UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
TÉTOUAN

ANNALES D'EXAMENS II

ANALYSE II

ARIJ BOUZELMATE

Filières : **SMP/SMC**

Année Universitaire : **2020-2021**

Table des matières

1 Contrôle Final 2017-2018

Contrôle Final : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (5 points)

1) Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t^2)\,dt$.

2) Donner le domaine de définition de la fonction $F : x \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\,dt$.

Exercice II. (5 points)

Soit f une fonction continue positive et décroissante sur $[1,+\infty[$.

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ une suite réelle définie par

$$u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n), \quad n \geq 2.$$

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq u_n \leq f(n-1) - f(n).$$

2) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$.

Exercice III. (10 points)

1) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' + 2y = 10\,cos(2x).$$

2) Soit λ un réel. On considère l'équation différentielle en fonction de λ suivante.

$$y' = \lambda(y - x). \quad (E_\lambda)$$

2.1) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

2.2) Résoudre l'équation différentielle (E_{-1}).

1.1 Solution

Exercice I.

1) La fonction $t \to \ln(t^2)$ est continue sur $]0,1]$. Donc, le problème se pose uniquement en 0.

Soit $x \in]0,1]$, alors

$$\int_x^1 \ln(t^2)\,dt = 2\int_x^1 \ln t\,dt = 2\int_x^1 (t)'\ln t\,dt = 2\big[t\,\ln t\big]_x^1 - 2\int_x^1 t(\ln t)'\,dt = -2x\ln x - 2(1-x) = -2x\ln x - 2 + 2x.$$

Donc, $\lim_{x\to 0}\int_x^1 \ln(t^2)\,dt = -2$. Par suite, $\int_0^1 \ln(t^2)\,dt$ est convergente et $\int_0^1 \ln(t^2)\,dt = -2$.

2) Si $x=0$, alors $\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\,dt = \int_0^1 \ln(t^2)\,dt$. Comme cette intégrale est convergente d'après la première question, alors F est définie en 0, plus exactement $F(0) = -2$.

Si $x \neq 0$, alors La fonction $t \to \ln(x^2+t^2)$ est continue sur $[0,1]$ puisque $x^2+t^2 \geq x^2 > 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Donc, $\int_0^1 \ln(x^2+t^2)$ dt est une intégrale simple. Ceci veut dire que F est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Il résulte que le domaine de définition de la fonction F est $\mathbb{R}$.

Exercice II.

1) Soit $n \geq 2$. Comme f est décroissante, alors pour tout $t \in [n-1,n]$,

$$f(n) \leq f(t) \leq f(n-1).$$

D'où, en intégrant sur $(n-1,n)$, on obtient

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)\,dt \leq f(n-1).$$

Ceci implique que

$$0 \leq u_n = \int_{n-1}^n f(t)\,dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n).$$

2) Soit $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$ la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$. Alors, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq S_n \leq \sum_{k=2}^n (f(k-1) - f(k)) = f(1) - f(n).$$

Comme f est positive sur $[1,+\infty[$, alors pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq S_n \leq f(1).$$

Donc, $\sum_{n\geq 2} u_n$ est une série à termes positifs et sa somme partielle est majorée, d'où $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.

Exercice III.

1) On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre $y'' + 2y' + 2y = 10\,\cos(2x)$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$.

Comme $\Delta = -4 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = -1 + i \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -1 - i.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\,(C_1\,\cos x + C_2\,\sin x)\,; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 10\,\cos(2x)$ est de la forme $e^{mx}\,(\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x))$ avec $m = 0$ et $\omega = 2$.

Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + 2y = 10\,\cos(2x)$, on trouve

$$(-2A + 4B - 10)\cos(2x) - (4A + 2B)\sin(2x) = 0$$

On obtient en utilisant le fait que les fonctions $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ sont linéairement indépendantes que $A = -1$ et $B = 2$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = 2\sin(2x) - \cos(2x).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 10\,\cos(2x)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\,(C_1\,\cos x + C_2\,\sin x) + 2\sin(2x) - \cos(2x); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) 2.1) On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre $y' = y - x$, (E_1).

C'est une équation linéaire car elle s'écrit sous la forme $y' - y = -x$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} y' - y = 0 \Rightarrow y' &= \frac{dy}{dx} = y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}\, e^{x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}\, e^{x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' - y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' - y = -x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^x.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' - y = -x$, on trouve que

$$k'(x) = -x\, e^{-x}.$$

D'où

$$\begin{aligned} k(x) &= -\int x\, e^{-x}\, dx \\ &= \int \left(e^{-x}\right)' x\, dx \\ &= x\, e^{-x} - \int e^{-x}\, dx \\ &= x\, e^{-x} + e^{-x} \\ &= e^{-x}(x+1). \end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = x + 1.$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' - y = -x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^x + x + 1; \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.2) On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre $y' = -(y - x)$, (E_{-1}).

