Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

CONTRÔLE OPTIMAL

Arij BOUZELMATE

Master: Mathématiques Appliquées à la Finance

Plan du Cours

1. **Rappels d'algèbre linéaire**
2. **Contrôle optimal de systèmes linéaires**
3. **Théorie de contrôle optimal non linéaire**

1. **Problème étudié**
2. **Contrôlabilité**
3. **Temps-Optimalité**
4. **Théorie linéaire-quadratique**

Problème étudié

Le problème général étudié dans cette partie est le suivant. Soient n et m deux entiers naturels non nuls, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient A, B et r trois applications L^∞ sur I (en fait, localement intégrables (L^1_{loc}) suffit) à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$).

$$\begin{gathered} A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ r : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \end{gathered}$$

Problème étudié

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) & \forall t \in I \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur I , à valeurs dans le sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. $\left(u \in L^{\infty}_{loc}(I, \Omega)\right)$.

Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour tout contrôle $u \in L^{\infty}_{loc}(I, \Omega)$, le système (1.1) admet une unique solution $x(.) : I \to \mathbb{R}^n$, absolument continue.

Avant de continuer l'étude du problème considéré, on donne quelques rappels sur la résolvante.

Définition 1.1

On appelle résolvante du problème (1.1) la solution du problème de Cauchy

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0) = A(t)R(t, t_0), \quad R(t_0, t_0) = Id$$

où $R(t, t_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Problème étudié

Proposition 1.1

La résolvante possède les propriétés suivantes :

$$R(t_2, t_0) = R(t_2, t_1).R(t_1, t_0).$$
$$\left(\Rightarrow R(0, t) = R(t, 0)^{-1}\right)$$

Si $\Delta(t, t_0) = \det R(t, t_0)$, *on a*

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}(t, t_0) = traceA(t).\triangle(t, t_0), \quad \Delta(t_0, t_0) = 1.$$

La solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

est donnée par $x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds.$

Remarque 1.1

Lorsque $t_0 = 0$, *on note plutôt* $M(t) = R(t, 0)$. *La formule de variation de la constante s'écrit alors*

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t)\int_0^t M(s)^{-1}b(s)ds.$$

Exemple 1.1 (Cas des systèmes autonomes)

.

Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$: $\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors, dans ce cas, la résolvante est* $M : t \to \exp(tA)$, *et la solution de ce problème est*

$$x : t \longrightarrow \exp(tA)x_0.$$

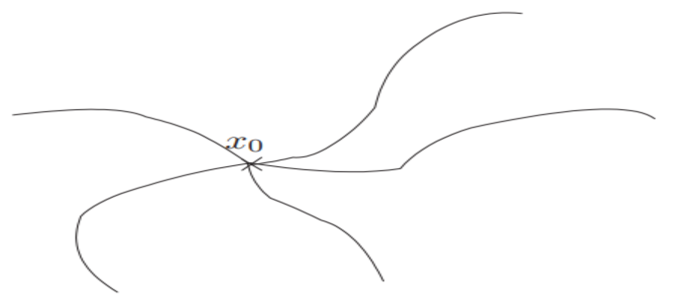
Retour au problème étudié

Soit $M(.) : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la solution du système linéaire homogène $x'(t) = A(t)x(t)$, définie par $M'(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = Id$. Notons que si $A(t) = A$ est constante sur I, alors $M(t) = exp(tA)$.
Alors, la solution $x(\cdot)$ du système (1.1) associée au contrôle u est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &= M(t)x_0 + M(t)\int_0^t M(-s)(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &= M(t)x_0 + M(t)\int_0^t M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$. L'application $x(.)$ dépend de u. Donc si on change la fonction u, on obtient une autre trajectoire $t \to x(t)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Problème étudié



Problème étudié

Deux questions se posent alors naturellement :
– Etant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un contrôle u tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne x_0 à x_1 en un temps fini T ? **C'est le problème de contrôlabilité.**
– Si la condition précédente est remplie, existe-t-il un contrôle joignant x_0 à x_1, et qui est de plus minimise une certaine fonctionnelle $C(u)$? **C'est le problème de contrôle optimal.**
La fonctionnelle $C(u)$ est un critère d'optimisation, on l'appelle le coût. Par exemple ce coût peut être égal au temps de parcours ; dans ce cas **c'est le problème du temps minimal.**

Dans la suite on donnera des théorèmes qui vont répondre à ces questions, et permettre en particulier de résoudre le problème de l'oscillateur harmonique linéaire.

