UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
TÉTOUAN

ANNALES D'EXAMENS

ANALYSE II

ARIJ BOUZELMATE

Filières : **SMP/SMC**

Année Universitaire : **2017-2018**

Table des matières

1 Contrôle Final d'Analyse 2013-2014

Contrôle Final : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (4 points)

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}.$$

Exercice II. (6 points)

1) Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$y' = 2y + 8; \qquad (E_1)$$

Soit f une solution de l'équation (E_1).

2) $a)$ Montrer que la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$ est solution de l'équation différentielle suivante.

$$x\,y' - (2x+1)\,y = 8x^2; \qquad (E_2)$$

$b)$ Déduire toutes les solutions de l'équation (E_2).

3) Déterminer la solution h de l'équation (E_2) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln 2, 0)$.

Exercice III. (4 points)

Les résultats suivants sont-ils justes ?(**Toute réponse non justifiée sera considérée fausse**).

1) $\displaystyle\int_0^e \ln x\,dx = 0.$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ est absoluent convergente.

Exercice IV. (6 points)

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{e^{x-1}}\,dx.$$

$1)$ Calculer l'intégrale I_1.

$2)\,a)$ Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n.

$b)$ En déduire l'intégrale I_2.

$3)$ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

1.1 Solution

Exercice I.

On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

Comme $\Delta = 0$, alors elle admet une racine réelle double $\lambda = -1$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\Big(C_1 x + C_2\Big); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ est de la forme $e^{mx}\, P_n(x)$ avec $m = -1$ et $n = 0$.

Comme -1 est racine double de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^2 e^{-x}$ où $a \in \mathbb{R}$.

On pose $u(x) = ax^2$. Alors, $y_p(x) = e^{-x}\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$, on trouve que $a = 1$. Donc, $u(x) = x^2$. Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-x}\, u(x) = x^2\, e^{-x}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\Big(C_1 x + C_2\Big) + x^2\, e^{-x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice II.

1) $y' = 2y + 8 \Rightarrow y' - 2y = 8$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - 2y = 0$.

$$\begin{aligned} y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2y \\ \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int dx \\ \Rightarrow \ln|y| = 2x + cte \\ \Rightarrow |y| = e^{cte}e^{2x} \\ \Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{2x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = Ce^{2x}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' - 2y = 8$ de la forme

$$y_p(x) = C(x)e^{2x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' - 2y = 8$, on trouve que

$$y_p(x) = e^{2x}\int 8e^{-2x}\,dx = 8e^{2x}\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) = -4.$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' - 2y = 8$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{2x} - 4; \quad C \in \mathbb{R}.$$

2) $a)$ Soit $g(x) = xf(x)$ avec f solution de l'équation (E_1). On a

$$\begin{aligned} x\,g' - (2x+1)\,g &= x(f + xf') - (2x+1)\,xf \\ &= xf + x^2f' - 2x^2f - xf \\ &= x^2(f' - 2f) = 8x^2 \quad \text{(car } f \text{ est solution de } (E_1)). \end{aligned}$$

Donc, la fonction g est solution de l'équation (E_2).

$b)$ Utilisant le fait que $f(x) = Ce^{2x} - 4; \ C \in \mathbb{R}$ est solution générale de l'équation (E_1), alors les solutions de l'équation (E_2) sont de la forme

$$g(x) = xf(x) = x\Big(Ce^{2x} - 4\Big); \quad C \in \mathbb{R}.$$

3) Soit h solution de l'équation (E_2). Alors, $h(x) = x\Big(Ce^{2x} - 4\Big)$.

Comme $A(\ln 2, 0) \in C_h$, alors $h(\ln 2) = 0$, c'est à dire, $\ln 2\Big(Ce^{2\ln 2} - 4\Big) = 0$. Par suite, $C = 1$.

Il résulte que $h(x) = x\Big(e^{2x} - 4\Big)$.

Exercice III.

1) Nature de $\displaystyle\int_0^e \ln x \, dx$.

La fonction $x \to \ln x$ est continue sur $]0, e]$, donc le problème se pose uniquement en 0.

Soit $t \in]0, e]$, alors

$$\int_t^e \ln x \, dx = \int_t^e (x)' \ln x \, dx = [x \ln x]_t^e - \int_t^e x(\ln x)' \, dx = e \ln e - t \ln t - \int_t^e x \, \frac{1}{x} \, dx = e - t \ln t - e + t = t - t \ln t.$$

Donc,

$$\lim_{t \to 0} \int_t^e \ln x \, dx = 0$$

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^e \ln x \, dx$ est convergente et sa valeur est $\displaystyle\int_0^e \ln x \, dx = 0$.

2) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, 1]$, donc le problème se pose uniquement en 0.

On a pour tout $x \in]0, 1]$,

$$0 \leq \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\dfrac{1}{2} < 1$), alors $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| dx$ est convergente d'après le critère de comparaison, c'est dire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx$ est absolument convergente.

Exercice IV.