C'est une équation linéaire car elle s'écrit sous la forme $y' + y = x$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = x$, on trouve que

$$k'(x) = x\, e^x.$$

D'où

$$\begin{aligned}
k(x) &= \int x\, e^x\, dx \\
&= \int (e^x)'\, x\, dx \\
&= x\, e^x - \int e^x\, dx \\
&= x\, e^x - e^x \\
&= e^x(x-1).
\end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = x - 1.$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + y = x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + x - 1; \quad k \in \mathbb{R}.$$

2 Rattrapage 2017-2018

Rattrapage : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (5 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $u_n = \left(a + \dfrac{1}{n}\right)^n$; $a \in \mathbb{R}^+$.

Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ dans les cas suivants :

(i) $0 \leq a < 1$,

(ii) $a > 1$,

(iii) $a = 1$.

Exercice II. (5 points)

On considère les deux intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,dt$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,dt$.

1) Etudier la nature des intégrales I et J.

2) Déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,dt$.

Indication : On admet que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1$.

Exercice III. (10 points)

Soit $\alpha > 1$. On considère l'équation différentielle en fonction de α suivante :

$$(\alpha - 1)y'' + y' + y = e^x(x + \alpha). \quad (E_\alpha)$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

2) Résoudre l'équation différentielle (E_2).

2.1 Solution

Exercice I.

On a pour tout $n \geq 1$, $\sqrt[n]{u_n} = u_n^{1/n} = a + \dfrac{1}{n}$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$. Par suite, Si $0 \leq a < 1$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ est convergente et si $a > 1$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ est divergente, d'après la règle de Cauchy.

Ceci démontre (i) et (ii).

$iii)$ Si $a = 1$, on a $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$, c'est à dire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0. D'où la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ est divergente,

Exercice II.

$1)$ Comme $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1$, alors la fonction $t \to \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ est prolongeable par continuité en 0. Donc, l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ est convergente.

On a pour tout $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t}.$$

Comme les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-2t}\, dt$ sont convergentes, alors les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-2t}}{t}\, dt$ sont convergentes d'après le critère de comparaison. D'où l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ est convergente.

$2)$ Comme les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ sont convergentes, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ est convergente.

Exercice III.

$1)$ On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$y' + y = e^x(x+1). \qquad (E_1)$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} y' + y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} &= -y \\ \Rightarrow \frac{dy}{y} &= -dx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= -\int dx \\ \Rightarrow \ln|y| &= -x + cte \\ \Rightarrow |y| &= e^{cte}e^{-x} \\ \Rightarrow y &= \pm e^{cte}e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = e^x(x+1)$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = e^x(x+1)$, on trouve que

$$k'(x) = e^{2x}\,(x+1).$$

D'où

$$\begin{aligned} k(x) &= \int e^{2x}\,(x+1)\,dx \\ &= \int \frac{1}{2}\left(e^{2x}\right)'(x+1)\,dx \\ &= \frac{e^{2x}(x+1)}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx \\ &= \frac{e^{2x}(x+1)}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = e^{-x}k(x) = \frac{e^x}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + y = e^x(x+1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + \frac{e^x}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

2) On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y' + y = e^x(x+2). \quad (E_2)$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Comme $\Delta = -3 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 1$.

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^x\,Q_1(x)$ où Q_1 est un polynôme de degré 1, c'est à dire

$$y_p(x) = e^x\,(ax + b)\,; \quad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax + b$. Alors, $y_p(x) = e^x\,u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$, on trouve

$$3ax + 3a + 3b = x + 2.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

Donc

$$u(x) = \frac{x+1}{3}$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^x\,u(x) = \frac{e^x}{3}(x+1).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x/2}\left(C_1\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right) + \frac{e^x}{3}(x+1); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3 Contrôle Final 2018-2019

Contrôle Final : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (6 points)

On considère deux séries numériques $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ telles que $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

1) Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

2) Etudier la nature des deux séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$.

3) Donner une conclusion.

Exercice II. (6 points)

1) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+2)^2}\, dx$ est convergente.

Soient F et G deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(t+2)^2}\, dt$ et $G(x) = \int_1^x \frac{1}{t(t+2)}\, dt$.

2) Montrer que $F(x) = \frac{-\ln x}{x+2} + G(x)$.

3) Calculer $G(x)$ puis $F(x)$, en fonction de x.

Indication : Chercher $a,\, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{t(t+2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+2}$.

4) Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to 0} F(x)$. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice III. (8 points)

Soit m un réel. On considère l'équation différentielle en fonction de m suivante.

$$(m+1)\, y'' + y' + y = 2e^x(x+m+2). \qquad (E_m)$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_{-1}).

2) Résoudre l'équation différentielle (E_0).

3.1 Solution

Exercice I.

1) On a pour tout $n \geq 1,\ v_n = u_n(1+u_n)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. D'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

2) On a $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée convergente d'après le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
La série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ est divergente car elle est la somme de la série alternée $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est convergente et de la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ qui est divergente.

3) On conclut que le critère d'équivalence n'est pas applicable dans ce cas car les termes généraux des deux séries $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ n'ont pas un signe constant.

Exercice II.

1) Nature de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+2)^2}\,dx$.

