Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

CONTRÔLE OPTIMAL

Arij BOUZELMATE

Master: Mathématiques Appliquées à la Finance

Plan du Cours

1. **Rappels d'algèbre linéaire**
2. **Contrôle optimal de systèmes linéaires**
3. **Théorie de contrôle optimal non linéaire**

1. **Exponentielle d'une matrice**
2. **Réduction des endomorphismes**
3. **Etude des systèmes linéaires**

Soit $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $\| \ \|$ une norme multiplicative (matricielle) sur $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$ (i.e. elle vérifie en plus l'inégalité : $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$; (par exemple les normes d'opérateurs sont multiplicatives).

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$. On définit l'exponentielle de la matrice A par

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

C'est une série normalement convergente dans le Banach $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$, vu que

$$\left\| \sum_{k=0}^{q} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{q} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{q} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \exp(\|A\|).$$

Proposition

– *Pour toute* $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$, *on a* $\exp(A) \in GL_n(\Bbbk)$, *et* $(\exp(A))^{-1} = exp(-A)$.
– *L'application exponentielle est* $\Bbbk$*-analytique (et donc en particulier est de classe* C^∞ *sur le corps* $\Bbbk$*).*
– *La différentielle de Fréchet* $D(\exp(0))$ *de l'application exponentielle en* 0 *est égale à l'identité sur* $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$ *c'est à dire* $D(\exp(0)) = I$.
– *Pour toutes matrices* $A, B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$, *qui* ***commutent*** $(AB = BA)$, *on a*

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

– *Si* $P \in GL_n(\Bbbk)$, *alors* $P\exp(A)P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$.
– *Pour* $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$, *l'application* $f(t) = \exp(tA)$ *est dérivable, et* $f'(t) = A\exp(tA)$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ est de dimension n^2 sur $\mathbb{k}$, donc les éléments $I, A, ..., A^{n^2}$ sont linéairement **dépendants**. Par conséquent il existe des polynômes P annulateurs de A, c'est à dire tels que $P(A) = 0$. L'anneau $\mathbb{k}[X]$ étant principal, l'idéal des polynômes annulateurs de A admet un unique générateur normalisé, i.e. un unique polynôme de plus petit degré, dont le coefficient dominant est égal à 1, annulant A ; on l'appelle polynôme minimal de la matrice A, noté π_A.
Par ailleurs, le polynôme caractéristique de A, noté χ_A, est défini par

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Théorème (Théorème de Hamilton-Cayley)

$\chi_A(A) = 0.$
En particulier, le polynôme minimal π_A *divise le polynôme caractéristique* χ_A.
Notons que degré $(\chi_A) = n$ *et* $\deg \pi_A \leq n$.

Exemple

Pour une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ *nilpotente, i.e. il existe un entier* $p > 1$ *(*p *le plus petit) tel que* $N^p = 0$*, on a nécessairement* $p \leq n$, $\pi_N(\lambda) = \lambda^p$ *et* $\chi_N(\lambda) = \lambda^n$.

Exemple

Pour une matrice compagnon, c'est à dire une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\pi_A(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Le scalaire $\lambda \in \mathbb{k}$ est dit valeur propre s'il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{k}^n$, appelé vecteur propre, tel que $Av = \lambda v$.

L'espace **propre** associé à la valeur propre λ est défini par

$$E(\lambda) = ker(A - \lambda I);$$

c'est l'ensemble des vecteurs propres de A associés à la même valeur propre λ.
Lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, les valeurs propres de A sont exactement les racines du polynôme caractéristique χ_A. En particulier on a