1) On a

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{e^{x-1}} \, dx = e \int_0^1 x \, e^{-x} \, dx = e \int_0^1 (-e^{-x})' x \, dx = e \left[-e^{-x} x\right]_0^1 + e \int_0^1 e^{-x} \, dx = -1 + e \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -1 - 1 + e = e - 2.$$

2) $a)$ Pour tout $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{e^{x-1}}\,dx = e\int_0^1 x^{n+1}\,e^{-x}\,dx = e\int_0^1 (-e^{-x})' x^{n+1}\,dx = e\left[-e^{-x}x^{n+1}\right]_0^1 + e\,(n+1)\int_0^1 e^{-x}x^n\,dx = -1+(n+1)I_n.$$

$b)$ On a

$$I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e - 5.$$

3) Soit $n \geq 1$. On a pour tout $x \in]0,1[$,

$$e^{-1} < e^{x-1} < 1.$$

Donc

$$x^n < \frac{x^n}{e^{x-1}} < e\,x^n.$$

Par suite

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 < I_n < e\int_0^1 x^n\,dx = e\,\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1.$$

D'où, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n+1} < I_n < \frac{e}{n+1}.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2 Rattrapage d'Analyse 2013-2014

Rattrapage : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (6 points)

Etudier la nature des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$
2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^3}\,dx.$

Exercice II. (6 points)

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + y' - 2y = e^{-x}.$$

Exercice III. (8 points)

Soit m un réel. On considère l'équation différentielle en fonction de m suivante :

$$x^2y' + +2xy = m; \qquad (E_m).$$

1) Quel est le type de l'équation différentielle (E_m) ? Justifier votre réponse.

2) Résoudre l'équation différentielle (E_0).

3) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle (E_1).

4) Déduire la relation qui existe entre les solutions de l'équation (E_0) et celles de l'équation (E_1).

2.1 Solution

Exercice I.

1) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$

La fonction $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1],$ donc le problème se pose uniquement en $0.$

Soit $t \in]0,1]$, alors

$$\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_t^1 = 2 - 2\sqrt{t}.$$

Donc,

$$\lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente et sa valeur est $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$

2) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^3}\,dx.$

La fonction $x \to \dfrac{|\cos x|}{x^3}$ est continue sur $[1,+\infty[,$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty.$

On a pour tout $x \geq 1,$

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente (car $3 > 1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^3}\,dx$ est convergente d'après le critère de comparaison.

Exercice II.

On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y' - 2y = e^{-x}.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' - 2y = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$

Comme $\Delta = 9 > 0$, alors elle admet deux racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\,e^x + C_2\,e^{-2x}; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' - 2y = e^{-x}$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = -1$ et $n = 0$.

Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = ae^{-x}$ où $a \in \mathbb{R}$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' - 2y = e^{-x}$, on trouve que $a = \dfrac{-1}{2}$. Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{-e^{-x}}{2}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = e^{-x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-2x} - \frac{e^{-x}}{2}; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice III.

1) L'équation différentielle (E_m) est une équation linéaire car elle est de la forme $a(x)y' + b(x)y = f(x)$ avec $a(x) = x^2,\ b(x) = 2x$ et $f(x) = m$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2) On veut résoudre l'équation $x^2y' + 2xy = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
x^2y' + 2xy = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2x}{x^2}dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2x}{x^2}dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = -\ln x^2 + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-\ln x^2} \\
&\Rightarrow y = \pm\frac{e^{cte}}{x^2}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation $x^2y' + 2xy = 0$ est

$$y_h(x) = \frac{k}{x^2}; \qquad k \in \mathbb{R}.$$

3) On veut résoudre l'équation $x^2y' + 2xy = 1$.

La solution générale de l'équation sans second membre y_h est donnée par la question 1.

On cherche une solution particulière de l'équation $x^2y' + 2xy = 1$ de la forme

$$y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $x^2y' + 2xy = 1$, on trouve que $k'(x) = 1$, d'où $k(x) = x$. Donc,

$$y_p(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc, la solution générale de l'équation $x^2y' + 2xy = 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

$4)$ On a y_h est solution de l'équation (E_0) et y est solution de (E_1). Donc,

$$y(x) - y_h(x) = y_p(x) = \frac{1}{x}.$$

3 Contrôle Final d'Analyse 2014-2015

Contrôle Final : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (3 points)

Soit F la fonction définie sur $]-1,1[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$.

1) Répondre aux questions suivantes par vrai ou faux et justifier vos réponses.

1.1) La fonction F est continue sur $]-1,1[$.

1.2) La fonction F est croissante sur $]-1,1[$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$ pour $x\in]-1,1[$.

Exercice II. (5 points)

1) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x>0$.

3) En déduire le domaine de définition de la fonction $F:\,x\to\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

Exercice III. (5 points)

Soient les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ telles que $u_n=\dfrac{1}{2^n}$ et $v_n=\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^2\right)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ est convergente et donner sa somme.

2) Etudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$.

Exercice IV. (7 points)

Soit α un réel. On considère l'équation différentielle en fonction de α suivante.

$$\alpha y''+y'+y=e^x(x-1);\qquad (E_\alpha).$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_0).

2) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

3.1 Solution

Exercice I.

Soit F la fonction définie sur $]-1,1[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$.

1) 1.1) Vrai car la fonction $t \to \dfrac{1}{1-t^2}$ est continue sur $]-1,1[$ et donc, la fonction F est bien définie et continue (même dérivable) sur $]-1,1[$.

1.2) Vrai car $F'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}>0$ pour tout $x\in]-1,1[$.

