UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
TÉTOUAN

EXERCICES CORRIGÉS

ANALYSE II

ARIJ BOUZELMATE

Filières : **SMP/SMC**

Année Universitaire : **2015-2016**

Table des matières

1 Séries Numériques

1.1 Exercices

Exercice 1.1. *Montrer que les deux séries suivantes sont convergentes. Calculer leurs sommes.*

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{8}{3^n}\right)$;

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 1.2. *Soient* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs convergentes.*

Etudier la nature des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{1+u_n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\sqrt{u_n\, v_n}$.

Exercice 1.3. *Etudier la nature des séries suivantes.*

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$;

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$;

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$;

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n^3}$;

6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n)$;

7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$;

8) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{2^n+5}{8^n-11}$.

Exercice 1.4.

1) *Etudier la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}$.

2) *Est-elle absolument convergente ?*

Exercice 1.5. *Soit* $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite réelle positive.*

On pose

$$u_n=\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)};\quad n\geq 1.$$

1) *Montrer que*

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)};\quad \textit{pour tout } n\geq 1.$$

2) *Etablir la convergence de la série* $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 1.6. *Etudier la nature de la série de terme général*

$$u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}; \quad n \in \mathbb{N} \; et \; a > 0.$$

Exercice 1.7. *Soit la série de terme général*

$$u_n = (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right); \quad n \geq 1.$$

1) *Etudier la convergence absolue de la série* $\sum_{n\geq 1} u_n$.

2) *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n\geq 1} u_n$.

1.2 Solutions

Exercice 1.1

$a)$ $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

De même, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$. Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Par suite, la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{8}{3^n}\right)$ est convergente. Sa somme est

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{8}{3^n}\right) = 5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = 22.$$

$b)$ On pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ alors $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Soit T_n la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$. Donc,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} T_n = 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et on a

$$T = \lim_{n\to+\infty} T_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Exercice 1.2

$a)$ Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{1+u_n}$.

Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n\geq 0$, alors $1+u_n\geq 1$ pour tout $n\geq 0$. Par suite,

$$0\leq \frac{u_n}{1+u_n}\leq u_n \quad \text{pour tout}\, n\geq 0.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ est convergente, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{1+u_n}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

$b)$ Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\sqrt{u_n\, v_n}$.

On a

$$0\leq \sqrt{u_n\, v_n}\leq \frac{u_n}{2}+\frac{v_n}{2} \quad \text{pour tout } n\geq 0.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{u_n}{2}+\frac{v_n}{2}\right)$ est aussi une série à termes positifs convergente. Donc, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\sqrt{u_n\, v_n}$ est une série convergente d'après le critère de comparaison.

Exercice 1.3

$1)$ Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad n\geq 1.$

On a pour tout $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2(n!)^2(2n)!}{2(n+1)(2n+1)(2n)!(n!)^2}\\ &= \frac{n+1}{2(2n+1)}=\frac{n+1}{4n+2}.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{4}<1$. Par suite, d'après la règle de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ est convergente.

$2)$ Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}; \quad n\geq 1.$

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-1} = \dfrac{1}{e} < 1$. Par suite, d'après la règle de cauchy, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

3) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\left|\dfrac{3}{5}\right| < 1$), alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

4) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(2n)^4}{(7n^2)^3} = \frac{2^4}{7^3}\,\frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2>1$), alors $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^4}{7^3\,n^2}$ est convergente. Par suite, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

5) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n^3}$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^3}; \quad n \geq 1.$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} n^2\frac{\ln(n)}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Donc, d'après la règle de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

6) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n)$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n);\quad n \geq 1$. Donc

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n).$$

On a pour tout $1 < \alpha < 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n) = 0$. Donc, d'après la règle de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n)$ est convergente. Par suite, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente d'après le critère de comparaison.

7) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$.

C'est une série à termes de signes quelconques.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente (car $\frac{3}{2} > 1$), alors $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right|$ est convergente, c'est à dire $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est convergente.

8) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n + 5}{8^n - 11}$.