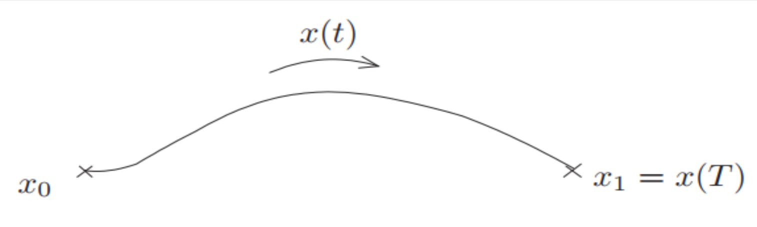


FIGURE: Problème de contrôlabilité

Problème étudié

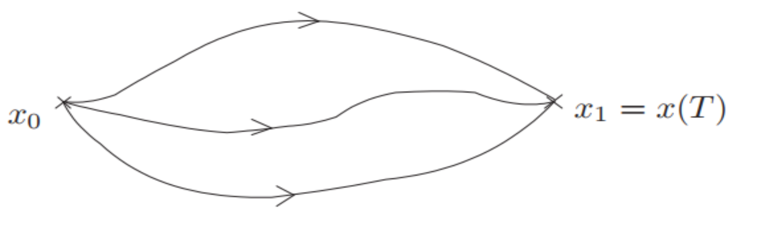


FIGURE: Problème de contrôle optimal

Ensemble accessible

Considérons le système contrôlé

$$\left.\begin{array}{l}\forall t \in I, \quad x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0\end{array}\right\} \tag{2.1}$$

Définition 2.1

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T) \mid u \in L^\infty([0, T], \Omega)\}$$

où $x_u(.)$ est la solution du système (2.1) associée au contrôle u.
Autrement dit $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (2.1) au temps T, lorsqu'on fait varier le contrôle u. Pour la cohérence on pose $Acc(x_0, 0) = \{x_0\}$.

Ensemble accessible

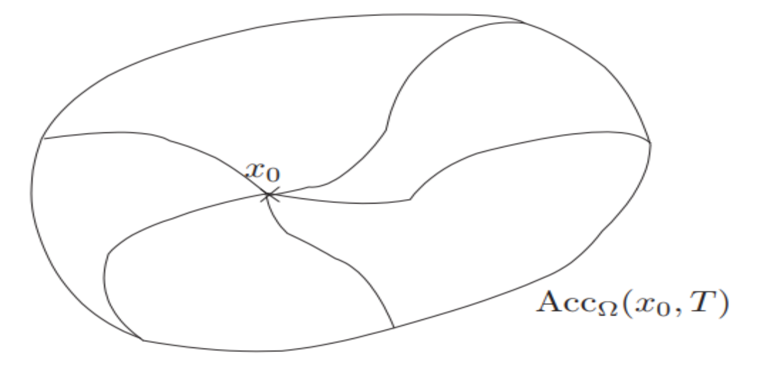


FIGURE: Ensemble accessible

Topologie des ensembles accessibles

Théorème 2.1

Considérons le système de contrôle linéaire dans $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *est convexe et compact. Soient* $T > 0$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Alors pour tout* $t \in [0, T]$, $Acc(x_0, t)$ *est convexe, compact et varie continûment avec* t *sur* $[0, T]$.

Démonstration

• **La convexité** de $Acc(x_0, t)$.

Soient $x_1^1,\ x_2^1 \in Acc(x_0, t)$ et $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que $\lambda x_1^1 + (1 - \lambda)x_2^1 \in Acc(x_0, t)$. Par définition, pour $i = 1, 2$, il existe un contrôle $u_i : [0, t] \to \Omega$ tel que la trajectoire $x_i(.)$ associée au contrôle u_i vérifie

$$x_i(0) = x_0,\ \ x_i(t) = x_i^1,\ \ x_i'(s) = A(s)x_i(s) + B(s)u_i(s) + r(s).$$

D'après la formule de variation de la constante,

$$x_i^1 = x_i(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u_i(s) + r(s))ds.$$

Pour tout $s \in [0, t]$, posons $u(s) = \lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)$. Le contrôle u est dans $L^\infty([0, t], \Omega)$ car Ω est convexe, puisque $L^\infty([0, t], \Omega) \subset L^2([0, t], \Omega)$ on a $u \in L^2([0, t], \Omega)$.