2) Il est facile de voir que pour tout $t\in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}.$$

Donc, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1-t}+\frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t}\\ &= \frac{-1}{2}\int_0^x \frac{-dt}{1-t}+\frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t}\\ &= \frac{-1}{2}\big[\ln|1-t|\big]_0^x+\frac{1}{2}\big[\ln|1+t|\big]_0^x\\ &= \frac{-1}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1+x)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).\end{aligned}$$

Exercice II.

1) On a $e^{-t}\,t^{x-1}=e^{-t}\,e^{(x-1)\ln t}>0$, pour tout $t>0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$.

La fonction $t\to e^{-t}\,t^{x-1}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\,e^{-t}\,t^{x-1}=\lim_{t\to+\infty} e^{-t}\,t^{x+1}=0$, alors d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$ est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) La fonction $t\to e^{-t}\,t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0,1]$.

On a $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t}\,t^{x-1}}{t^{x-1}}=\lim_{t\to 0} e^{-t}=1$, c'est dire $e^{-t}\,t^{x-1}\underset{0}{\sim} t^{x-1}=\dfrac{1}{t^{1-x}}$.

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si $x>0$ (c'est à dire $1-x<1$), alors $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x>0$ d'après le critère d'équivalence.

3) Soit $F:\ x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_0^{1} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ sont convergentes. Donc, le domaine de définition de la fonction F est $]0,+\infty[$.

Exercice III.

1) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente car $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$. Sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2.$$

2) On a $v_n = \ln\left(\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^2\right) = 2\ \ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Donc, $v_n \underset{+\infty}{\sim} 2\,\dfrac{1}{2^n}$ (car $\ln(1+x)\underset{0}{\sim} x$). Et comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ est convergente, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

Exercice IV.

1) On veut résoudre l'équation $y'+y = e^x(x-1);\quad (E_0)$.

c'est une équation différentielle de premier ordre linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'+y=0$.

On a

$$\begin{aligned}
y'+y=0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y\\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx\\
&\Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int dx\\
&\Rightarrow \ln|y| = -x+cte\\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x}\\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y'+y=0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x};\qquad k\in\mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = e^x(x-1)$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y'_p et on remplace dans l'équation $y' + y = e^x(x-1)$, on trouve que $k'(x) = e^{2x}(x-1)$. D'où,

$$y_p(x) = e^{-x} \int e^{2x}(x-1)\,dx.$$

En utilisant une intégration par parties, on a

$$\int e^{2x}(x-1)\,dx = \int \frac{1}{2}(e^{2x})'(x-1)\,dx = \frac{e^{2x}}{2}(x-1) - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}(x-1) - \frac{e^{2x}}{4} = \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Donc,

$$y_p(x) = e^{-x}\,\frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{e^x}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y' + y = e^x(x-1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + \frac{e^x}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

2) On veut résoudre l'équation $y'' + y' + y = e^x(x-1)$; (E_1).

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Comme $\Delta = -3 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées $\lambda_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x-1)$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 1$.

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^x\,Q_1(x)$ où Q_1 est un polynôme de degré 1. Donc, $y_p(x) = e^x(ax+b)$ où $a,\, b \in \mathbb{R}$.

On pose $u(x) = ax + b$. Donc, $y_p(x) = e^x\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' + y = e^x(x-1)$, on trouve que

$$3ax + 3(a+b) = x - 1.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{-2}{3}$. Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^x\, u(x) = e^x(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}) = \frac{e^x}{3}(x-2).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x-1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) == e^{-x/2}\left(C_1\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right) + \frac{e^x}{3}(x-2); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4 Rattrapage d'Analyse 2014-2015

Rattrapage : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (5 points)

1) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

1.1) Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.2) Déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Exercice II. (3 points)

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\lambda-1}\sin t\,dt\,;\quad \lambda < 0.$

Etudier la nature de l'intégrale I.

Exercice III. (4 points)

Soit la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ telle que $u_n = \sqrt{n^2+1} - n,\quad$ pour tout $n \geq 1$.

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,u_n = \frac{1}{2}$.

2) Etudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice IV. (8 points)

1) On considère l'équation différentielle suivante.

$$xy' - 2y = \ln x; \qquad (E_1)$$

Déterminer la solution f de l'équation (E_1) qui est définie sur $]0,+\infty[$ et qui vérifie $f(1) = 0$.

2) Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$y'' - 2y' + y = e^x(x^2+1); \qquad (E_2).$$

4.1 Solution

Exercice I.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

1.1) La fonction f est bien définie car $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, on a

$$x^2 + 1 > x^2 \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Par suite,

$$\sqrt{x^2+1} + x > |x| + x \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$\sqrt{x^2+1} + x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée de deux fonctions, $x \to x + \sqrt{x^2+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \to \ln x$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$f'(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Donc, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.2) En utilisant la question 1.1, on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_0^1 f'(x)\, dx = f(1) - f(0) = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

2) On a

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)'\,(x^2+1)^{-1/2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{1-1/2}}{1 - \dfrac{1}{2}}\right]_0^1 = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

Exercice II.