Comme $\frac{2^n + 5}{8^n - 11} \geq 0$ pour tout $n \geq 2$, alors $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n + 5}{8^n - 11}$ est une série alternée.

On a pour tout $n \geq 2$,

$$\left|(-1)^n \frac{2^n + 5}{8^n - 11}\right| = \frac{2^n + 5}{8^n - 11}.$$

Donc

$$\left|(-1)^n \frac{2^n + 5}{8^n - 11}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n}{8^n} = \left(\frac{2}{8}\right)^n.$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 2} \left(\frac{2}{8}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\left|\frac{2}{8}\right| < 1$), alors , $\sum\limits_{n\geq 2} \left|(-1)^n \frac{2^n + 5}{8^n - 11}\right|$ est convergente, c'est à dire $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n + 5}{8^n - 11}$ est absolument convergente. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n + 5}{8^n - 11}$ est convergente.

Exercice 1.4

1) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}$.

Comme $\frac{n}{n^2 - 1} \geq 0$, pour tout $n \geq 2$, alors $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}$ est une série alternée.

On pose $u_n = \frac{n}{n^2 - 1}$; $\;, n \geq 2$. Alors, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Montrons que f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

La fonction f est continue et dérivable sur $[2, +\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \quad \text{pour tout } x \geq 2.$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \geq 2$. Par suite, $f(n+1) < f(n)$ pour tout $n \geq 2$ (car $n+1 > n$) ; c'est à dire

$u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geq 2$. D'où, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2-1} = 0$. Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ est convergente.

2) On a

$$\left|(-1)^n \frac{n}{n^2-1}\right| = \frac{n}{n^2-1} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

Donc

$$\left|(-1)^n \frac{n}{n^2-1}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Comme $\sum\limits_n \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors $\sum\limits_n \left|(-1)^n \frac{n}{n^2-1}\right|$ est divergente. Donc, la série $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 1.5

1) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive et

$$u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \quad n \geq 1.$$

Montrons par récurrence

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

On a

$$u_1 = \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{1+a_1-1}{1+a_1} = 1 - \frac{1}{1+a_1}.$$

Supposons que

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

et montrons que

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n+1})}.$$

On a

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n + +u_{n+1} &= 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} + u_{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} + \frac{a_{n+1}}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1})} \\ &= 1 + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\left[-1 + \frac{a_{n+1}}{1+a_{n+1}}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1})}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

2) Soit la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Comme $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $S_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$; c'est à dire la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée.Donc, la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Exercice 1.6

Soit

$$u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}; \quad n \in \mathbb{N} \ et \ a > 0.$$

Donc, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n(1+a)^{n+1}} \frac{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}{a^n} = \frac{a}{(1+a)^{n+1}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente.

Exercice 1.7

Soit la série de terme général $u_n = (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right); \quad n \geq 1.$

1) On a pour tout $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
|u_n| &= \left|(-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right| = \sqrt{n^2+1}-n \quad (\text{car } \sqrt{n^2+1} > n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.
$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ est divergente, alors $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ est divergente ; c'est à dire $\sum_{n\geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.

2) On pose $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$, alors $u_n = (-1)^n a_n$.

Comme $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée.

Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers 0.

On a $a_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$.

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$
f'(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.
$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui entraine que f est décroissante en particulier sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, $f(n) > f(n+1)$ pour tout $n \geq 1$. D'où, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

De plus, d'après la première question $a_n = |u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On déduit d'après le critère spécial des séries alternées que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2 Intégrale Simple

2.1 Exercices

Exercice 2.1. *Calculer les intégrales simples suivantes.*

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx$; 3) $\displaystyle\int_0^{\pi} (2x-1)\cos(3x)\,dx$;

4) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,dx$; 5) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx$; 6) $\displaystyle\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx$.

Exercice 2.2. *Calculer les primitives suivantes.*

1) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,dx$;

2) $\displaystyle\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx$.

Exercice 2.3. *Calculer les intégrales trigonométriques suivantes.*

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$;

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx$;

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$.