La fonction $x \to \frac{\ln x}{(x+2)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Donc, le problème se pose en 0 et en $+\infty$. On étudie donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+2)^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{(x+2)^2}\,dx$.

Au voisinage de 0, $x^{1/2}\frac{\ln x}{(x+2)^2} \underset{0}{\sim} x^{1/2}\frac{\ln x}{4}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/2}\frac{\ln x}{(x+2)^2} = 0$. Par suite d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+2)^2}\,dx$ est absolument convergente et par la suite elle est convergente.

Au voisinage de $+\infty$, on a $x^{3/2}\frac{\ln x}{(x+2)^2} \underset{+\infty}{\sim} x^{3/2}\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\frac{\ln x}{(x+2)^2} = 0$. Par suite d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+2)^2}\,dx$ est absolument convergente et par la suite elle est convergente.

On déduit que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+2)^2}\,dx$ est convergente.

2) A l'aide d'une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(t+2)^2}\,dt &= \int_1^x -\left(\frac{1}{t+2}\right)' \ln t\,dt \\
&= \left[\frac{-\ln t}{t+2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(t+2)}\,dt \\
&= \frac{-\ln x}{x+2} + \int_1^x \frac{1}{t(t+2)}\,dt.
\end{aligned}$$

D'où

$$F(x) = \frac{-\ln x}{x+2} + G(x).$$

3) On a

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_1^x \frac{1}{t(t+2)}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln t\right]_1^x - \frac{1}{2}\left[\ln(t+2)\right]_1^x \\ &= \frac{1}{2}\,\ln x - \frac{1}{2}\,\ln(x+2) + \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Par la suite

$$F(x) = \frac{-\ln x}{x+2} + \frac{1}{2}\,\ln x - \frac{1}{2}\,\ln(x+2) + \frac{\ln 3}{2}.$$

4) On a

$$F(x) = \frac{-\ln x}{x+2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) + \frac{\ln 3}{2}.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\ln 3}{2}$.

D'autre part, on peut écrire aussi

$$F(x) = \frac{x}{2(x+2)}\ln x - \frac{1}{2}\,\ln(x+2) + \frac{\ln 3}{2}.$$

Comme $\dfrac{x}{2(x+2)}\ln x \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{4}\ln x$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4}\ln x = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \dfrac{-\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{2}$.
$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{(t+2)^2}\,dt$ étant une primitive de $\dfrac{\ln x}{(x+2)^2}$, on déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+2)^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\ln 2}{2}.$$

D'où la valeur de l'intégrale $I = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Exercice III.

1) On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre $y' + y = 2e^x(x+1)$. (E_{-1})

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} y' + y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\ \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ \Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\ \Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\ \Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = e^x(x+1)$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y'_p et on remplace dans l'équation $y' + y = 2e^x(x+1)$, on trouve que

$$k'(x) = 2e^{2x}(x+1).$$

D'où

$$\begin{aligned} k(x) &= \int 2e^{2x}(x+1)\,dx \\ &= \int \left(e^{2x}\right)'(x+1)\,dx \\ &= e^{2x}(x+1) - \int e^{2x}\,dx \\ &= e^{2x}(x+1) - \frac{e^{2x}}{2} \\ &= e^{2x}\left(x + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = e^x\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + y = 2e^x(x+1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + e^x\left(x + \frac{1}{2}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

2) On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre $y'' + y' + y = 2e^x(x+2)$. (E_0)

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Comme $\Delta = -3 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' + y = 2e^x(x+2)$ est de la forme $e^{mx}P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 1$.

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^x Q_1(x)$ où Q_1 est un polynôme de degré 1, c'est à dire

$$y_p(x) = e^x(ax + b); \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax + b$. Alors, $y_p(x) = e^x u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' + y = 2e^x(x+2)$, on trouve

$$3ax + 3a + 3b = 2(x+2).$$

On obtient par identification $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$.

Donc

$$u(x) = \frac{2}{3}(x+1).$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^x u(x) = \frac{2e^x}{3}(x+1).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = 2e^x(x+2)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x/2}\left(C_1\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right) + \frac{2e^x}{3}(x+1); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4 Rattrapage 2018-2019

Rattrapage : Analyse II
Durée : 1h30min

Exercice I. (4 points)

Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) = \tan(x)\, y(x) + \sin(x), \quad x \in \left] \frac{-\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2} \right[.$$

Exercice II. (6 points)

Soient α et ω deux réels strictement positifs. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = \sin(\omega x). \quad (E)$$

Donner la solution générale de l'équation (E) dans les deux cas suivants.

(i) $\alpha \neq \omega$.

(ii) $\alpha = \omega$.

Exercice III. (4 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n^\alpha}$, $\quad \alpha > 0$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) Etudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Exercice IV. (6 points)

1) Montrer que les deux intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt$ sont convergentes.

2) Montrer que $|\sin t| \geq \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3) Etudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$.

4.1 Solution

Exercice I.