Démonstration (suite)

Soit $x(\cdot)$ la trajectoire associée à u. Alors, par définition de $Acc(x_0, t)$,

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u(s) + r(s))ds \ \in Acc(x_0, t).$$

D'autre part, on a

$\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_2^1 = \lambda x_1(t) + (1-\lambda)\, x_2^1(t)$

$= \lambda M(t)x_0 + (1-\lambda)M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)(\lambda u_1(s) + (1-\lambda)u_2(s)) +$

$\lambda r(s) + (1-\lambda)r(s))ds$

$= M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u(s) + r(s))ds = x(t).$

Démonstration (suite)

Donc $\lambda x_1^1 + (1-\lambda)\ x_2^1 \in Acc(x_0, t)$, ce qui prouve la convexité de $Acc(x_0, t)$.

• **La Compacité** de $Acc(x_0, t)$.

Cela revient à montrer que toute suite $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $Acc(x_0, t)$ admet une sous-suite convergente.

Pour tout entier n, on note u_n un contrôle reliant x_0 à x_n^1 en temps t, et soit $x_n(.)$ la trajectoire correspondante. On a donc

$$x_n^1 = x_n(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u_n(s) + r(s))ds. \tag{2.2}$$

Par définition, les contrôles u_n sont à valeurs dans le compact Ω, et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0,t], \mathbb{R}^m)$ qui est un espace **réflexif**, on en déduit que, à sous-suite près, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un contrôle $u \in L^2([0,t], \mathbb{R}^m)$.

Démonstration (suite)

Comme Ω est supposé convexe et compact, on a de plus $u \in L^2([0,t],\Omega)$. Par ailleurs, de la formule de représentation (2.2) on déduit aisément que la suite $(x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$. De plus, de l'égalité $x_n' = Ax_n + Bu_n + r$, et en utilisant le fait que A, B et r sont dans L^∞ sur $[0,T]$, on conclut que la suite $(x_n'(.))_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée dans $L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$, autrement dit la suite $(x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1([0,t],\mathbb{R}^n)$. Mais cet espace de Sobolev est réflexif et se plonge de manière compacte dans $C^0([0,t],\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie uniforme, on conclut que, à sous-suite près, la suite $(x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application $x(\cdot)$ sur $[0,t]$.

Démonstration (suite)

En passant à la limite dans (2.2) il vient alors

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t-s)(B(s)u(s) + r(s))ds$$

et en particulier

$$\lim_{i\to\infty} x^1_{n_i} = \lim_{i\to\infty} x_{n_i}(t) = x(t) \in Acc(x_0, t),$$

ce qui prouve la compacité.

Démonstration (suite)

• Montrons enfin la continuité de $Acc(x_0, t)$ par rapport à t , Soit $\varepsilon > 0$. On va chercher $\delta > 0$ tel que

$$\forall t_1,\ t_2 \in [0, T]\ \ |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \Delta(Acc(t_1), Acc(t_2)) \leq \varepsilon,$$

où on note pour simplifier $Acc(t) = Acc(x_0, t)$, et où

$$\Delta(Acc(t_1), Acc(t_2)) = \sup\left(\sup_{y\in Acc(t_2)} d(y, Acc(t_1), \sup_{y\in Acc(t_1)} d(y, Acc(t_2))\right). \tag{2.3}$$

Par la suite, on suppose $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. Il suffit de montrer que
1. $\forall y \in Acc(t_2), \quad d(y, Acc(t_1)) \leq \varepsilon$,
2. $\forall y \in Acc(t_1), \quad d(y, Acc(t_2)) \leq \varepsilon$.

Démonstration (suite)

Montrons juste le premier point (2. étant similaire). Soit $y \in Acc(t_2)$. Il suffit de montrer que

$$\exists z \in Acc(t_1) \ \text{ tel que } \ d(y,z) \leq \varepsilon.$$

Par définition de $Acc(t_2)$, il existe un contrôle $u \in L^2([0,T],\Omega)$ tel que la trajectoire associée à u, partant de x_0, vérifie $x(t_2) = y$. On va voir que $z = x(t_1)$ convient. En effet on a

