Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

CONTRÔLE OPTIMAL

Arij BOUZELMATE

Master: Mathématiques Appliquées à la Finance

Plan du Cours

1. **Rappels d'algèbre linéaire**
2. **Contrôle optimal de systèmes linéaires**
3. **Théorie de contrôle optimal non linéaire**

1. **Application entrée-sortie**
2. **Contrôlabilité**
3. **Contrôle Optimal**

L'objectif de cette partie est de présenter des techniques d'analyse de problèmes de contrôle optimal non linéaires.
D'un point de vue global, un problème de contrôle optimal se formule sur une variété M, mais notre point de vue est local et on travaille sur un ouvert V petit de $\mathbb{R}^n$.
La problématique générale du contrôle optimal est la suivante.
Considérons un système de contrôle général

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

où f est une application de classe C^1 de $I \times V \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $(t_0, x_0) \in I \times V$.
Par ailleurs, on suppose que les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un sous-ensemble de $L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^m)$.
Ces hypothèses assurent, pour tout contrôle u, l'existence et l'unicité d'une solution maximale $x_u(t)$ sur un intervalle $J \subset I$, du problème de Cauchy (1.1).

Par commodité d'écriture on suppose dans toute la suite que $t_0 = 0$.
Pour tout contrôle $u \in L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^m)$, la trajectoire associée $x_u(\cdot)$ est définie sur un intervalle maximal $[0, t_e(u)[$, où $t_e(u) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Par exemple si $t_e(u) < +\infty$ alors la trajectoire explose en $t_e(u)$ (théorème d'échappement, ou d'explosion).
Pour tout $T > 0$, $T \in I$, on note U_T l'ensemble des contrôles admissibles sur $[0, T]$, c'est-à-dire l'ensemble des contrôles tels que la trajectoire associée soit bien définie sur $[0, T]$, autrement dit $T < t_e(u)$.
Soient f^0 une fonction de classe C^1 sur $I \times V \times \Omega$, et g une fonction continue sur V. Pour tout contrôle $u \in U_T$ on définit le coût de la trajectoire associée $x_u(\cdot)$ sur l'intervalle $[0, T]$ par :

$$C(T, u) = g(T, x_u(T)) + \int_0^T f^{\,0}(t, x_u(t), u(t))dt. \tag{1.2}$$

Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de V. Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x_u(\cdot)$ solutions de

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t))$$

telles que $x_u(0) \in M_0, \ \ x_u(T) \in M_1$, et minimisant le coût $C(T, u)$.

On dit que le problème de contrôle optimal est à temps final non fixé si le temps final T est libre, sinon on parle de problème à temps final fixé.

Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable. C'est le problème de contrôlabilité. Ensuite, une fois ce problème est résolu, il faut chercher parmi toutes ces trajectoires possibles celles qui le font en coût minimal.

Application entrée-sortie

Considérons pour le système (1.1) le problème de contrôle suivant : étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver un temps T et un contrôle u sur $[0, T]$ tels que la trajectoire x_u associée à u, solution de (1.1) vérifie

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(T) = x_1.$$

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 2.1

Soit $T > 0$. L'application entrée-sortie en temps T du système contrôlé (1.1) initialisé à x_0 est l'application

$$\begin{aligned} E_T : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longrightarrow x_u(T) \end{aligned}$$

où U est l'ensemble des contrôles admissibles, c'est à dire, l'ensemble des contrôles u tels que les trajectoires associées sont bien définies sur $[0, T]$.

Application entrée-sortie

Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps T associe à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u. Une question importante en théorie du contrôle est d'étudier cette application en décrivant son image, ses singularités, etc.

Application entrée-sortie pour un système général

La régularité de E_T dépend bien entendu de l'espace de départ et de la forme du système.