1) On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(x) = \tan(x)\, y(x) + \sin(x), \quad x \in \left]\frac{-\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\right[.$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'(x) - \tan(x)\, y(x) = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
y'(x) - \tan(x)\, y(x) = 0 &\Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = \tan(x)\, y(x) \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \tan(x)dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = \int \frac{-(\cos(x))'}{\cos(x)}\, dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos(x)| + cte = -\ln(\cos(x)) + cte \quad (\text{car } \cos(x) > 0 \text{ sur } \left]\frac{-\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\right[) \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{-\ln(\cos(x))} \\
&\Rightarrow y = \pm \frac{e^{cte}}{\cos(x)}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y'(x) - \tan(x)\, y(x) = 0$ est

$$y_h(x) = \frac{k}{\cos(x)}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y'(x) - \tan(x)\, y(x) = \sin(x)$ de la forme

$$y_p(x) = \frac{k(x)}{\cos(x)}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y'(x) - \tan(x)\, y(x) = \sin(x)$, on trouve que

$$k'(x) = \cos(x)\, \sin(x).$$

D'où

$$\begin{aligned} k(x) &= \int \cos(x)\, \sin(x)\, dx \\ &= \int (\sin(x))'\, \sin(x)\, dx \\ &= \frac{\sin^2(x)}{2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = \frac{\sin^2(x)}{2\, \cos(x)}.$$

Donc, la solution générale de l'équation $y'(x) - \tan(x)\, y(x) = \sin(x)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{k}{\cos(x)} + \frac{\sin^2(x)}{2\, \cos(x)}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice II.

$i)$ On suppose que $\alpha \neq \omega$. On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = \sin(\omega x).$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$.

Comme $\Delta = -4\alpha^2 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = i\alpha \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -i\alpha.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, \cos(\alpha x) + C_2\, \sin(\alpha x); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y''(x) + \alpha^2 y(x) = \sin(\omega x)$ est de la forme $e^{mx}\, (\beta_1\, \cos(\omega x) + \beta_2\, \sin(\omega x))$ avec $m = 0$.

Comme $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = A\, \cos(\omega x) + B\, \sin(\omega x)$ où $A,\, B \in \mathbb{R}$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y''(x) + \alpha^2 y(x) = \sin(\omega x)$, on trouve

$$A(\alpha^2 - \omega^2)\cos(\omega x) + \big(B(\alpha^2 - \omega^2) - 1\big)\sin(\omega x) = 0.$$

Comme les fonctions $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$ sont linéairement indépendantes, On obtient par identification $A = 0$ et $B = \dfrac{1}{\alpha^2 - \omega^2}$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{\sin(\omega x)}{\alpha^2 - \omega^2}.$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y''(x) + \alpha^2 y(x) = \sin(\omega x)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) + \frac{\sin(\omega x)}{\alpha^2 - \omega^2}; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) On suppose que $\alpha = \omega$. On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = \sin(\omega x).$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \omega^2 = 0$.

Comme $\Delta = -4\omega^2 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = i\omega \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -i\omega.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y''(x) + \omega^2 y(x) = \sin(\omega x)$ est de la forme $e^{mx}\,(\beta_1 \cos(\omega x) + \beta_2 \sin(\omega x))$ avec $m = 0$.

Comme $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = x\,(A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$ où $A,\, B \in \mathbb{R}$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y''(x) + \omega^2 y(x) = \sin(\omega x)$, on trouve

$$(-2A\omega - 1)\sin(\omega x) + 2B\omega\cos(\omega x) = 0.$$

On obtient donc par identification $A = \dfrac{-1}{2\omega}$ et $B = 0$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{-x}{2\omega}\cos(\omega x).$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y''(x) + \omega^2 y(x) = \sin(\omega x)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x) - \frac{x}{2\omega}\cos(\omega x); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice III.

1) On a $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $0 < u_{n+1} < \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \geq 1$. Comme $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-u_n} = 1$, donc $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$. D'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n-1)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente si et seulement si $\alpha > 1$. Donc d'après le critère d'équivalence, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente si $\alpha > 1$ et est divergente si $0 < \alpha \leq 1$.

Exercice IV.

1) (i) Soit $x \in [1, +\infty[$. En utilisant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt &= \int_1^x \frac{-(\cos(t))'}{t}\,dt \\
&= \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt \\
&= \frac{-\cos(x)}{x} + \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt
\end{aligned}$$

Comme $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ pour tout $t \geq 1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ est absolument convergente d'après le critère de comparaison et par la suite elle est convergente. De plus, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$ (car $0 \leq \left|\dfrac{\cos(x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

(ii) Soit $x \in [1, +\infty[$. En utilisant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt &= \int_1^x \frac{(\sin(t))'}{t}\,dt \\
&= \left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt \\
&= \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt
\end{aligned}$$

Comme $\left|\dfrac{\sin(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ pour tout $t \geq 1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$ est absolument convergente d'après le critère de comparaison et par la suite elle est convergente. De plus, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ (car $0 \leq \left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$ est convergente.