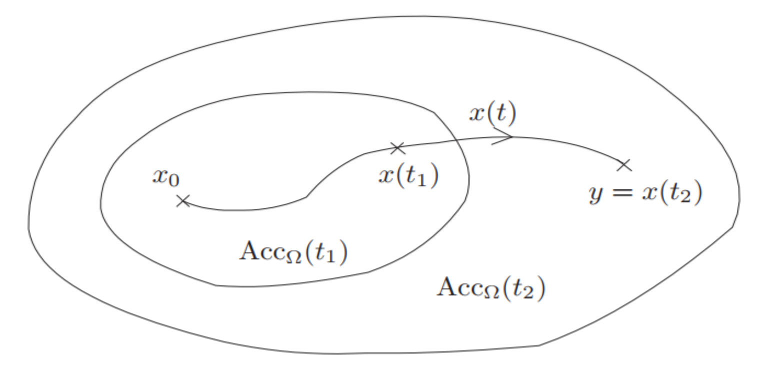
$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) = M(t_2)x_0 + \int_0^{t_2} M(t_2)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \\ - \left(M(t_1)x_0 + \int_0^{t_1} M(t_1)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \right) \end{aligned}$$

Démonstration (suite)

$$x(t_2) - x(t_1) = M(t_2) \int_{t_1}^{t_2} M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds$$
$$+ (M(t_2) - M(t_1)) \left(x_0 + \int_0^{t_1} M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \right).$$

Si $|t_1 - t_2|$ est petit, le premier terme de cette somme est petit par continuité de l'intégrale, le deuxième terme est petit par continuité de $t \longrightarrow M(t)$. D'où le résultat. $\square$

Ensemble accessible



Remarque 2.1

Pourtant, et ce résultat est surprenant, la conclusion de ce théorème est encore vraie si Ω n'est pas convexe. Ceci implique en particulier le résultat suivant.

Corollaire 2.1

Supposons que Ω soit compact. Si on note $Acc_{\Omega}(x_{0,}t)$ l'ensemble accessible depuis x_0 en temps t pour des contrôles à valeurs dans Ω, alors on a

$$Acc_{\Omega}(x_{0,}t) = Acc_{conv\Omega}(x_{0,}t),$$

où $conv(\Omega)$ est l'enveloppe convexe de Ω.
En particulier, on a $Acc_{\partial\Omega}(x_0, t) = Acc_{\Omega}(x_{0,}t) = Acc_{conv\Omega}(x_{0,}t)$, où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω.

Ensemble accessible

Remarque 2.2

Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solution de $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ x(0) = 0$, s'écrit

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t M(t-s)B(s)u(s)ds \\ &= \int_0^t M(t)M(-s)B(s)u(s)ds = M(t)\int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds. \end{aligned}$$

Donc x est linéaire en u.

Cette remarque nous mène à la proposition suivante.

Proposition 2.1

On suppose que $r = 0$, $x_0 = 0$ et $\Omega = \mathbb{R}^m$. Alors, pour tout $t > 0$, l'ensemble $Acc(0, t)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
Si on suppose de plus que $A(t) \equiv A$ et $B(t) \equiv B$ sont constantes (système autonome), alors, pour tous $0 < t_1 < t_2$, on a $Acc(0, t_1) \subset Acc(0, t_2)$.

Démonstration

Soient $x_1^1,\ x_2^1 \in Acc(0, t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour $i = 1, 2$, il existe par définition un contrôle u_i et une trajectoire associée $x_i(.)$ vérifiant $x_i(t) = x_i^1$.
D'où

$$x_i^1 = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_i(s) ds.$$

Démonstration (suite)

Pour tout $s \in [0, T]$, posons $u(s) = \lambda u_1(s) + \mu u_2(s)$. Soit x la solution correspondante à u. Alors

$$x(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds.$$

Donc $x(t) \in Acc(0, t)$, de plus

$$\begin{aligned} x(t) &= M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s)(\lambda u_1(s) + \mu u_2(s)) ds \\ &= \lambda M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_1(s) ds + \mu M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_2(s) ds \\ &= \lambda x_1^1 + \mu x_2^1. \end{aligned}$$

Ceci montre que $Acc(0, t)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration (suite)

Pour la deuxième partie de la proposition, soit $x_1^1 \in Acc(0, t_1)$. Par définition, il existe un contrôle u_1 sur $[0, t_1]$ tel que la trajectoire associée $x_1(.)$ vérifie $x_1(t_1) = x_1^1$. D'où

$$x_1^1 = x_1(t_1) = M(t_1) \int_0^{t_1} M(s)^{-1} B(s) u_1(s) ds.$$

De plus on a ici $M(t) = e^{tA}$. Définissons u_2 sur $[0, t_2]$ par

$$\begin{cases} u_2(t) = 0 \ \text{ si } \ 0 \leq t \leq t_2 - t_1 \\ u_2(t) = u_1(t_1 - t_2 + t) \ \text{ si } \ t_2 - t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

Soit $x_2(.)$ la trajectoire associée à u_2 sur $[0, t_2]$. Alors
$x_2(t_2) = M(t_2) \int_0^{t_2} M(-t) B u_2(t) dt = M(t_2) \int_{t_2 - t_1}^{t_2} M(-t) B u_2(t) dt$
car u_2 est nulle sur $[0, t_2 - t_1]$.