Proposition

Considérons le système (1.1) où f est C^p, $p \geq 1$, et soit $U \subset L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)$ le domaine de définition de E_T , c'est-à-dire l'ensemble des contrôles dont la trajectoire associée est bien définie sur $[0,T]$. Alors U est un ouvert de $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)$ et E_T est C^p au sens L^∞.
De plus la différentielle (au sens de Fréchet) de E_T en un point $u \in U$ est donnée par le système linéarisé en u de la manière suivante. Posons, pour tout $t \in [0,T]$,

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t)), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t)).$$

Proposition (suite)

Le système de contrôle linéaire

$$\begin{cases} y_v'(t) = A(t)y_v(t) + B(t)v(t) \\ y_v(0) = 0 \end{cases}$$

est appelé système linéarisé le long de la trajectoire x_u. La différentielle de Fréchet de E_T en u est alors l'application $dE_T(u)$ telle que, pour tout $v \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$

$$dE_T(u).v = y_v(T) = M(T)\int_0^T M^{-1}(s)B(s)v(s)ds$$

où $M(\cdot)$ est la résolvante du système linéarisé, c'est à dire, la solution matricielle de

$$M'(t) = A(t)M(t), \quad M(0) = Id.$$

Application entrée-sortie pour un système général

Démonstration

Pour la démonstration on admet que U est ouvert.
Par hypothèse $u(\cdot)$ et sa trajectoire associée x_u sont définies sur $[0, T]$.
L'ensemble des contrôles étant l'ensemble des applications, mesurables et bornées, muni de la norme L^∞, l'application E_T est de classe C^p sur un voisinage de $u(\cdot)$ en vertu des théorèmes de dépendance par rapport à un paramètre.
Exprimons sa différentielle au sens de Fréchet. Soit $v(\cdot)$ un contrôle fixé, on note $x(\cdot) + \delta x(\cdot)$ la trajectoire associée à $u(\cdot) + v(\cdot)$, issue en $t = 0$ de x_0.
On a $E_T(u + v) - E_T(u) = \delta x(T)$ et on essaie de séparer la partie linéaire de la partie quadratique et etc. (En fait $dE_T(u)v =$ partie linéaire de $\delta x(T)$).

Application entrée-sortie pour un système général

Démonstration (suite)

Par un développement de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x+\delta x)(t) &= f(t, x(t)+\delta x(t), u(t)+v(t)) \\ &= f(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t))v(t) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(t, x(t), u(t))(\delta x(t), v(t)) + \cdots\end{aligned}$$

Par ailleurs, $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$, donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta x)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t))v(t) \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(t, x(t), u(t))(\delta x(t), v(t)) + \cdots\end{aligned}$$

Démonstration (suite)

En écrivant $\delta x = \delta_1 x + \delta_2 x + \cdots$ où $\delta_1 x$ est la partie linéaire en v, $\delta_2 x$ la partie quadratique, etc, et en identifiant, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta_1 x)(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))\delta_1 x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t))v(t)\\ &= A(t)\delta_1 x(t) + B(t)v(t).\end{aligned}$$

Or $x(0) + \delta x(0) = x_0 = x(0)$, donc $\delta x(0) = 0$ et la condition initiale de cette équation différentielle est $\delta_1 x(0) = 0$.

Démonstration (suite)

En intégrant, on obtient

$$\delta_1 x(T) = M(T) \int_0^T M^{-1}(s)B(s)v(s)ds$$

où M est la résolvante du système homogène $\dfrac{d}{dt}(\delta_1 x)(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))\delta_1 x(t)$, c'est-à-dire $M'(t) = A(t)M(t)$ avec $A(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))$ et $M(0) = I_n$.

On observe que $\delta_1 x(T)$ est linéaire et continu par rapport à $v(\cdot)$ en topologie L^∞. C'est donc la différentielle de Fréchet en $u(\cdot)$ de E_T. $\square$

Application entrée-sortie pour un système général

Remarque 2.1

En général E_T *n'est pas définie sur* $L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$ *tout entier à cause de phénomènes d'explosion. Par exemple si on considère le système scalaire* $x' = x^2 + u,\ x(0) = 0$*, on voit que pour* $u = 1$ *la trajectoire associée explose en* $t = \frac{\pi}{2}$*, et donc n'est pas définie sur* $[0,T]$ *si* $T \geq \frac{\pi}{2}$*.*

Application entrée-sortie pour un système affine

Définition 2.2

On appelle système affine contrôlé un système de la forme

$$x'(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) f_i(x(t)),$$

où les f_i sont des champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $f_i = [f_{i1}, ..., f_{in}]$.