2) On a $|\sin(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $|\sin^2(t)| = \sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2} \leq |\sin(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3) On a pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{1-\cos(2t)}{2t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\,dt$ est une intégrale de Riemann divergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt$ est convergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,dt$ est divergente. D'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}$ est divergente d'après le critère de comparaison.

5 Contrôle Final 2019-2020

Contrôle Final : Analyse II
Durée : 1heure

Note importante : L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes A et B. Chaque étudiant est tenu à choisir une seule partie A ou B et numéroter correctement les exercices correspondants à la partie choisie.

Partie A

Exercice A.I. (4 points)

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

1) Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2+n-1}$.

2) Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Exercice A.II. (5 points)

Pour $n \geq 3$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 3} u_n$.

Exercice A.III. (5 points)

Soit λ un réel strictement positif. On pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\lambda + 1},\ n \geq 3$.

Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 3} u_n$ dans les cas suivants :

(i) $\lambda \leq 1$.

(ii) $\lambda > 1$.

Exercice A.IV. (6 points)

Soit a un réel strictement positif. On pose $u_n = \dfrac{a^n\, n!}{n^n},\ n \geq 1$.

1) Montrer que si $a = e$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

2) Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ dans les cas suivants :

(i) $a = e$.

(ii) $a < e$.

(iii) $a > e$.

Partie B

Exercice B.I. (4 points)

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\, e^{st}\, dt,\ s \in \mathbb{R}$.

Etudier la nature de l'intégrale I dans les cas suivants :

(i) $s < 0$.

(ii) $s \geq 0$.

Exercice B.II. (6 points)

Soit a un réel strictement positif. On pose $u_n = \dfrac{a^n\, n!}{n^n},\ n \geq 1$.

1) Montrer que si $a = e$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

2) Etudier la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ dans les cas suivants :

(i) $a = e$.

(ii) $a < e$.

(iii) $a > e$.

Exercice B.III. (5 points)

Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' + 2y = 2\, e^{2x}(2x + 1).$$

Exercice B.IV. (5 points)

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + y' + y = e^{x}(x + 2).$$

5.1 Solution

Partie A

Exercice A.I.

1) Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2+n-1} = 0$, alors

$$u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{n^2+n-1}+1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2+n-1}.$$

2) On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. De plus on a

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2+n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série convergente d'après le critère d'équivalence.

Exercice A.II.

On pose $an = \frac{\ln n}{n}$, pour $n \geq 3$. Comme $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 3$, alors $\sum_{n\geq 3} u_n$ est une série alternée.

On pose $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, pour $x > 0$. Alors f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x > e$.

Par la suite la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante. De plus on a $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ceci implique d'après le critère spécial des séries alternées que $\sum_{n\geq 3} u_n$ est une série alternée convergente.

Exercice A.III.

On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 3$.

(i) On a pour tout $n \geq 3$,

$$u_n = \frac{\ln n}{n^\lambda + 1} \geq \frac{1}{n^\lambda+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\lambda} \quad (\text{car } \lambda > 0).$$

Si $\lambda \leq 1$, $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^\lambda}$ est une série de Riemann divergente. Donc $\sum_{n\geq 3} u_n$ est divergente d'après le critère de comparaison.

(ii) Si $\lambda > 1$, soit $1 < \alpha < \lambda$. Comme $u_n = \frac{\ln n}{n^\lambda+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^\lambda}$ et $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-\lambda} \ln n = 0$ (car $\alpha < \lambda$), alors $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$. Donc $\sum_{n\geq 3} u_n$ est convergente d'après la règle de Riemann.

Exercice A.IV.

On a $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

1) Si $a = e$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq e^0 = 1$ pour tout $n \geq 1$. Donc, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

2) D'après la première question, si $a = e$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et comme elle est strictement positive alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in]0,+\infty]$, d'où $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

On a pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\, e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{e}$. Par conséquent, d'après la règle de D'Alembert, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente si $a < e$ et est divergente si $a > e$.

Partie B

Exercice B.I.

Soit $s \in \mathbb{R}$, alors la fonction $t \to t\, e^{st}$ est continue est positive sur sur $[0,+\infty[$, donc en particulier $\int_0^1 t\, e^{st}\, dt$ est une intégrale simple. Reste à étudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} t\, e^{st}\, dt$.

(i) Si $s < 0$, pour $\alpha > 1$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha+1} e^{st} = 0$, donc d'après la règle de Riemann, $\int_1^{+\infty} t\, e^{st}\, dt$ est convergente, d'où $\int_0^{+\infty} t\, e^{st}\, dt$ est convergente aussi.

(ii) Si $s \geq 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t\, e^{st} = +\infty$. Donc, $\int_1^{+\infty} t\, e^{st}\, dt$ est divergente, d'où $\int_0^{+\infty} t\, e^{st}\, dt$ est divergente aussi.

Exercice B.II.

On a $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

1) Si $a = e$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq e^0 = 1$ pour tout $n \geq 1$. Donc, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

2) D'après la première question, si $a = e$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et comme elle est strictement

positive alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \in]0,+\infty]$, d'où $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

On a pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a\,e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{e}$. Par conséquent, d'après la règle de D'Alembert, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente si $a < e$ et est divergente si $a > e$.