Soit $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\lambda-1} \sin t \, dt \,; \quad \lambda < 0.$

On a

$$0 \leq \left| t^{\lambda-1} \sin t \right| \leq t^{\lambda-1} \qquad \forall \, t \geq 1.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\lambda-1} \, dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\lambda}}$ est une intégrale de Riemann convergente car $1 - \lambda > 1$ (ceci est équivalent à $\lambda < 0$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left| t^{\lambda-1} \sin t \right| \, dt$ est aussi convergente d'après le critère de comparaison, c'est à dire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\lambda-1} \sin t \, dt$ est absolument convergente. D'où, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\lambda-1} \sin t \, dt$ est convergente dans le cas où $\lambda < 0$.

Exercice III.

1) On a pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)} = \frac{1}{n\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} + n}.$$

Donc, pour tout $n \geq 1$,

$$n \, u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} + 1}.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \, u_n = \frac{1}{2}$.

2) On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente d'après le principe d'équivalence.

Exercice IV.

1) On veut résoudre l'équation $xy' - 2y = \ln x; \quad (E_1)$.

c'est une équation différentielle de premier ordre linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $xy' - 2y = 0$.

On a

$$
\begin{aligned}
xy' - 2y = 0 \Rightarrow y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}\,dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}\,dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + cte = \ln x^2 + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{\ln x^2} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte} x^2.
\end{aligned}
$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $xy' - 2y = 0$ est

$$y_h(x) = k\,x^2; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $xy' - 2y = \ln x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)\,x^2.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $xy' - 2y = \ln x$, on trouve que $k'(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$. D'où,

$$y_p(x) = x^2 \int \frac{\ln x}{x^3}\,dx.$$

En utilisant une intégration par parties, on a

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \int \ln x \left(\frac{-x^{-2}}{2}\right)'\,dx = \frac{-\ln x}{2\,x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = \frac{-\ln x}{2\,x^2} - \frac{1}{4\,x^2}.$$

Donc,

$$y_p(x) = x^2\left(\frac{-\ln x}{2\,x^2} - \frac{1}{4\,x^2}\right) = \frac{-\ln x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Par suite, la solution générale de l'équation $xy' - 2y = \ln x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k\,x^2 - \frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Soit f une solution de l'équation (E_1) vérifiant $f(1) = 0$. Donc, $k - \dfrac{\ln 1}{2} - \dfrac{1}{4} = 0$. Ceci donne $k = \dfrac{1}{4}$. Par suite, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{\ln x}{2}.$$

2) On veut résoudre l'équation $y'' - 2y' + y = e^x(x^2+1)$; (E_2).

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' - 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$.

Donc, $\lambda = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique. Par suite, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^x\,(C_1\,x + C_2)\,; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x(x^2+1)$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 2$.

Comme $m = 1$ est racine double de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^x\,x^2\,Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2. Donc, $y_p(x) = e^x\,x^2\,(ax^2+bx+c) = e^x\,(ax^4+bx^3+cx^2)$, $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

On pose $u(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$. Donc, $y_p(x) = e^x\,u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' - 2y' + y = e^x(x^2+1)$, on trouve que

$$12ax^2 + 6bx + 2c = x^2 + 1.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{1}{12}$, $b = 0$ et $c = \dfrac{1}{2}$. Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^x\,u(x) = e^x\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x(x^2+1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x\,(C_1\,x + C_2) + e^x\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right) = e^x\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1\,x + C_2\right); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5 Contrôle Final d'Analyse 2015-2016

Contrôle Final : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (4 points)

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{5^n}+\frac{1}{4^n}\right)$ est convergente et calculer sa somme.

2) Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^3+1}$.

Exercice II. (6 points)

On considère l'intégrale $I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\lambda}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

Etudier la nature de l'intégrale I dans les cas suivants :

(i) $\lambda<1$,

(ii) $\lambda>1$,

(iii) $\lambda=1$.

Exercice III. (5 points)

Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y'-\frac{1}{x}y=\frac{-\ln x}{x}.$$

Exercice IV. (5 points)

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y''+2y'+2y=\sin x.$$

5.1 Solution

Exercice I.

1) Nature de la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{5^n}+\frac{1}{4^n}\right)$.

La série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{5^n}$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{-1}{5}\right|<1$. Sa somme est

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=\frac{5}{6}.$$

La série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}$ est une série géométrique convergente car $\frac{1}{4^n}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $\left|\frac{1}{4}\right|<1$. Sa somme est

$$T=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

Donc, la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{5^n}+\frac{1}{4^n}\right)$ est convergente. Sa somme est

$$W=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{5^n}+\frac{1}{4^n}\right)=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{2}{3}S+T=\frac{17}{9}.$$

2) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^3+1}$.

C'est une série termes positifs.

On a $\frac{\ln n}{n^3+1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln n}{n^3}$.

Soit $1<\alpha<3$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{\ln n}{n^3}=\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-3}\ln n=0.$$

Donc, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^3}$ est convergente d'après la règle de Riemann. Par suite, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^3+1}$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

Exercice II.

La fonction $x\to\frac{1}{x\,(\ln x)^{\lambda}}$ est continue sur $[2,+\infty[$ pout tout $\lambda\in\mathbb{R}$. Donc, le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t\in[2,+\infty[$. On a

$$\int_2^t\frac{dx}{x\,(\ln x)^{\lambda}}=\int_2^t(\ln x)'(\ln x)^{-\lambda}\,dx.$$

Donc, si $\lambda \neq 1$, on a

$$\int_2^t \frac{dx}{x\,(\ln x)^\lambda} = \left[\frac{(\ln x)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]_2^t = \frac{(\ln t)^{1-\lambda} - (\ln 2)^{1-\lambda}}{1-\lambda} = \frac{e^{(1-\lambda)\ln(\ln t)} - (\ln 2)^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

Dans le cas où $\lambda < 1$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{dx}{x\,(\ln x)^\lambda} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{(1-\lambda)\ln(\ln t)} - (\ln 2)^{1-\lambda}}{1-\lambda} = +\infty.$$

Donc, l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^\lambda}$ est divergente.