Pour un système affine on peut améliorer le résultat précédent.

Proposition 2.1

Considérons un système affine lisse, et soit U le domaine de définition de E_T. Alors U est un ouvert de $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, et l'application entrée-sortie E_T est lisse au sens L^2, et est analytique si les champs de vecteurs sont analytiques.

Il est très intéressant de considérer L^2 comme espace de contrôles. En effet dans cet espace on bénéficie d'une structure hilbertienne qui permet de faire une théorie spectrale de l'application entrée-sortie, et on bénéficie d'autre part de bonnes propriétés de compacité faible.

On veut répondre à la question suivante : étant donné le système (1.1), où peut-on aller en temps T en faisant varier le contrôle u? On est tout d'abord amené à définir la notion d'ensemble accessible.

Ensemble accessible

Définition 3.1

L'ensemble accessible en temps T pour le système (1.1), noté $Acc(x_0, T)$, est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$. Autrement dit, c'est l'image de l'application ***entrée-sortie*** *en temps T.*

Ensemble accessible

Théorème 3.1

Considérons le système de contrôle $x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0$, *où la fonction* f *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}^{1+n+m}$, *et les contrôles* u *appartiennent à l'ensemble* U *des fonctions mesurables à valeurs dans un compact* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset L^\infty([0, T], \Omega)$. *On suppose que*

- *il existe un réel positif* b *tel que toute trajectoire associée est uniformément bornée par* b *sur* $[0, T]$, *c'est à dire*

$$\exists b > 0 \text{ tel que } \forall u \in U, \quad \forall t \in [0, T], \quad \|x_u(t)\| \leq b, \tag{3.1}$$

- *Pour tout* (t, x), *l'ensemble des vecteurs vitesses*

$$V(t, x) = \{f(t, x, u) \mid u \in \Omega\} = f(t, x, \Omega) \tag{3.2}$$

est convexe.
Alors, l'ensemble $Acc(x_0, t)$ *est compact et varie continûment en* t *sur* $[0, T]$.

Démonstration

Notons tout d'abord que puisque Ω est compact alors $V(t, x)$ est également compact.
Montrons la compacité de $Acc(x_0, t)$. Cela revient à montrer que toute suite (x_n) de points de $Acc(x_0, t)$ admet une sous-suite convergente.
Pour tout entier n soit u_n un contrôle reliant x_0 à x_n en temps t, et soit $x_n(\cdot)$ la trajectoire correspondante. On a donc

$$x_n = x_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_n(s), u_n(s))ds.$$

Posons, pour tout entier n et presque tout $s \in [0, t]$,

$$g_n(s) = f(s, x_n(s), u_n(s)).$$

Démonstration (suite)

D'après les hypothèses il s'ensuit que la suite de fonctions $(g_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty([0,t],\mathbb{R}^n)$, et par conséquent à sous-suite près elle converge vers une fonction $g(\cdot)$ pour la topologie **faible étoile** de $L^\infty([0,t],\mathbb{R}^m)$.
Posons alors, pour $\tau \in [0,t]$

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau g(s)ds \ ,$$

ce qui définit une application $x(\cdot)$ absolument continue sur $[0,t]$. De plus on a, pour tout $s \in [0,t]$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n(s) = x(s),$$

c'est à dire la suite de fonctions $(x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $x(\cdot)$.

Démonstration (suite)

Le but est de montrer que la trajectoire $x(\cdot)$ est associée à un contrôle u à valeurs dans Ω, ce qui revient à montrer que pour presque tout $s \in [0,t]$ on a $g(s) = f(s, x(s), u(s))$.
Pour cela, définissons, pour tout entier n et presque tout $s \in [0,t]$,

$$h_n(s) = f(s, x(s), u_n(s)),$$

et introduisons l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{h(.) \in L^2([0,t], \mathbb{R}^n) \mid h(s) \in V(s, x(s)) \ \text{ p. p. } s \in [0,t]\},$$

de sorte que $h_n \in \mathcal{V}$ pour tout entier n, car $h_n \in L^2([0,t], \mathbb{R}^n)$ et $h_n(s) = f(s, x(s), u_n(s)) \in V(s, x(s))$.