Exercice B.III.

On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$y' + 2y = 2e^{2x}(2x+1).$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} &= -2y \\
\Rightarrow \frac{dy}{y} &= -2dx \\
\Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= -2\int dx \\
\Rightarrow \ln|y| &= -2x + cte \\
\Rightarrow |y| &= e^{cte}e^{-2x} \\
\Rightarrow y &= \pm e^{cte}e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-2x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + 2y = 2e^{2x}(2x+1)$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-2x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + 2y = 2e^{2x}(2x+1)$, on trouve que

$$k'(x) = 2\,e^{4x}\,(2x+1).$$

D'où

$$
\begin{aligned}
k(x) &= \int 2\,e^{4x}\,(2x+1)\,dx \\
&= \int \frac{1}{2}\left(e^{4x}\right)'(2x+1)\,dx \\
&= \frac{e^{4x}(2x+1)}{2} - \int e^{4x}\,dx \\
&= \frac{e^{4x}(2x+1)}{2} - \frac{e^{4x}}{4} \\
&= e^{4x}\left(x+\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Donc,

$$y_p(x) = e^{-2x}k(x) = e^{2x}\left(x+\frac{1}{4}\right).$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + 2y = 2e^{2x}(2x+1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-2x} + e^{2x}\left(x+\frac{1}{4}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice B.IV.

On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y' + y = e^x(x+2).$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Comme $\Delta = -3 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(C_1\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 1$.

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^x\, Q_1(x)$ où Q_1 est un polynôme de degré 1, c'est à dire

$$y_p(x) = e^x\,(ax+b)\,; \qquad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax + b$. Alors, $y_p(x) = e^x\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$, on trouve

$$3ax + 3a + 3b = x + 2.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

Donc

$$u(x) = \frac{x+1}{3}$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^x\, u(x) = \frac{e^x}{3}(x+1).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x/2}\left(C_1\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right) + \frac{e^x}{3}(x+1); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

6 Rattrapage 2019-2020

Rattrapage : Analyse II
Durée : 1heure

Note importante : L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes A et B. Chaque étudiant est tenu à choisir une seule partie A ou B et numéroter correctement les exercices correspondants à la partie choisie.

Partie A

Exercice A.I. (4 points)

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle strictement positive.

Montrer que si $\sum_n u_n$ est convergente alors $\sum_n u_n^2$ est convergente.

Exercice A.II. (4 points)

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n\, n^2\, u_n = 1$.

Etudier la nature de la série $\sum_n u_n$.

Exercice A.III. (6 points)

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

Etudier la nature des séries suivantes.

1) $\sum_n \sqrt{u_n\, v_n}$.

2) $\sum_n \frac{u_n}{1-v_n}$.

Exercice A.IV. (6 points)

Etudier la nature des séries suivantes.

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}; \qquad a>0.$

2) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

Partie B

Exercice B.I. (4 points)

1) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ est convergente et calculer sa valeur.

2) On pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\,(1+x^\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Montrer que l'intégrale $I(\lambda)$ est convergente pour tout réel λ.

Exercice B.II. (6 points)

Etudier la nature des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}; \qquad a > 0.$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right).$

Exercice B.III. (5 points)

Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' = y + \sin x + 2\,\cos x.$$

Exercice B.IV. (5 points)

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 2\,y' + y = 4\,x\,e^x.$$

6.1 Solution

Partie A

Exercice A.I.

Si $\sum_n u_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 < u_n < 1 \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Donc

$$0 < u_n^2 < u_n \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Comme $\sum_n u_n$ est convergente, alors $\sum_n u_n^2$ est convergente d'après le critère de comparaison.

Exercice A.II.

Comme $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n\, n^2\, u_n = 1$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|(-1)^n\, n^2\, u_n - 1| < 1 \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Donc

$$n^2 |u_n| < 2 \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

C'est à dire

$$|u_n| < \frac{2}{n^2} \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Comme $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors $\sum_n |u_n|$ est convergente d'après le critère de comparaison, c'est à dire $\sum_n u_n$ est absolument convergente, d'où elle est convergente.

Exercice A.III.

1) Nature de la série $\sum_n \sqrt{u_n\, v_n}$.

On a

$$0 \leq \sqrt{u_n\, v_n} \leq \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes, alors $\sum_n \left(\frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2}\right)$ est aussi une série à termes positifs convergente. Donc, $\sum_n \sqrt{u_n\, v_n}$ est une série convergente d'après le critère de comparaison.

2) Nature de la série $\sum_n \frac{u_n}{1-v_n}$.

Comme $\sum_n v_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. D'où, $\frac{u_n}{1-v_n} \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ et

$$\frac{u_n}{1-v_n} \underset{+\infty}{\sim} u_n.$$

Comme $\sum_n u_n$ est une série à termes positifs convergente, alors $\sum_n \frac{u_n}{1-v_n}$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

Exercice A.IV.