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - \lambda_i)^{m_i} \text{ et } \pi_A(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - \lambda_i)^{s_i}$$

avec $s_i \leq m_i$. L'entier s_i (resp. m_i) est appelé ordre de nilpotence (resp. multiplicité) de la valeur propre λ_i. L'espace **caractéristique** de la valeur propre λ_i est défini par

$$N(\lambda_i) = \ker(A - \lambda_i I)^{s_i}.$$

Théorème (Théorème de décomposition des noyaux)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ *et* $P \in \mathbb{k}[X]$ *un polynôme tel que*

$$P(X) = \prod_{i=1}^{r} P_i(X)$$

où les polynômes P_i *sont premiers entre eux deux à deux. Alors*

$$\ker P(A) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(A).$$

De plus, chaque sous-espace $\ker P_i(A)$ *est invariant par* A*, i.e* $A(\ker P_i(A)) \subset \ker P_i(A))$*, et la projection* p_i *sur* $\ker P_i(A)$ *parallèlement à* $\bigoplus_{j \neq i} \ker P_j(A)$ *est un polynôme en* A*.* ($p_i = Q(A)$, Q *étant un polynôme)*

En appliquant ce théorème au polynôme minimal de A (matrice précédente : matrice compagnon), on obtient, lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} N(\lambda_i).$$

Notons que $N(\lambda_i) = \ker(X - \lambda_i)^{s_i} = \ker(X - \lambda_i)^{m_i},\ s_i = m_i$.
La restriction de A à $N(\lambda_i)$ est de la forme $\lambda_i I + N_i$, où N_i est une matrice nilpotente d'ordre s_i. On peut alors montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ admet une unique décomposition $A = D + N$, où D est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, N est nilpotente, et de plus $DN = ND$ (décomposition $D + N$).

On peut préciser ce résultat avec la théorie de Jordan.

Théorème (Décomposition de Jordan)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$; on suppose que π_A est scindé sur $\mathbb{k}$ (ce qui est toujours le cas sur $\mathbb{C}$) tel que $\pi_A(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{s_i}$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{k})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$ où les matrices A_i sont diagonales par blocs

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & J_{i,e_i} \end{pmatrix}$$

et où les matrices $J_{i,k}$, $1 \leq i \leq r,\ 1 \leq k \leq e_i$, sont des blocs de Jordan, i.e. des matrices carrées de la forme

$$J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

n'ayant pas forcément toutes le même ordre $|J_{i,k}|$. Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, on a $e_i = \dim E(\lambda_i)$, et $\underset{1 \leq k \leq e_i}{max} |J_{i,k}| = s_i$.

On considère le système linéaire

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t), & \forall t \in I =]0, T[\\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où $Y : I \to \mathbb{k}^n$ est l'inconnue, $A : I \to \mathbb{k}^{n\times n}$ est une matrice à coefficients continus, $b : I \to \mathbb{k}^n$ est un vecteur à coefficients continus.

Théorème

Pour chaque $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{k}^n$ il passe une seule solution de (3.1) définie sur I.

Conséquence.
1) L'ensemble des solutions de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t)$ noté S_0, est un espace vectoriel de dimension n.
2) L'ensemble des solutions de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t)$ est de la forme $Y_0 + Y_1$ où $Y_0 \in S_0$ et Y_1 est une solution particulière de $Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t)$.

Etude de $Y'(t) = AY(t)$, A ne dépend pas de t

Soit A diagonalisable. Cela veut dire que A admet n vecteurs propres V_i linéairement indépendents, associés à n valeurs propres $\lambda_i \in K$, non nécessairement distinctes ; cela est aussi équivalent à dire que $A = PDP^{-1}$ où P (matrice de passage de la base canonique à la base propre) est une matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de A et D est une matrice diagonale ayant sur la diagonale les valeurs propres de A. Alors, les n fonctions $t \rightarrow \exp(\lambda_i t).Vi$ sont, à chaque instant t, linéairement indépendents et forment donc une base pour S_0.

Cela implique que

(a) La solution générale de $Y'(t) = AY(t)$ est $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\lambda_i t) V_i$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$ ou également $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\lambda_i (t - t_0)) V_i$.

(b) La solution de $Y'(t) = AY(t)$ qui passe par (t_0, Y_0) est $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\lambda_i (t - t_0)) V_i$. où α_i sont tels que $Y(t_0) = Y_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$.