Démonstration (suite)

Pour tout (t, x) l'ensemble $V(t, x)$ est compact convexe, et en utilisant le fait que, de toute suite convergente fortement dans L^2 on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout, on montre que $\mathcal{V}$ est convexe fermé dans $L^2([0, t], \mathbb{R}^n)$ pour la topologie forte.
Donc il est également fermé dans $L^2([0, t], \mathbb{R}^n)$ muni de la topologie faible.
Or, similairement à (g_n), la suite de fonctions (h_n) est bornée dans L^2, et donc à sous-suite près converge en topologie faible vers une fonction h, qui appartient nécessairement à $\mathcal{V}$ puisque ce sous-ensemble est fermé faiblement dans $L^2([0, t], \mathbb{R}^n)$.
Enfin, montrons que $g = h$ presque partout. Pour cela, écrivons, pour toute fonction $\varphi \in L^2([0, t], \mathbb{R})$,

$$\int_0^t \varphi(s) g_n(s) ds = \int_0^t \varphi(s) h_n(s) ds + \int_0^t \varphi(s) \left(g_n(s) - h_n(s) \right) ds. \tag{3.3}$$

Démonstration (suite)

D'après les hypothèses, la fonction f est globalement lipschitzienne en x sur $[0,T] \times \overline{B}(0,b) \times \Omega$, et donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour presque tout $s \in [0,t]$,

$$\|g_n(s) - h_n(s)\| \leq C \, \|x_n(s) - x(s)\|.$$

La suite de fonctions (x_n) converge simplement vers $x(\cdot)$, donc d'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^t \varphi(s)\,(g_n(s) - h_n(s))\,ds \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$
Finalement en passant à la limite dans (3.3), il vient
$\displaystyle\int_0^t \varphi(s) g(s) = \int_0^t \varphi(s) h(s)$ pour toute fonction $\varphi \in L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$, et par conséquent $g = h$ presque partout sur $[0,t]$.
En particulier $g \in \mathcal{V}$, et donc pour presque tout $s \in [0,t]$ il existe $u(s) \in \Omega$ tel que $g(s) = f(s, x(s), u(s))$.

Démonstration (suite)

En appliquant un lemme de sélection mesurable de théorie de la mesure (notons que $g \in L^\infty([0,t],\mathbb{R}^n)$, on peut montrer que l'application $u(\cdot)$ peut être choisie mesurable sur $[0,T]$.
Ainsi, la trajectoire $x(\cdot)$ est associée sur $[0,t]$ au contrôle u à valeurs dans Ω, et $x(t)$ est la limite des points x_n. Ceci montre la compacité de $Acc(x_0,t)$.
Il reste à établir la continuité par rapport à t de l'ensemble accessible. Soient t_1, t_2 deux réels tels que $0 < t_1 < t_2 \leq T$, et x_2 un point de $Acc(x_0,t_2)$. Par définition il existe un contrôle u à valeurs dans Ω, de trajectoire associée $x(\cdot)$, tel que

$$x_2 = x(t_2) = x_0 + \int_0^{t_2} f(t,x(t),u(t))dt.$$

Démonstration (suite)

Il est bien clair que le point

$$x_1 = x(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$$

appartient à $Acc(x_0, t_1)$, et de plus d'après les hypothèses sur f on a

$$\|x_2 - x_1\| \leq C|t_2 - t_1|.$$

On conclut alors facilement. $\square$

Remarque 3.1

L'hypothèse (3.1) est indispensable, elle n'est pas une conséquence des autres hypothèses. En effet considérons de nouveau le système de la remarque 2.1, c'est à dire $x' = x^2 + u, \quad x(0) = 0$*, où on suppose que* $|u| \leq 1$ *et que le temps final est* $T = \dfrac{\pi}{2}$*. Alors pour tout contrôle* u *constant égal à* c*, avec* $0 < c < 1$*, la trajectoire associée est* $x_c(t) = \sqrt{c}\tan\left(\sqrt{c}\, t\right)$ *, donc est bien définie sur* $[0, T]$*, mais lorsque* c *tend vers* 1 *alors* $x_c(T)$ *tend vers* $+\infty$*. Par ailleurs il est facile de voir que sur cet exemple l'ensemble des contrôles admissibles, à valeurs dans* $[-1, 1]$*, est l'ensemble des fonctions mesurables telles que* $u(t) \in [-1, 1[$*.*

Définition 3.2

Le système (1.1) est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si

$$\bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Il est dit contrôlable en temps T depuis x_0 si $Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$.