1) Soit

$$u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}; \quad n \in \mathbb{N} \; et \; a > 0.$$

Donc, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n(1+a)^{n+1}} \, \frac{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}{a^n} = \frac{a}{(1+a)^{n+1}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente.

2) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$.

On pose $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

Comme $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée.

Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers 0.

On pose $a_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui entraine que f est décroissante en particulier sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent,

$f(n) \geq f(n+1)$ pour tout $n \geq 1$. D'où, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

De plus, on a

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On déduit d'après le critère spécial des séries alternées que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Partie B

Exercice B.I.

1) La fonction $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc le problème se pose en $+\infty$.

Soit $t>0$. On a

$$\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^t = \arctan t.$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ est convergente et sa valeur est $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x>0$

$$0 < \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} < \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ est convergente, alors l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

Exercice B.II.

1) Soit

$$u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}; \qquad n\in\mathbb{N} \; et \; a>0.$$

Donc, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n(1+a)^{n+1}}\,\frac{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}{a^n} = \frac{a}{(1+a)^{n+1}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente.

2) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq1}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

On pose $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$.

Comme $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée.

Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers 0.

On pose $a_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui entraine que f est décroissante en particulier sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent,

$f(n) \geq f(n+1)$ pour tout $n \geq 1$. D'où, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

De plus, on a

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On déduit d'après le critère spécial des séries alternées que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Exercice B.III.

On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$y' = y + \sin x + 2\,\cos x.$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - y = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
y' - y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} &= y \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = x + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^x \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^x.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' - y = 0$ est

$$y_h(x) = k\,e^x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' = y + \sin x + 2\,\cos x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)\,e^x.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' = y + \sin x + 2\,\cos x$, on trouve que

$$k'(x) = e^{-x}(\sin x + 2\,\cos x).$$

Donc

$$\begin{aligned}
k(x) &= \int e^{-x}(\sin x + 2\,\cos x)\,dx \\
&= \int -(e^{-x})'(\sin x + 2\,\cos x)\,dx \\
&= -e^{-x}(\sin x + 2\,\cos x) + \int e^{-x}(\cos x - 2\,\sin x)\,dx \\
&= -e^{-x}(\sin x + 2\,\cos x) - \int (e^{-x})'(\cos x - 2\,\sin x)\,dx \\
&= -e^{-x}(\sin x + 2\,\cos x) - e^{-x}(\cos x - 2\,\sin x) + \int e^{-x}(-\sin x - 2\,\cos x)\,dx \\
&= e^{-x}(\sin x - 3\,\cos x) - \int e^{-x}(\sin x + 2\,\cos x)\,dx = e^{-x}(\sin x - 3\,\cos x) - k(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$2\,k(x) = e^{-x}(\sin x - 3\,\cos x).$$

D'où,

$$k(x) = e^{-x}\left(\frac{\sin x}{2} - \frac{3\,\cos x}{2}\right).$$

Par suite

$$y_p(x) = k(x)\,e^x = \frac{\sin x}{2} - \frac{3\,\cos x}{2}.$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' = y + \sin x + 2\,\cos x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k\,e^x + \frac{\sin x}{2} - \frac{3\,\cos x}{2}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice B.IV.

On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + 2\,y' + y = 4\,x\,e^{x}.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2\,y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = 0$.

Comme $\Delta = 0$, alors elle admet une racine réelle double $\lambda = -1$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}(C_1\,x + C_2); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2\,y' + y = 4\,x\,e^{x}$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 1$.

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{x}\,Q_1(x)$ où Q_1 est un polynôme de degré 1, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{x}\,(ax + b)\,; \qquad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax + b$. Alors, $y_p(x) = e^{x}\,u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2\,y' + y = 4\,x\,e^{x}$, on trouve

$$ax + a + b = x.$$

On obtient par identification $a = 1$ et $b = -1$.

Donc

$$u(x) = x - 1$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{x}\,u(x) = e^{x}(x - 1).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2\,y' + y = 4\,x\,e^{x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}(C_1\,x + C_2) + e^{x}(x - 1); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

7 Contrôle Final 2020-2021

Contrôle Final : Analyse II
Durée : 1heure

Exercice I. (4 points)

On considère la série numérique de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$.

1) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$.

2) Etudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Exercice II. (6 points)

Soit α un réel.

1) Discuter suivant la valeur de α la nature des intégrales suivantes.

   $a)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t^\alpha}\, dt.$

   $b)$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\, dt.$

2) Quelle est la condition sur α pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\, dt$ soit convergente.

Exercice III. (10 points)

Soit λ un réel. On considère l'équation différentielle en fonction de λ suivante.

$$(\lambda+1)\, y'' + y' + y = 2e^x(x+\lambda+2). \qquad (E_\lambda)$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_{-1}).

2) Résoudre l'équation différentielle (E_0).

7.1 Solution

Exercice I.