Dans le cas où $\lambda > 1$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{dx}{x\,(\ln x)^\lambda} = \frac{-(\ln 2)^{1-\lambda}}{1-\lambda} = \frac{(\ln 2)^{1-\lambda}}{\lambda-1}$$

Donc, l'intégrale I est convergente. Sa valeur est $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^\lambda} = \frac{(\ln 2)^{1-\lambda}}{\lambda-1}.$

Maintenant, si $\lambda = 1$, on a

$$\int_2^t \frac{dx}{x\,(\ln x)^\lambda} = \int_2^t \frac{dx}{x\,(\ln x)} = \int_2^t \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx = [\ln(\ln x)]_2^t = \ln(\ln t) - \ln(\ln 2).$$

Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{dx}{x\,(\ln x)} = \lim_{t\to+\infty} \big(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)\big) = +\infty,$ alors l'intégrale I est divergente.

Exercice III.

On veut résoudre l'équation $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{-\ln x}{x}.$

c'est une équation différentielle de premier ordre linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - \dfrac{1}{x}y = 0.$

On a

$$\begin{aligned}
y' - \frac{1}{x}y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{\ln|x|} = e^{cte}\,|x| \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte} x.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' - \dfrac{1}{x}y = 0$ est

$$y_h(x) = k\,x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{-\ln x}{x}$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)\,x.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{-\ln x}{x}$, on trouve que $k'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$. D'où,

$$y_p(x) = -x \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

En utilisant une intégration par parties, on a

$$\int \frac{-\ln x}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}\right)' \ln x\,dx = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}.$$

Donc,

$$y_p(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = \ln x + 1.$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{-\ln x}{x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k\,x + \ln x + 1; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice IV.

On veut résoudre l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin x$.

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$.

Comme $\Delta = -4 < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conuguées $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\left(C_1\,\cos x + C_2\,\sin x\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ est de la forme $e^{mx}\,(\alpha\,\cos(\omega x) + \beta\,\sin(\omega x))$ avec $m = 0$ et $\omega = 1$.

Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = A\,\cos x + B\,\sin x,\ A,\, b \in \mathbb{R}$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin x$, on trouve que

$$(A + 2B)\cos x + (B - 2A - 1)\sin x = 0$$

Comme $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, on obtient $A = \dfrac{-2}{5}$ et $B = \dfrac{1}{5}$. Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{-2}{5}\,\cos x + \frac{1}{5}\,\sin x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\,(C_1\,\cos x + C_2\,\sin x) - \frac{2}{5}\,\cos x + \frac{1}{5}\,\sin x; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

6 Rattrapage d'Analyse 2015-2016

Rattrapage : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (4 points)

Soient $\sum_{n\geq 2} u_n$ et $\sum_{n\geq 2} v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.
Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ sous les deux hypothèses indépendantes suivantes :

(i) $u_n \geq \dfrac{2}{n} + v_n$ pour tout $n \geq 2$.

(ii) $\sum_{n\geq 2} v_n$ est convergente et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} + v_n$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice II. (6 points)

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\lambda + t^{2-\lambda}}{t^3+1}\, dt$ où λ est un réel strictement positif.

Etudier la nature de l'intégrale I dans les cas suivants :

(i) $0 < \lambda < 1$,

(ii) $1 \leq \lambda < 2$,

(iii) $\lambda \geq 2$.

Exercice III. (5 points)

Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' + x^2 y = 3e^{-x^3/3}.$$

Exercice IV. (5 points)

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 2y' - 3y = 8xe^x.$$

6.1 Solution

Exercice I.

(i) Nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ dans le cas où $u_n \geq \dfrac{2}{n} + v_n$ pour tout $n \geq 2$.

On a $v_n > 0$ pour tout $n \geq 2$. Donc, $u_n > \dfrac{2}{n}$, pour tout $n \geq 2$.

Comme $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{2}{n}$ est divergente, par la suite $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente d'après le critère de comparaison.

(ii) Nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ dans le cas où $\sum_{n\geq 2} v_n$ est convergente et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} + v_n$ pour tout $n \geq 2$.

Comme la série $\sum_{n\geq 2} v_n$ est convergente alors nécessaireent $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}$. Par la suite, d'après la règle de d'Alembert, la série à termes strictement positifs $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.

Exercice II.

Soit $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\lambda + t^{2-\lambda}}{t^3+1}\,dt$ où λ est un réel strictement positif.

(i) Si $0 < \lambda < 1$.