Résultats de contrôlabilité

On parle par ailleurs de contrôlabilité locale, lorsque ces propriétés sont locales autour d'un point, càd le système est localement contrôlable en temps T depuis x_0 autour du point x_1, si x_1 appartient à l'intérieur de l'ensemble $Acc(x_0, T)$.
Par des arguments du type théorème des fonctions implicites, l'étude de la contrôlabilité du système linéarisé (qui est plus simple), permet de déduire des résultats de contrôlabilité locale du système de départ.
Par exemple on déduit du théorème de contrôlabilité dans le cas linéaire la proposition suivante.

Proposition 3.1

Considérons le système (1.1) où $f(x_0, u_0) = 0$. *Notons*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) \ \ et \ \ B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0).$$

On suppose que

$$rg(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n.$$

Alors le système est localement contrôlable en x_0 *en temps* $T > 0$ *quelconque.*

Présentation du problème

Maintenant, en plus d'un problème de contrôle, on se donne un problème de minimisation : parmi toutes les solutions du système (1.1) reliant x_0 à x_1, trouver une trajectoire qui minimise une certaine fonction coût $C(T, u)$. Une telle trajectoire, si elle existe, est dite optimale pour ce coût. L'existence de trajectoires optimales dépend de la régularité du système et du coût. Il se peut aussi qu'un contrôle optimal n'existe pas dans la classe de contrôles considérés, mais existe dans un espace plus gros : c'est le phénomène de Lavrentiev. En particulier on a intérêt à travailler dans un espace de contrôles complet et qui ait de bonnes propriétés de compacité.

Existence de trajectoires optimales

Pour des systèmes généraux

Théorème 4.1

Considérons le système de contrôle

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

où f est C^1 de $\mathbb{R}^{1+n+m}$ dans $\mathbb{R}^n$, les contrôles u sont à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, et où éventuellement, on a des contraintes sur l'état

$$c_1(x) \leq 0, \cdots, c_r(x) \leq 0,$$

où $c_1, ...c_r$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$. Soient M_0 et M_1 deux ***compacts*** *de $\mathbb{R}^n$ tels que M_1 est accessible depuis M_0. Soit U l'ensemble des contrôles à valeurs dans Ω joignant M_0 à M_1. Soient f^0 une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^{1+n+m}$ dans $\mathbb{R}$ et g une fonction continue de $\mathbb{R}^{1+n}$ dans $\mathbb{R}$.*

Théorème 4.1(suite)

On considère le coût

$$C(u) = g(t(u), x(t(u))) + \int_0^{t(u)} f^0(s, x(s), u(s))ds, \tag{4.1}$$

où $t(u) > 0$ *est tel que* $x(t(u)) \in M_1$. *On suppose que*

• *Il existe un réel positif* b *tel que toute trajectoire associée à un contrôle* $u \in U$ *est uniformément bornée par* b *sur* $[0, t(u)]$, *ainsi que le temps* $t(u)$, *c'est à dire*

$$\exists b > 0 \mid \forall u \in \mathcal{U}, \ \ \forall t \in [0, t(u)], \ \ t(u) + \|x_u(t)\| \leq b.$$

Théorème 4.1(suite)

- *Pour tout* $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}$, *l'ensemble*

$$\widetilde{V}(t,x) = \left\{ \begin{pmatrix} f(t,x,u) \\ f^0(t,x,u) + \gamma \end{pmatrix} \mid u \in \Omega,\ \gamma \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{4.2}$$

est convexe.

Alors il existe un contrôle ***optimal*** *u sur* $[0, t(u)]$ *tel que la trajectoire associée joint* M_0 *à* M_1 *en temps* $t(u)$ *et en coût minimal.*

Bien entendu pour un problème de contrôle optimal à temps final fixé, on impose $t(u) = T$ (et en particulier on suppose que la cible M_1 est accessible depuis M_0 en temps T).
La preuve du théorème 4.1 est semblable à celle du théorème 3.1. La prise en compte de contraintes sur l'état ne pose aucun problème. Notons que l'hypothèse (4.2) implique la convexité de l'ensemble des vecteurs vitesses, et aussi (terme $\gamma > 0$) une propriété de convexité d'épigraphe. Nous donnons tout de même cette preuve ci-dessous.