Démonstration (suite)

On pose $t = s + t_2 - t_1 \Leftrightarrow s = t + t_1 - t_2$

$$\begin{aligned} x_2(t_2) &= M(t_2)\int_0^{t_1} M(-t_2 + t_1 - s)Bu_2(s + t_2 - t_1)ds \\ &= M(t_2)\int_0^{t_1} M(-t_2)M(t_1)M(-s)Bu_2(s + t_2 - t_1)ds \\ &= M(t_1)\int_0^{t_1} M(-s)Bu_2(s + t_2 - t_1)ds \\ &= M(t_1)\int_0^{t_1} M(-s)Bu_1(s)ds = x_1^1. \end{aligned}$$

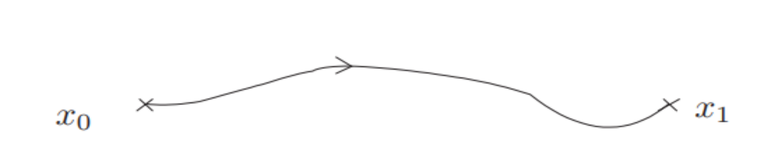
Ainsi, $x_1^1 \in Acc(0, t_2)$. $\square$

Remarque 2.3

Dans le cadre de la deuxième partie de la proposition, on note $Acc(0) = \bigcup_{t\geq 0} Acc(0,t)$, *l'ensemble des points accessibles (en temps quelconque), c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$. *En effet, une union croissante de sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$ *est un sous-espace vectoriel.*

Définition 2.2 (de la contrôlabilité)

Le système contrôlé $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit contrôlable en temps T si $Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$, c'est à dire, pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée à u relie x_0 à x_1 en temps T.



Cas sans contrainte sur le contrôle : Condition de Kalman

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Théorème 2.2

On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle).
Le système $x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est contrôlable (en temps T quelconque) si et seulement si la matrice

$$C = \left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right)$$

est de rang n.
La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $\mathrm{rang} C = n$ est appelée condition de Kalman.

Remarque 2.4

La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0, alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

L'essentiel de la preuve du théorème 2.2 est contenu dans le lemme suivant.

Cas sans contrainte sur le contrôle

Lemme 2.1

La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire

$$\Phi : \; L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$u \longrightarrow \int_0^T \left(\exp(T-t)A\right) Bu(t)dt$$

est surjective. C'est à dire

$$\left\{ \int_0^T \left(\exp(T-t)A\right) Bu(t)dt, \; / \, u \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m) \right\} = \Phi(L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m)) = \mathbb{R}^n.$$

Démonstration

En fait, on va montrer : $rang(C) < n \Leftrightarrow \Phi$ n'est pas surjective.
$(\Rightarrow)$ Supposons tout d'abord que $rang C < n$, et montrons qu'alors Φ n'est pas surjective. L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que le produit $\psi C = 0$, (c'est à dire $\psi C v = 0 \; \forall v \in \mathbb{R}^m$), Par conséquent,

$$\psi B = \psi A B = \cdots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Or on sait que, d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, tels que

$$A^n = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit alors que $\psi A^n B = 0$ et en suite par récurrence immédiate que, pour tout entier k,

$$\psi A^k B = 0$$

Cas sans contrainte sur le contrôle

Démonstration (suite)

et donc, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\psi \exp(tA)B = 0.$$

Par conséquent, pour tout contrôle u, on a

$$\psi \left(\int_0^T \left(\exp\left((T-t)A\right)\right) Bu(t)dt \right) = \psi\Phi(u) = 0.$$

Ce qui montre que Φ n'est pas surjective.