On a $t^\lambda + t^{2-\lambda} = t^{2-\lambda}\left(1 + t^{2(\lambda-1)}\right)$. Comme, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{2(\lambda-1)} = 0$ (car $\lambda < 1$), alors $t^\lambda + t^{2-\lambda} \underset{+\infty}{\sim} t^{2-\lambda}$. Donc

$$\frac{t^\lambda + t^{2-\lambda}}{t^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^{2-\lambda}}{t^3} = \frac{1}{t^{\lambda+1}}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\lambda+1}}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\lambda + 1 > 1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\lambda + t^{2-\lambda}}{t^3+1}\,dt$ est une intégrale convergente d'après le critère d'équivalence.

(ii) $*$ Si $\lambda = 1$.

On a

$$\frac{t^\lambda + t^{2-\lambda}}{t^3+1} = \frac{2\,t}{t^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\,t}{t^3} = \frac{2}{t^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $2 > 1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\lambda + t^{2-\lambda}}{t^3+1}\,dt$ est une intégrale convergente d'après le critère d'équivalence.

$*$ Si $1 < \lambda < 2$.

On a $t^\lambda + t^{2-\lambda} = t^\lambda\left(1 + t^{2(1-\lambda)}\right)$. Comme, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{2(1-\lambda)} = 0$ (car $\lambda > 1$), alors $t^\lambda + t^{2-\lambda} \underset{+\infty}{\sim} t^\lambda$. Donc

$$\frac{t^\lambda + t^{2-\lambda}}{t^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^\lambda}{t^3} = \frac{1}{t^{3-\lambda}}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3-\lambda}}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $3-\lambda > 1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\lambda + t^{2-\lambda}}{t^3+1}\, dt$ est une intégrale convergente d'après le critère d'équivalence.

(iii) Si $\lambda \geq 2$.

Comme $\lambda \geq 2 > 1$, alors $t^\lambda + t^{2-\lambda} \underset{+\infty}{\sim} t^\lambda$. Donc

$$\frac{t^\lambda + t^{2-\lambda}}{t^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^\lambda}{t^3} = \frac{1}{t^{3-\lambda}}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3-\lambda}}$ est une intégrale de Riemann divergente (car $3-\lambda \leq 1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\lambda + t^{2-\lambda}}{t^3+1}\, dt$ est une intégrale divergente d'après le critère d'équivalence.

Exercice III.

On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + x^2\, y = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
y' + x^2\, y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -x^2\, y \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2\, dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x^2\, dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = \frac{-x^3}{3} + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{-x^3/3} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{-x^3/3}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + x^2\, y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x^3/3}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x^3/3}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$, on trouve que $k'(x) = 3$, d'où $k(x) = 3x$.

Donc,

$$y_p(x) = 3xe^{-x^3/3}.$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x^3/3} + 3xe^{-x^3/3} = (3x + k)e^{-x^3/3}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice IV.

On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre $y'' + 2y' - 3y = 8xe^x$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' - 3y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$.

Comme $\Delta = 16 > 0$, alors elle admet deux racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -3$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-3x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' - 3y = 8xe^x$ est de la forme $e^{mx}\, P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 1$.

Comme $m = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^x\, x\,(ax + b) = e^x\,(ax^2 + bx)$ où $a,\, b \in \mathbb{R}$.

On pose $u(x) = ax^2 + bx$, alors $y_p(x) = e^x\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' - 3y = 8xe^x$, on trouve que

$$8ax + 2a + 4b = 8x.$$

On obtient par identification, $a = 1$ et $b = \dfrac{-1}{2}$. Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^x \left(x^2 - \frac{x}{2}\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' - 3y = 8xe^x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-3x} + e^x \left(x^2 - \frac{x}{2}\right) = e^x \left(x^2 - \frac{x}{2} + C_1\right) + C_2\, e^{-3x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

7 Contrôle Final d'Analyse 2016-2017

Contrôle Final : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (8 points)

Soit λ un réel. On considère l'équation différentielle en fonction de λ suivante.

$$\lambda\, y'' + y' + y = e^x(x + \lambda + 1). \qquad (E_\lambda)$$

1) Pour $\lambda = 0$, résoudre l'équation différentielle du premier ordre (E_0).

2) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

Exercice II. (6 points)

Soient F_1 et F_2 deux fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $F_1(t) = \displaystyle\int_0^t x\, e^{-x}\, dx$ et $F_2(t) = \displaystyle\int_0^t x^2\, e^{-x}\, dx$.

1) Montrer que $F_2(t) = 2\, F_1(t) - t^2 e^{-t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx = 1$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\, e^{-x}\, dx = 2$.

Exercice III. (6 points)

1) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

2) On considère les deux séries alternées $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} v_n$ telles que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

2.1) Etablir que $v_n = u_n - \dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 2$.

2.2) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$.

2.3) Déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} v_n$.

7.1 Solution

Exercice I.

1) On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre $y' + y = e^x(x+1)$. (E_0)

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} y' + y = 0 \Rightarrow y' &= \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = e^x(x+1)$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = e^x(x+1)$, on trouve que

$$k'(x) = e^{2x}(x+1).$$

D'où

$$\begin{aligned} k(x) &= \int e^{2x}(x+1)\,dx \\ &= \int \frac{1}{2}\left(e^{2x}\right)'(x+1)\,dx \\ &= \frac{e^{2x}(x+1)}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx \\ &= \frac{e^{2x}(x+1)}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = \frac{e^x}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + y = e^x(x+1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + \frac{e^x}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

2) On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre $y'' + y' + y = e^x(x+2)$. (E_1)

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Comme $\Delta = -3 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 1$.