Remarque 4.1

On peut montrer un résultat plus général où l'ensemble de départ M_0 et la cible M_1 dépendent du temps t, ainsi que le domaine des contraintes Ω sur le contrôle.

Démonstration

Soit δ l'infimum des coûts $C(u)$ sur l'ensemble des contrôles admissibles $u \in L^\infty([0, t(u)], \Omega)$ engendrant des trajectoires telles que $x(0) \in M_0$, $x(t(u)) \in M_1$ et vérifiant les contraintes sur l'état $c_1(x(\cdot)) \leq 0, ..., c_r(x(\cdot)) \leq 0$.
Considérons une suite minimisante de trajectoires $x_n(\cdot)$ associées à des contrôles u_n, c'est-à-dire une suite de trajectoires vérifiant ces propriétés et telle que $C(u_n) \to \delta$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
Pour tout n on note

$$\widetilde{F}_n(t) = \begin{pmatrix} f(t, x_n(t), u_n(t)) \\ f^0(t, x_n(t), u_n(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n(t) \\ F_n^0(t) \end{pmatrix}$$

pour presque tout $t \in [0, t(u_n)]$. D'après les hypothèses, la suite de fonctions $(\widetilde{F}_n(.))$ (étendues par 0 sur $]t_n(u_n), b]$) est bornée dans $L^\infty([0, b], \mathbb{R}^n)$.

Démonstration (suite)

Par conséquent à sous-suite près elle converge vers une fonction

$$\widetilde{F}(.) = \begin{pmatrix} F(t) \\ F^0(t) \end{pmatrix}$$

pour la topologie faible étoile de $L^\infty([0,b],\mathbb{R}^{n+1})$. A sous-suite près de même la suite $(t_n(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T>0$, et on a $\widetilde{F}(t)=0$ pour $t\in\,]T,b]$. Enfin, par compacité de M_0, à sous-suite près la suite $(x_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x_0\in M_0$. Posons alors, pour tout $t\in[0,T]$,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(s)ds,$$

ce qui construit une fonction $x(\cdot)$ absolument continue sur $[0,T]$.

Démonstration (suite)

De plus on a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n(t) = x(t),$$

c'est à dire la suite de fonctions $(x_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $x(\cdot)$. Comme dans la preuve du théorème 3.1, le but est de montrer que la trajectoire $x(\cdot)$ est associée à un contrôle u à valeurs dans Ω, et que de plus ce contrôle u est optimal pour le problème considéré.
Pour tout entier n et presque tout $t \in [0, t(u_n)]$, on pose

$$\widetilde{h}_n(t) = \begin{pmatrix} f(t, x(t), u_n(t)) \\ f^0(t, x(t), u_n(t)) \end{pmatrix}.$$

Démonstration (suite)

Si $T > t(u_n)$, on étend $\widetilde{h}_n$ sur $[0, T]$ par

$$\widetilde{h}_n(t) = \begin{pmatrix} f(t, x(t), v) \\ f^0(t, x(t), v) \end{pmatrix},$$

où $v \in \Omega$ est quelconque. Par ailleurs, on définit

$$\beta = \max\{|f^0(t, x, u)| \text{ tq } 0 \leq t \leq b, \ \ \|x\| \leq b, \ \ u \in \Omega\}.$$

Comme Ω est compact, $\beta > 0$ est bien défini. Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on modifie alors légèrement la définition de $\widetilde{V}(t, x)$ pour le rendre compact (tout en le gardant convexe).