Exercice 2.4. *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.*

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente vers 0.

Exercice 2.5. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

On pose pour $x \neq 0$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Montrer que la fonction g admet une limite en 0.

Exercice 2.6. *Déterminer les limites des suites suivantes.*

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$;

2) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

Exercice 2.7. *On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

1) *a) Montrer que* $(u_n)_n$ *est une suite décroissante. En déduire que* $(u_n)_n$ *est une suite convergente.*

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a* $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. *En déduire la limite de la suite* $(u_n)_n$.

2) *Montrer que la suite* $(v_n)_n$ *tend vers* 0.

3) *a) Montrer que* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + \dfrac{1}{n+1} v_n$.

b) En déduire la limite de la suite $(nu_n)_n$ *puis un équivalent de* $(u_n)_n$.

2.2 Solutions

Exercice 2.1

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2x(x^2+1)^{-1/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{1-1/2}}{1-\frac{1}{2}}\right]_0^2 = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^2 = \sqrt{5}-1.$

2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$

3)
$$\begin{aligned}\int_0^\pi (2x-1)\cos(3x)\,dx &= \int_0^\pi (2x-1)\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)'\,dx = \left[(2x-1)\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2}{3}\sin(3x)\,dx = -\frac{2}{3}\left[\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{9}\Big[\cos(3x)\Big]_0^\pi = \frac{-4}{9}.\end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x\,dx &= \int_0^1 (x)'\arctan x\,dx = \Big[x\,\arctan x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

5) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx$.

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{2}\,x$. Alors, $x = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ et $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2}}$. Par suite

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{\sqrt{2}}\Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}.$$

6) On veut calculer $\displaystyle\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx$.

On effectue le changement de variable $t = x^2$. Alors, $x = \sqrt{t}$ et $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$. Par suite

$$\begin{aligned}\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}.\end{aligned}$$

Exercice 2.2

1) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,dx.$

On effectue la décomposition en éléments simples. Pour cela, comme le polynôme x^2+x+1 n'a pas de racines réelles (car $\Delta = -3 < 0$), alors il suffit de faire la division euclidienne de x^3+2x par x^2+x+1. On obtient

$$x^3+2x = (x-1)(x^2+x+1) + 2x + 1.$$

Donc

$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+1} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,dx &= \int (x-1)\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+x+1| + cte.\end{aligned}$$

2) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx.$

On effectue la décomposition en éléments simples. Pour cela, on fait la division euclidienne de $7-2x^3$ par x^3+x^2-2. On obtient

$$7-2x^3 = -2(x^3+x^2-2) + 3 + 2x^2.$$

Donc

$$\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2 + \frac{3+2x^2}{x^3+x^2-2}.$$

Comme 1 est racine de x^3+x^2-2, alors on effectue la division euclidienne de x^3+x^2-2 par $x-1$ et on obtient

$$x^3+x^2-2 = (x-1)(x^2+2x+2).$$

Par suite,

$$\frac{3+2x^2}{x^3+x^2-2} = \frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)}.$$

Sachant que le polynôme x^2+2x+2 n'a pas de racines réelles, on cherche des réels a, b et c tels que

$$\frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}.$$

Un simple calcul donne $a=1,\ b=1$ et $c=-1$, c'est à dire

$$\frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Donc,

$$\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Par suite,

$$\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx = -2x + \ln|x-1| + \int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx.$$

On calcule maintenant $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx$.

On écrit x^2+2x+2 sous la forme canonique $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$.

On fait le changement de variable $x=t-1$, alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{x-1}{(x+1)^2+1}\,dx &= \int \frac{t-2}{t^2+1}\,dt \\
&= \int \frac{t}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 2\arctan t + cte \\
&= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\arctan t + cte \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + cte.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2x + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + cte.$$

Exercice 2.3

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{|\cos x|} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$, (car $\cos x > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).