Démonstration (suite)

Réciproquement, si Φ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$ tel que pour **tout contrôle** u on ait

$$\int_0^T \psi \left(\exp(T-t)A\right) Bu(t)dt = 0.$$

Ceci implique que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\psi \left(\exp\left((T-t)A\right)\right) B = 0. \tag{2.4}$$

En $t = T$, on obtient $\psi B = 0$, en suite en dérivant (2.4) par rapport à t, puis en prenant $t = T$, on obtient $\psi AB = 0$. Ainsi, par dérivations successives, on obtient finalement

$$\psi B = \psi AB = \cdots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Donc $\psi C = 0$, et par la suite $rang C < n$. $\square$

Cas sans contrainte sur le contrôle

Démonstration du théorème 2.2

Si la matrice C est de rang n, alors d'après le lemme l'application Φ est surjective, c'est à dire $\Phi(L^\infty[0,T],R^m) = \mathbb{R}^n$. Or, pour tout contrôle u, l'extrémité au temps T de la trajectoire associée à u est donnée par

$$\begin{aligned} x(T) &= \exp(TA)x_0 + \int_0^T \exp((T-t)A)(Bu(t)+r(t))dt \\ &= \exp(TA)x_0 + \int_0^T \exp((T-t)A)r(t)dt + \Phi(u) \end{aligned}$$

de sorte que l'ensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est

$$Acc(T,x_0) = \exp(TA)x_0 + \int_0^T \exp((T-t)A)r(t)dt + \Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n.$$

Ce qui montre que le système est contrôlable.

Démonstration (suite)

Réciproquement, si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable depuis x_0 défini par

$$x_0 = -\exp(-TA)\int_0^T \exp((T-t)A)r(t)dt.$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps T s'écrit $Acc(T, x_0) = \Phi(L^\infty)$ et le système étant contrôlable, cet ensemble est égal à $\mathbb{R}^n$. Cela prouve que Φ est surjective, et donc, d'après le lemme, que la matrice C est de rang n. $\square$

Remarque 2.5

Si $x_0 = 0$ et si $r = 0$, la démonstration précédente est un peu simplifiée puisque dans ce cas, d'après la remarque 2.3, $Acc(0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Cas avec contrainte sur le contrôle

Dans le théorème 2.2, on n'a pas mis de contrainte sur le contrôle. Cependant en adaptant la preuve on obtient aisément le résultat suivant.

Corollaire 2.2

Sous la condition de Kalman précédente, si $r = 0$ et si 0 appartient à ***l'interieur*** *de Ω, alors l'ensemble accessible $Acc(x_0, t)$ en temps t contient un voisinage du point $exp(tA)x_0$.*

Ce résultat découle de la continuité de l'application Φ.

Remarque 2.6

Les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A. Par exemple il est clair que si

1. *La condition de Kalman est remplie,*
2. $r = 0$ *et* $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$,
3. *Toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative (c'est à dire la matrice A est stable),*

alors tout point de $\mathbb{R}^n$ *peut être conduit à l'origine en temps fini (éventuellement grand).*

Dans le cas mono-entrée $m = 1$, on a un résultat plus précis que nous admettrons.

Théorème 2.3

Soit $B \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur. Considérons le système $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$, avec $u(t) \in \Omega$. Alors tout point de $\mathbb{R}^n$ peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire (A, B) vérifie la condition de Kalman (c'est à dire la matrice $C = (B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B)$ est de rang n) et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

Définition 2.3

Les systèmes de contrôle linéaires $x_1' = A_1x_1 + B_1u$ et $x_2' = A_2x_2 + B_2u$ sont dits semblables (ou bien les paires (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont semblables) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A_2 = PA_1P^{-1}$ et $B_2 = PB_1$.

Remarque 2.7

On a alors $x_2 = Px_1$.

Proposition 2.2

Pour deux systèmes semblables $x_1' = A_1x_1 + B_1u$ et $x_2' = A_2x_2 + B_2u$, la propriété de Kalman est intrinsèque, c'est à dire

$$(B_2, A_2B_2, \cdots, A_2^{n-1}B_2) = P(B_1, A_1B_1, \cdots, A_1^{n-1}B_1)$$

En particulier, le rang de la matrice de Kalman est invariant par similitude.