Démonstration (suite)

On pose

$$\widetilde{V}_\beta(t,x) = \left\{ \begin{pmatrix} f(t,x,u) \\ f^{\,0}(t,x,u)+\gamma \end{pmatrix} \mid u \in \Omega,\ \gamma \geq 0,\ |f^{\,0}(t,x,u)+\gamma| \leq \beta \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} f(t,x,\Omega) \\ f^{\,0}(t,x,\Omega)+\gamma \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \\ [-\beta,+\beta] \end{pmatrix}.$$

On définit alors

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \{\widetilde{h}(.) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{n+1}) \mid h(t) \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t)) \text{ pp tout } t \in [0,T]\}.$$

Par construction, on a $\widetilde{h}_n \in \widetilde{\mathcal{V}}$ pour tout entier n.

Lemme 4.1

L'ensemble $\widetilde{\mathcal{V}}$ est convexe fermé fort dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^{n+1})$.

Démonstration du lemme 4.1

Montrons que $\widetilde{\mathcal{V}}$ est convexe. Soient $\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2 \in \widetilde{\mathcal{V}}$, et $\lambda \in [0,1]$. Par définition, pour presque tout $t \in [0,T]$ on a $\widetilde{r}_1(t) \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t))$, et $\widetilde{r}_2(t) \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t))$, or $\widetilde{V}_\beta(t,x(t))$ est convexe donc $\lambda\widetilde{r}_1(t) + (1-\lambda)\widetilde{r}_2(t) \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t))$. Donc $\lambda\widetilde{r}_1 + (1-\lambda)\widetilde{r}_2 \in \widetilde{\mathcal{V}}$.
Montrons que $\widetilde{\mathcal{V}}$ est fermé fort dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$. Soit $(\widetilde{r}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\widetilde{\mathcal{V}}$ convergente vers $\widetilde{r}$ pour la topologie forte de $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$. Montrons que $\widetilde{r} \in \widetilde{\mathcal{V}}$. A sous-suite près, $(\widetilde{r}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers $\widetilde{r}$, or par définition, pour presque tout $t \in [0,T]$ on a $\widetilde{r}_n(t) \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t))$, et $\widetilde{V}_\beta(t,x(t))$ est compact, donc $\widetilde{r} \in \widetilde{V}_\beta(t,x(t))$ pour presque tout $t \in [0,T]$. $\square$

Démonstration du théorème 4.1 (suite)

L'ensemble $\widetilde{\mathcal{V}}$ est donc aussi convexe fermé **faiblement** dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^{n+1})$. La suite de fonctions $(\widetilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^{n+1})$, à sous-suite près elle converge faiblement vers une fonction $\widetilde{h}$, qui appartient à $\widetilde{\mathcal{V}}$ puisque ce sous-ensemble est fermé faiblement.
Montrons que $\widetilde{F}=\widetilde{h}$ presque partout. Pour cela, écrivons, pour toute fonction $\varphi\in L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$,

$$\int_0^T \varphi(t)\widetilde{F}_n(t)dt = \int_0^T \varphi(t)\widetilde{h}_n(t)dt + \int_0^T \varphi(t)\left(\widetilde{F}_n(t)-\widetilde{h}_n(t)\right)dt. \tag{4.3}$$

D'après les hypothèses, les fonctions f et f^0 sont globalement lipschitziennes en x sur $[0,T]\times\overline{B}(0,b)\times\Omega$.

Démonstration du théorème 4.1 (suite)

Donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour presque tout $t \in [0, T]$, on ait

$$\left\| \widetilde{F}_n(t) - \widetilde{h}_n(t) \right\| \leq C \left\| x_n(t) - x(t) \right\| .$$

La suite de fonctions $(x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $x(\cdot)$, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^T \varphi(t) \left(\widetilde{F}_n(t) - \widetilde{h}_n(t) \right) dt \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Existence de trajectoires optimales

Démonstration du théorème 4.1 (suite)

Finalement en passant à la limite dans (4.3), il vient

$$\int_0^T \varphi(t)\widetilde{F}(t)dt = \int_0^T \varphi(t)\widetilde{h}(t)dt$$

pour toute fonction $\varphi \in L^2([0,T])$, et par conséquent $\widetilde{F} = \widetilde{h}$ presque partout sur $[0,T]$.
En particulier, $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{V}}$, et donc pour presque tout $t \in [0,T]$ il existe $u(t) \in \Omega$ et $\gamma(t) > 0$ tels que

$$\widetilde{F}(t) = \begin{pmatrix} f(t, x(t), u(t)) \\ f^0(t), x(t), u(t)) + \gamma(t) \end{pmatrix}.$$

Existence de trajectoires optimales

Démonstration du théorème 4.1 (suite)

En appliquant un lemme de sélection mesurable de théorie de la mesure (notons que $\widetilde{F} \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^{n+1})$, les fonctions $u(\cdot)$ et $\gamma(\cdot)$ peuvent de plus être choisies mesurables sur $[0,T]$.