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^x\,Q_1(x)$ où Q_1 est un polynôme de degré 1, c'est à dire

$$y_p(x) = e^x\,(ax+b)\,; \quad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax + b$. Alors, $y_p(x) = e^x\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$, on trouve

$$3ax + 3a + 3b = x + 2.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

Donc

$$u(x) = \frac{x+1}{3}$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^x\, u(x) = \frac{e^x}{3}(x+1).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x/2}\left(C_1\, \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) + C_2\, \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right)\right) + \frac{e^x}{3}(x+1); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice II.

1) On a pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \int_0^t x^2\, e^{-x}\, dx = \int_0^t x^2\, (-e^{-x})'\, dx \\ &= \big[-x^2 e^{-x}\big]_0^t + \int_0^t 2\, x\, e^{-x}\, dx \\ &= -t^2 e^{-t} + 2\int_0^t x\, e^{-x}\, dx. \end{aligned}$$

Donc, $F_2(t) = 2\, F_1(t) - t^2 e^{-t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

2) On veut étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$. Ce qui revient à étudier $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} F_1(t)$.

On a

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \int_0^t x\, e^{-x}\, dx = \int_0^t x\, (-e^{-x})'\, dx \\ &= \big[-x\, e^{-x}\big]_0^t + \int_0^t e^{-x}\, dx \\ &= -t\, e^{-t} + \big[-e^{-x}\big]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1 \\ &= 1 - e^{-t}(t+1) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{t\to+\infty} F_1(t) = 1$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$ est convergente et sa valeur est

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} F_1(t) = 1.$$

3) Comme $\lim_{t\to+\infty} F_1(t) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t} = 0$, alors en utilisant la question 1), $\lim_{t\to+\infty} F_2(t) = 2$. D'où, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\, e^{-x}\, dx$ est convergente et sa valeur est

$$\int_0^{+\infty} x^2\, e^{-x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} F_2(t) = 2.$$

Exercice III.

1) On a $n + (-1)^n\sqrt{n} \geq n - \sqrt{n} = \sqrt{n}\,(\sqrt{n} - 1) > 0$ pour tout $n \geq 2$. Donc, $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$ est une série à termes strictement positifs.

Comme $n + (-1)^n\sqrt{n} = n\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$ (car $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$), alors

$$n + (-1)^n\sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} n.$$

D'où,

$$\frac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

2) 2.1) Soit $n \geq 2$. Alors,

$$\begin{aligned}
u_n - \frac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}} \\
&= \frac{n\,(-1)^n + (-1)^{2n}\sqrt{n} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\,(n + (-1)^n\sqrt{n})} \\
&= \frac{n\,(-1)^n + \sqrt{n} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\,(n + (-1)^n\sqrt{n})} \\
&= \frac{n\,(-1)^n}{n\,\sqrt{n} + n\,(-1)^n} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.
\end{aligned}$$

Donc, $v_n = u_n - \dfrac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 2$.

2.2) Comme $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 2}$ est positive, décroissante et convergente vers 0. Par suite, $\sum_{n\geq 2} u_n$ est une série alternée convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

$2.3)$ Comme $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ est divergente, alors en utilisant la question $2.1)$, la série $\sum_{n\geq 2} v_n$ est divergente.

8 Rattrapage d'Analyse 2016-2017

Rattrapage : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (4 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $u_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx.$

1) Montrer que $\dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}.$

2) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n.$

Exercice II. (6 points)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Soit la fonction F définie sur $[0, b[$ par $F(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{(b-x)^\lambda}.$

1) Calculer $F(t)$ en fonction de λ.

2) Discuter $\displaystyle\lim_{t\to b^-} F(t)$ suivant les valeurs de λ.

3) Dans quel cas l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ est convergente ? Calculer sa valeur.

Exercice III. (10 points)

Soient α et β deux réels tels que $\alpha \geq 1$ et $\beta > 0$.

On considère l'équation différentielle en fonction de α et β suivante :

$$(\alpha-1)y'' + \beta y' + \beta^2 y = \beta^2 e^{\beta x}(\beta x + \alpha) \qquad (E_{\alpha,\,\beta})$$

1) En prenant $\alpha > 1$, déterminer l'équation caractéristique et calculer son discriminant Δ.

2) Résoudre l'équation différentielle sans second membre associée à l'équation $(E_{\alpha,\,\beta})$ dans les trois cas : $1 < \alpha < \dfrac{5}{4}$, $\alpha = \dfrac{5}{4}$ et $\alpha > \dfrac{5}{4}$.

3) Résoudre l'équation différentielle du second ordre $(E_{2,\,1})$.

4) Résoudre l'équation différentielle du premier ordre $(E_{1,\,2})$.

8.1 Solution

Exercice I.

1) Soit $n \leq x \leq n+1$, alors $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. D'où en intégrant sur $[n, n+1]$, on obtient

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}.$$

2) D'après l'inégalité précédente, on a pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Comme $\dfrac{1}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente d'après le critère de comparaison.

Exercice II.

1) On va distinguer deux cas.