Proposition 2.3

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$*, la paire* (A, B) *est semblable à une paire* (A', B') *de la forme*

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_3 \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} B'_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $A'_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}),\ B'_1 \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{R})$*,* r *étant le rang de la matrice de Kalman de la paire* (A, B)*. De plus, la paire* (A'_1, B'_1) *est contrôlable.*

Démonstration (Question de choix d'une base)

Supposons que le rang r de la matrice de Kalman C de la paire (A, B) soit strictement plus petit que n (sinon il n'y a rien à montrer). Le sous-espace

$$F = ImC = ImB + ImAB + \cdots + ImA^{n-1}B \subset \mathbb{R}^n$$

est de dimension r. D'après le théorème d'Hamilton-Cayley il est clair que F est invariant par A ($A(ImB) = ImAB$). Soit G un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^n$, et soient $(f_1, \cdots, f_r)$ une base de F, et $(f_{r+1}, \cdots, f_n)$ une base de G.
Soit P la matrice de passage de la base $\{f_1, \cdots, f_n\}$ à la base canonique $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.
Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice relative à la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est A.
On note A' la matrice de φ relative à la base $\{f_1, \cdots, f_n\}$ qui vérifie $A' = PAP^{-1}$.

Démonstration (suite)

Puisque F est invariant par φ, on a $A' = PAP^{-1} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} A'_1 & A'_3 \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix}}^{Af_j} \end{array} f_i$.

D'autre part, si x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, dont on note X ses coordonnées dans $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et X' ses coordonnées dans $\{f_1, \cdots, f_n\}$, X et X' vérifient $X' = PX$.

Puisque $ImB \subset F$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $PBx \in F$ (ses composantes sur $f_{r+1}, \cdots, f_n$ sont nulles) c'est à dire PB est de la forme :

$$B' = PB = \begin{pmatrix} B'_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on voit facilement que le rang de la matrice de Kalman de la paire (A'_1, B'_1) est égal à celui de la paire (A, B). $\square$

Théorème 2.4 (Forme de Brunovski)

Si $m = 1$ et si la paire (A, B) est contrôlable, alors elle est semblable à la paire $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$, où

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et où les coefficients a_i sont ceux du polynôme caractéristique de A, c'est à dire

$$\chi_A(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

Remarque 2.8

Avec ces nouvelles matrices, le système $X' = \widetilde{A}X + \widetilde{B}u$ est alors équivalent à l'équation différentielle scalaire d'ordre n

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x(t) = u(t)$$

où $x^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k.

Démonstration

Raisonnons par analyse et synthèse. On suppose qu'il existe une base $\{f_1, \cdots, f_n\}$ dans laquelle la paire (A, B) prend la forme $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$.
$B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, si B prend la forme $\widetilde{B}$, alors on a nécessairement, $f_n = B$ à scalaire près.
Grâce à la représentation d'une matrice dans une base

$$\begin{gathered} Af_n = f_{n-1} - a_1 f_n, \\ Af_{n-1} = f_{n-2} - a_2 f_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Af_2 = f_1 - a_{n-1} f_n, \\ Af_1 = -a_n f_n. \end{gathered}$$

Démonstration (suite)

Définissons donc les vecteurs $f_1, \cdots, f_n$ par les relations

$$
\begin{gathered}
f_n = B, \\
f_{n-1} = Af_n + a_1 f_n, \\
f_{n-2} = Af_{n-1} + a_2 f_n, \\
\ldots\ldots. \\
f_1 = Af_2 + a_{n-1} f_n
\end{gathered}
$$

La famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est bien une base de $\mathbb{R}^n$ puisque

$$
\begin{gathered}
Vect\{f_n\} = Vect\{B\}, \\
Vect\{f_n, f_{n-1}\} = Vect\{B, AB\}, \\
Vect\,\{f_n, f_{n-1}, f_{n-2}\} = Vect\,\left\{B, AB, A^2B\right\}, \\
\vdots \\
Vect\{f_n, \cdots, f_1\} = Vect\{B, AB, \cdots, A^{n-1}B\} = \mathbb{R}^n \text{ (Système Contrôlé).}
\end{gathered}
$$

Similitude de systèmes, forme de Brunovski

Démonstration (suite)

Il reste à vérifier que l'on a bien $Af_1 = -a_n f_n$. On a

$$\begin{aligned} Af_1 &= A^2 f_2 + a_{n-1} A f_n \\ &= A^2(Af_3 + a_{n-2} f_n) + a_{n-1} A f_n \\ &= A^3 f_3 + a_{n-2} A^2 f_n + a_{n-1} A f_n \\ &\vdots \\ &= A^n f_n + a_1 A^{n-1} f_n + ... + a_{n-1} A f_n \\ &= (A^n + a_1 A^{n-1} + ... + a_{n-1} A) f_n \\ &= -a_n f_n \end{aligned}$$

Car d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, on a

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + ... + a_n I = 0.$$

En conclusion dans la base $\{f_1, ..., f_n\}$, la paire (A, B) prend la forme $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$. $\square$

Les deux théorèmes suivants donnent une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas instationnaire.