Il reste à montrer que le contrôle u ainsi défini est optimal pour le problème considéré. Tout d'abord, comme $x_n(t_n(u_n)) \in M_1$, par compacité de M_1 et d'après les propriétés de convergence montrées précédemment, on obtient $x(T) \in M_1$. De même, clairement on obtient $c_1(x(\cdot)) \leq 0, \cdots, c_r(x(\cdot)) \leq 0$. Par ailleurs, par définition $C(u_n)$ converge vers δ, et d'après les propriétés de convergence démontrées ci-dessus, $C(u_n)$ converge aussi vers $\displaystyle\int_0^T (f^0(t,x(t),u(t)) + \gamma(t))dt + g(T,x(T)).$

Démonstration du théorème 4.1 (suite)

Comme γ est à valeurs positives, cela implique donc que

$$\begin{aligned}\int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt + g(T, x(T)) &\leq \int_0^T (f^0(t, x(t), u(t)) + \gamma(t))dt + \\ &\quad g(T, x(T)) \\ &\leq C(v)\end{aligned}$$

pour tout contrôle v admissible qui engendre une trajectoire reliant M_0 à M_1 et vérifiant les différentes contraintes. Autrement dit, le contrôle u est optimal. Notons d'ailleurs que la fonction γ est forcément nulle.

La preuve du théorème 4.1 est achevée. $\square$

Pour des systèmes affines

Le résultat précédent suppose des contraintes sur le contrôle. En absence de contraintes, on a par exemple, pour les systèmes affines, le résultat suivant.

Existence de trajectoires optimales

Pour des systèmes affines

Proposition 4.1

Considérons le système affine dans $\mathbb{R}^n$

$$x' = f^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \quad x(0) = x_0, \; x(T) = x_1,$$

avec le coût $C_T(u) = \displaystyle\int_0^T \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t)dt,$

où $T > 0$ *est fixé et la classe* $\mathcal{U}$ *des contrôles admissibles est le sous-ensemble de* $L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ *tel que*

1. $\forall u \in \mathcal{U} \;\; x_u$ *est bien définie sur* $[0,T]$;
2. $\exists B_T \mid \forall u \in \mathcal{U} \;\; \forall t \in [0,T] \;\; ||x_u(t)|| \leq B_T$.

Si x_1 *est accessible depuis* x_0 *en temps* T*, alors il existe un contrôle optimal reliant* x_0 *à* x_1*.*

Démonstration

Considérons une suite de contrôles $(u_i^{(n)}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ transférant x_0 en x_1, telle que leur coût tend vers la borne inférieure des coûts des contrôles reliant x_0 à x_1. Soit $x^{(n)}$ la trajectoire associée au contrôle $u^{(n)}$, c'est à dire

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int_0^T \left(f_0(x^{(n)}(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i^{(n)}(t) f_i(x^{(n)}(t)) \right) dt.$$

Les $u_i^{(n)}$ sont bornés dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, et par compacité faible,

$$\exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid u_i^{(n_k)} \text{ converge faiblement vers } v_i \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m).$$

Démonstration (suite)

Il est par ailleurs facile de voir que la suite $(x^{(n_k)})'$ est bornée dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$, et par conséquent $x^{(n_k)}$ est bornée dans $H^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, et par réflexivité,

$$\exists (n_{k_p})_{p\in\mathbb{N}} \mid x^{(n_{k_p})} \text{ converge faiblement vers } x \in H^1([0,T],\mathbb{R}^n).$$

Or H^1 s'injecte continuement dans C^0 , donc $x^{(n_{k_p})}$ converge uniformément vers x sur $[0,T]$. On conclut alors aisément par passage à la limite que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m v_i(t) f_i(x(t)) \right) dt$$

et que $x(T) = x_1$. $\square$