Si $\lambda = 1$, alors pour $t \in [0, b[$,

$$F(t) = \int_0^t \frac{dx}{b-x} = -\big[\ln|b-x|\big]_0^t = -\ln(b-t) + \ln(b) = \ln\left(\frac{b}{b-t}\right).$$

Si $\lambda \neq 1$, alors pour $t \in [0, b[$,

$$F(t) = \int_0^t \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = -\left[\frac{(b-x)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]_0^t = \frac{-(b-t)^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \frac{b^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

2) Si $\lambda = 1$, alors $\displaystyle\lim_{t\to b^-} F(t) = +\infty$.

Si $\lambda > 1$, alors $\displaystyle\lim_{t\to b^-} F(t) = +\infty$.

Si $\lambda < 1$, alors $\displaystyle\lim_{t\to b^-} F(t) = \frac{b^{1-\lambda}}{1-\lambda}$.

3) $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\lim_{t\to b^-} \int_0^t \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ existe et est finie. Donc, d'après la question 2, $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ est convergente dans le cas où $\lambda < 1$ et on a

$$\int_0^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{t\to b^-} \int_0^t \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{b^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

Exercice III.

1) Soit $\alpha > 1$, alors $(E_{\alpha,\beta})$ est une équation différentielle du second ordre.

L'équation caractéristique est :

$$(\alpha-1)\lambda^2+\beta\lambda+\beta^2=0.$$

Son discriminant est

$$\Delta=\beta^2-4\beta^2(\alpha-1)=\beta^2(5-4\alpha).$$

2) L'équation sans second membre associée à $(E_{\alpha,\,\beta})$ est

$$(\alpha-1)y''+\beta y'+\beta^2 y=0.$$

Sa résolution dépend du signe du discriminant Δ. Et comme $\beta>0$, ceci revient à comparer α avec $\dfrac{5}{4}$.

Si $1<\alpha<\dfrac{5}{4}$, alors ceci est équivalent à $\Delta>0$. Donc, l'équation caractéristique admet deux racines réelles simples

$$\lambda_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2(5-4\alpha)}}{2(\alpha-1)} \quad \text{et} \quad \lambda_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2(5-4\alpha)}}{2(\alpha-1)}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y_{h,\,1}(x)=C_1\,e^{\left(\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2(5-4\alpha)}}{2(\alpha-1)}\right)x}+C_2\,e^{\left(\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2(5-4\alpha)}}{2(\alpha-1)}\right)x}; \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Si $\alpha=\dfrac{5}{4}$, alors ceci est équivalent à $\Delta=0$. Donc, l'équation caractéristique admet une racine réelle double

$$\lambda=\frac{-\beta}{2(\alpha-1)}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y_{h,\,2}(x)=e^{\frac{-\beta x}{2(\alpha-1)}}\,(C_1x+C_2); \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Si $\alpha>\dfrac{5}{4}$, alors ceci est équivalent à $\Delta<0$. Donc, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1=\frac{-\beta+i\sqrt{\beta^2(4\alpha-5)}}{2(\alpha-1)} \quad \text{et} \quad \lambda_2=\frac{-\beta-i\sqrt{\beta^2(4\alpha-5)}}{2(\alpha-1)}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y_{h,\,3}(x)=e^{\frac{-\beta x}{2(\alpha-1)}}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{\beta^2(4\alpha-5)}}{2(\alpha-1)}\,x\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{\beta^2(4\alpha-5)}}{2(\alpha-1)}\,x\right)\right]; \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

3) On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y' + y = e^{x}(x+2) \qquad (E_{2,\,1})$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' + y = 0$.

D'après la deuxième question, comme $\alpha = 2 > \frac{5}{4}$, alors la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(C_1\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' + y = e^{x}(x+2)$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 1$.

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{x}\,Q_1(x)$ où Q_1 est un polynôme de degré 1, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{x}\,(ax+b)\,; \qquad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax + b$. Alors, $y_p(x) = e^{x}\,u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' + y = e^{x}(x+2)$, on trouve

$$3ax + 3a + 3b = x + 2.$$

On obtient par identification $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$.

Donc

$$u(x) = \frac{x+1}{3}$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{x}\,u(x) = \frac{e^{x}}{3}(x+1).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = e^{x}(x+2)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x/2}\left(C_1\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right) + \frac{e^{x}}{3}(x+1); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4) On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$2y' + 4y = 4e^{2x}(2x+1) \qquad (E_{1,\,2})$$

Ce qui est équivalent à résoudre

$$y' + 2y = 2e^{2x}(2x+1).$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
y' + 2y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -2y \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = -2dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = -2x + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-2x} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-2x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + 2y = 2e^{2x}(2x+1)$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-2x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + 2y = 2e^{2x}(2x+1)$, on trouve que

$$k'(x) = 2\,e^{4x}\,(2x+1).$$

D'où

$$\begin{aligned}
k(x) &= \int 2\, e^{4x}\, (2x+1)\, dx \\
&= \int \frac{1}{2}\, \left(e^{4x}\right)'\, (2x+1)\, dx \\
&= \frac{e^{4x}(2x+1)}{2} - \int e^{4x}\, dx \\
&= \frac{e^{4x}(2x+1)}{2} - \frac{e^{4x}}{4} \\
&= e^{4x}\left(x + \frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = e^{-2x} k(x) = e^{2x}\left(x + \frac{1}{4}\right).$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + 2y = 2e^{2x}(2x+1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-2x} + e^{2x}\left(x + \frac{1}{4}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$