1) On a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}\frac{n!}{n^3}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\frac{1}{n+1}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=0.$

2) En utilisant la règle de D'Alembert, on a la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geq1}|u_n|$ est convergente, c'est à dire que la série $\sum\limits_{n\geq1}u_n$ est absolument convergente. D'où $\sum\limits_{n\geq1}u_n$ est convergente.

Exercice II.

1) $a)$ Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt.$

C'est une intégrale à termes positifs.

On a $\dfrac{\arctan t}{t^\alpha}\underset{0}{\sim}\dfrac{t}{t^\alpha}=\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}.$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^{\alpha-1}}$ est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si $\alpha-1<1$, c'est à dire $\alpha<2.$

Donc d'après le critère d'équivalence $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha<2.$

$b)$ Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt.$

C'est une intégrale à termes positifs.

On a $\dfrac{\arctan t}{t^\alpha}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2\,t^\alpha}.$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}$ est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si $\alpha>1$. Donc d'après le critère d'équivalence $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha>1.$

2) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ sont convergentes. D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $1<\alpha<2.$

Exercice III.

1) On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre $y'+y=2e^x(x+1).$ (E_{-1})

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'+y=0.$

On a

$$\begin{aligned}
y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = e^x(x+1)$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = 2e^x(x+1)$, on trouve que

$$k'(x) = 2e^{2x}(x+1).$$

D'où

$$\begin{aligned}
k(x) &= \int 2e^{2x}(x+1)\,dx \\
&= \int \left(e^{2x}\right)'(x+1)\,dx \\
&= e^{2x}(x+1) - \int e^{2x}\,dx \\
&= e^{2x}(x+1) - \frac{e^{2x}}{2} \\
&= e^{2x}\left(x + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = e^x\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + y = 2e^x(x+1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + e^x\left(x + \frac{1}{2}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

2) On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre $y'' + y' + y = 2e^x(x+2)$. (E_0)

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Comme $\Delta = -3 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' + y = 2e^x(x+2)$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 1$.

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^x\,Q_1(x)$ où Q_1 est un polynôme de degré 1, c'est à dire

$$y_p(x) = e^x\,(ax + b)\,; \quad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax + b$. Alors, $y_p(x) = e^x\,u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' + y = 2e^x(x+2)$, on trouve

$$3ax + 3a + 3b = 2(x+2).$$

On obtient par identification $a = \dfrac{2}{3}$ et $b = \dfrac{2}{3}$.

Donc

$$u(x) = \frac{2}{3}(x+1).$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^x\,u(x) = \frac{2e^x}{3}(x+1).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = 2e^x(x+2)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right) + \frac{2e^x}{3}(x+1); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

8 Rattrapage 2020-2021

Rattrapage : Analyse II
Durée : 1heure

Exercice I. (4 points)

Etudier la nature des séries numériques suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
2) $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n}$.

Exercice II. (5 points)

1) Etudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$.
2) Etudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-2t}}{t}\,dt$.
3) Déduire la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt$.

Exercice III. (11 points)

Soit $m > 1$. On considère l'équation différentielle en fonction de m suivante :

$$(m-1)y''+y'+y=e^x(x+m). \qquad (E_m)$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

2) Résoudre l'équation différentielle (E_2).

8.1 Solution

Exercice I.

1) On pose $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$, par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0.

D'où la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

2) On pose $u_n = \dfrac{n}{2^n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente d'après la règle de D'Alembert.

Exercice II.

1) On a pour tout $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x e^{-t}\,dt$ existe et est finie, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est convergente d'après le critère de comparaison.

2) On a pour tout $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-2t}\,dt$ est convergente car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x e^{-2t}\,dt$ existe et est finie, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-2t}}{t}\,dt$ est convergente d'après le critère de comparaison.

3) Comme les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-2t}}{t}\,dt$ sont convergentes, alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt$ est convergente.

Exercice III.

1) On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$y' + y = e^x(x+1). \qquad (E_1)$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} y' + y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} &= -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = e^x(x+1)$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = e^x(x+1)$, on trouve que

$$k'(x) = e^{2x}\,(x+1).$$

D'où

$$\begin{aligned} k(x) &= \int e^{2x}\,(x+1)\,dx \\ &= \int \frac{1}{2}\left(e^{2x}\right)'(x+1)\,dx \\ &= \frac{e^{2x}(x+1)}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx \\ &= \frac{e^{2x}(x+1)}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = e^{-x}k(x) = \frac{e^x}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + y = e^x(x+1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + \frac{e^x}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

2) On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y' + y = e^x(x+2). \quad (E_2)$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Comme $\Delta = -3 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$ est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$ avec $m = 1$ et $n = 1$.

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^x\,Q_1(x)$ où Q_1 est un polynôme de degré 1, c'est à dire

$$y_p(x) = e^x\,(ax+b)\,; \quad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax + b$. Alors, $y_p(x) = e^x\,u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$, on trouve

$$3ax + 3a + 3b = x + 2.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

Donc

$$u(x) = \frac{x+1}{3}.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^x\,u(x) = \frac{e^x}{3}(x+1).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x+2)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x/2}\left(C_1\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right) + \frac{e^x}{3}(x+1); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$