Théorème 2.5

Le système $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$C(T) = \int_0^T M(t)^{-1}B(t)B(t)^T \left(M(t)^{-1}\right)^T dt$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Remarque 2.9

Cette condition dépend de T, mais ne dépend pas du point initial x_0. Autrement dit, si un système linéaire instationnaire est contrôlable en temps T depuis x_0, alors il est contrôlable en temps T depuis tout point.

Remarque 2.10

On a $C(T) = C(T)^T$, et $x^T C(T) x = \langle x, C(T)x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, c'est à dire $C(T)$ est une matrice carrée réelle symétrique positive.

Démonstration

Pour toute solution $x(t)$, on a, d'après la formule de variation de la constante,

$$x(T) = x^* + M(T) \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt$$

où

$$x^* = M(T) x_0 + M(T) \int_0^T M(t)^{-1} r(t) dt.$$

Démonstration (suite)

($\Leftarrow$) On suppose que $C(T)$ est inversible, montrons que pour tout x_1 il existe u tel que $x(T) = x_1$.
Posons $u(t) = B(t)^T \left(M(t)^{-1}\right)^T \psi$, avec $\psi \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$x(T) = x^* + M(T)C(T)\psi$$

et il suffit de prendre $\psi = C(T)^{-1}M(T)^{-1}(x_1 - x^*)$.
($\Rightarrow$) Si $C(T)$ n'est pas inversible, alors il existe $\psi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que $\psi^T C(T)\psi = 0$. On en déduit que

$$\int_0^T \left\| B(t)^T \left(M(t)^{-1}\right)^T \psi \right\|_2^2 dt = 0.$$

D'où $\psi^T M(t)^{-1}B(t) = 0$ p.p. sur $[0, T]$. Ainsi, pour tout contrôle u, on a $\psi^T \int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt = 0$.

Démonstration (suite)

Posons

$$\begin{aligned}
\psi_1^T &= \left(M(T)^{-1}\right)^T \psi = \left(\psi^T M(T)^{-1}\right)^T \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \psi^T M(T)^{-1} = \psi_1 \\
&\Leftrightarrow \psi^T = \psi_1 M(T).
\end{aligned}$$

On a alors

$$\psi_1 M(T) \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt = 0.$$

Donc $\psi_1 \neq 0$ est orthogonal à $M(T) \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt$.

Démonstration (suite)

Soit $x_u(T)$ la solution correspondante à u.

$$x_u(t) = x^* + M(T)\int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt$$
$$\Leftrightarrow x_u(T) - x^* = M(T)\int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt.$$

D'où $x_u(T) - x^*$ est orthogonal à ψ_1 c'est à dire $x_u(T) - x^* \in \psi_1^{\perp}$ et donc le système n'est pas contrôlable. $\square$

Remarque 2.11

Si le système est autonome, (A et B sont constantes), on a $M(t) = \exp(tA)$*, et donc*

$$C(T) = \int_0^T \exp(-sA)BB^T \exp(-sA)^T ds.$$

Dans ce cas, $C(T_1)$ *est inversible si et seulement si* $C(T_2)$ *est inversible, et en particulier la condition de contrôlabilité ne dépend pas de T (ce qui est faux dans le cas instationnaire).*

Théorème 2.6

Considérons le système

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

où les applications A, B sont de classe C^∞ sur $[0,T]$. Définissons par récurrence

$$B_0(t) = B(t), B_1(t) = A(t)B_0(t) - \frac{dB_0(t)}{dt},\ B_{i+1}(t) = A(t)B_i(t) - \frac{dB_i(t)}{dt}.$$

1. *S'il existe $t \in [0,T]$ tel que*

$$Vect\{B_i(t)v \mid v \in \mathbb{R}^m,\ i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n,$$

alors le système est contrôlable en temps T.

Suite du théorème 2.6

2. *Si de plus les applications A et B sont analytiques sur* $[0, T]$ *alors le système est contrôlable en temps T si et seulement si*

$$\forall t \in [0, T], \quad Vect\{B_i(t)v \mid v \in \mathbb{R}^m,\ i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n.$$

Remarque 2.12

Dans le cas autonome, on retrouve la condition de Kalman à savoir la matrice C est de rang n.