L'ensemble $\widetilde{\mathcal{V}}$ est donc aussi convexe fermé **faiblement** dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^{n+1})$. La suite de fonctions $(\widetilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^{n+1})$, à sous-suite près elle converge faiblement vers une fonction

$\widetilde{h}$, qui appartient à $\widetilde{\mathcal{V}}$ puisque ce sous-ensemble est fermé faiblement.

Montrons que $\widetilde{F} = \widetilde{h}$ presque partout. Pour cela, écrivons, pour toute fonction $\varphi \in L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$,

$$\int_0^T \varphi(t)\widetilde{F}_n(t)dt = \int_0^T \varphi(t)\widetilde{h}_n(t)dt + \int_0^T \varphi(t)\left(\widetilde{F}_n(t) - \widetilde{h}_n\right)dt. \tag{3.3}$$

D'après les hypothèses, les fonctions f et f^0 sont globalement lipschitziennes en x sur $[0,T] \times \overline{B}(0,b) \times \Omega$, et donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour presque tout $t \in [0,T]$, on ait

$$\left\|\widetilde{F}_n(t) - \widetilde{h}_n(t)\right\| \leq C \left\|x_n(t) - x(t)\right\|.$$

La suite de fonctions $(x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $x(\cdot)$, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^T \varphi(t)\left(\widetilde{F}_n(t) - \widetilde{h}_n\right)dt \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement en passant à la limite dans (3.3), il vient

$$\int_0^T \varphi(t)\widetilde{F}(t)dt = \int_0^T \varphi(t)\widetilde{h}(t)dt$$

pour toute fonction $\varphi \in L^2([0,T])$, et par conséquent $\widetilde{F} = \widetilde{h}$ presque partout sur $[0,T]$.

En particulier, $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{V}}$, et donc pour presque tout $t \in [0,T]$ il existe $u(t) \in \Omega$ et $\gamma(t) > 0$ tels que

$$\widetilde{F}(t) = \begin{pmatrix} f(t, x(t), u(t)) \\ f^0(t), x(t), u(t)) + \gamma(t) \end{pmatrix}$$

En appliquant un lemme de sélection mesurable de théorie de la mesure (notons que $\widetilde{F} \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^{n+1})$, les fonctions $u(\cdot)$ et $\gamma(\cdot)$ peuvent de plus être choisies mesurables sur $[0,T]$.

Il reste à montrer que le contrôle u ainsi défini est optimal pour le problème considéré. Tout d'abord, comme $x_n(t_n(u_n)) \in M_1$, par compacité de M_1 et d'après les propriétés de convergence montrées précédemment, on obtient $x(T) \in M_1$. De même, clairement on obtient $c_1(x(\cdot)) \leq 0, \cdots, c_r(x(\cdot)) \leq 0$. Par ailleurs, par définition

$C(u_n)$ converge vers δ, et d'après les propriétés de convergence démontrées ci-dessus, $C(u_n)$ converge aussi vers $\int_0^T (f^0(t,x(t),u(t)) + \gamma(t))dt + g(T,x(T))$. Comme γ est à valeurs positives, cela implique donc que

$$\int_0^T f^0(t,x(t),u(t))dt + g(T,x(T)) \leq \int_0^T (f^0(t,x(t),u(t)) + \gamma(t))dt + g(T,x(T)) \leq C(v)$$

pour tout contrôle v admissible qui engendre une trajectoire reliant M_0 à M_1 et vérifiant les différentes contraintes. Autrement dit, le contrôle u est optimal. Notons d'ailleurs que la fonction γ est forcément nulle. La preuve du théorème 3.1 est achevée. $\square$

3.2.2 Pour des systèmes affines

Le résultat précédent suppose des contraintes sur le contrôle. En l'absence de contraintes, on a par exemple, pour les systémes affines, le résultat suivant :

Proposition 3.2. *Considérons le système affine dans* $\mathbb{R}^n$

$$x' = f^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \quad x(0) = x_0, \ \ x(T) = x_1,$$

avec le coût

$$C_T(u) = \int_0^T \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t)dt$$

où $T > 0$ *est fixé et la classe* $\mathcal{U}$ *des contrôles admissibles est le sous-ensemble de* $L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ *tel que*

1. $\forall u \in \mathcal{U} \ \ x_u$ *est bien définie sur* $[0,T]$;

2. $\exists B_T \mid \forall u \in \mathcal{U} \ \ \forall t \in [0,T] \ \ ||x_u(t)|| \leq B_T$.

Si x_1 *est accessible depuis* x_0 *en temps* T, *alors il existe un contrôle optimal reliant* x_0 *à* x_1.

Démonstration. Considérons une suite de contrôles $(u_i^{(n)}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ transférant x_0 en x_1, telle que leur coût tend vers la borne inférieure des coûts des contrôles reliant x_0 à x_1. Soit $x^{(n)}$ la trajectoire associée au contrôle $u^{(n)}$, c'est à dire

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int_0^T \left(f_0(x^{(n)}(t)) + \sum_{i=1}^m u_i^{(n)}(t) f_i(x^{(n)}(t) \right) dt.$$

Les $u_i^{(n)}$ sont bornés dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, et par compacité faible,

$$\exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid u_i^{(n_k)} \text{ converge faiblement vers } v_i \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m).$$

Il est par ailleurs facile de voir que la suite $x'^{(n_k)}$ est bornée dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$, et par conséquent $x^{(n_k)}$ est bornée dans $H^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, et par réflexivité,

$$\exists (n_{k_p})_{p\in\mathbb{N}} \mid x^{(n_{k_p})} \text{ converge faiblement vers } x \in H^1([0,T],\mathbb{R}^n).$$

Or H^1 s'injecte continuement dans C^0 , donc $x^{(n_{k_p})}$ converge uniformément vers x sur $[0,T]$. On conclut alors aisément par passage à la limite que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m v_i(t) f_i(x(t)) \right) dt$$

et que $x(T) = x_1$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press 1975.

[2] A. Aves, Calcul différentiel, Masson, Paris, 1983.

[3] M. Bregounioux, Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, Dunod, Collection Sciences Sup, 2001.

[4] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson 1983.

[5] J.M. Coron, Control and Nonlinearity, Mathematical surveys and monographs, 2007.

[6] L.C. Evans, Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics 1998.

[7] L.M. Hocking, Optimal control and introduction to the theory with applications, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Serie 1991.

[8] A. Isidori, Non linear control systems, Third edition, Communications and Control Engineering Series, Springer- Verlag, Berlin 1995.

[9] A. Leitmann, An introduction to optimal control, Mccrow-Hill Book Company, 1966.

[10] A. Locatelli, Optimal control, an introduction, Birkhauser, Basel 2001.

[11] H. Nijmeijer, A.J. Van Der Shaft, Non linear dynamical control systems, Springer Verlag 1990.

[12] L. Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, E. Michtchenko, Théorie Mathématique des processus optimaux, Editions Mir, Moskou 1974.

[13] E.D. Sontag, Mathematical Control theory, Deterministic finite dimensional systems, Springer-Verlag, 2nd Edition 1998.

[14] R. Tréalat, Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost, Journal of Dynamical and Control systems, Volume 6, No 4, 2005, 511 − 541.

[15] R. Tréalat, Contrôle optimal : Théorie et Applications, Vuibert, Collection Mathématiques Concrètes, 2005.