On effectue le changement de variable $t=\sin x$ alors $x=\arcsin t$ et $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$

Comme $1-t^2=(1-t)(1+t)$, on cherche deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$. Un simple calcul donne $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2(1-t)} + \dfrac{1}{2(1+t)}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1+t} \\
&= \frac{-1}{2}\Big[\ln(1-t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

On déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$.

2) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx$.

On remarque que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2(x))}\,dx$.

On effectue le changement de variable $t = \cos x$, alors $dt = -\sin x\,dx$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

On cherche des réels $a,\ b$ et c tels que

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Un simple calcul donne

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \\
&= \Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt \\
&= \Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\
&= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

3) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$.

On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x\left(1+\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+\tan x}\,dx.$$

On effectue le changement de variable $t = \tan x$, alors $x = \arctan t$ et $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}\, dt.$$

On cherche des réels $a,\ b$ et c tels que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Il est facile de trouver que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{-1}{2(1+t)} + \frac{t+1}{2(1+t^2)}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx &= \frac{-1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{-1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.4

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

Comme f est continue sur $[0,1]$, alors elle est bornée sur $[0,1]$. Donc, il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |u_n| = \left|\int_0^1 x^n f(x)\, dx\right| \leq \int_0^1 |x^n f(x)|\, dx \leq M\int_0^1 x^n\, dx = M\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$; d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2.5

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t),\, dt \qquad x \in \mathbb{R},$$

est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 ; c'est à dire $F(0) = 0$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En particulier F est dérivable en 0 et on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = F'(0) = f(0).$$

Comme $g(x) = \dfrac{F(x)}{x}$, alors $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = f(0)$.

Exercice 2.6

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$.

On a donc une somme de Riemann pour la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et continue sur $[0,1]$.

Par suite, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ est convergente et on a

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n^2\left(4-\frac{k^2}{n^2}\right)}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{4-\frac{k^2}{n^2}}}$.

On a donc une somme de Riemann pour la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ et continue sur $[0,1]$.

Par suite, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ est convergente et on a

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} u_n &= \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \frac{-1}{2}\int_0^1 -2t\left(4-t^2\right)^{-1/2} \\ &= \frac{-1}{2}\left[\frac{\left(4-t^2\right)^{1-1/2}}{1-\frac{1}{2}}\right]_0^1 = -\left[\sqrt{4-t^2}\right]_0^1 = 2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Exercice 2.7

1) *a)* On a $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Comme $\dfrac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq 0$. Par suite, la suite $(u_n)_n$ est décroissante. De plus, comme $\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, par suite elle est convergente.

b) On a $0 \leq u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2) On a $0 \leq v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)}\,\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Donc, $0 \leq v_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

3) $a)$ On a

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + \frac{1}{n+1}v_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$b)$ On a $n\,u_n = \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + v_n\right)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. D'où, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$.

3 Intégrales Généralisées

3.1 Exercices

Exercice 3.1. *Déterminer les intégrales convergentes et calculer leurs valeurs.*

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$; 3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx$;
4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$; 5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$; 6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

Exercice 3.2. *Etudier la nature des intégrales suivantes.*

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$;
3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$; 4) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3+1}$.

Exercice 3.3.

1) *Etudier la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

2) *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\sin x\,dx$ *est absolument convergente.*

Exercice 3.4. *Soit α un réel strictement positif.*

1) *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ *est absolument convergente.*

2) *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$ *est convergente.*

Exercice 3.5. *Soit α un réel strictement positif.*

1) *Etudier la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx$.

2) *Exprimer l'intégrale* $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx$ *en fonction de* $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx$.

Indication : Utiliser le changement de variable $x = \dfrac{\alpha^2}{t}$.

3) *En déduire la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx$.

3.2 Solutions

Exercice 3.1

1) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$.

La fonction $x \to xe^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^t xe^{-x}\,dx &= \int_0^t -\left(e^{-x}\right)' x\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-x}(x)'\,dx \\ &= -te^{-t} + \int_0^t e^{-x}\,dx = -te^{-t} + \left[-e^{-x}\right]_0^t \\ &= -te^{-t} - e^{-t} + 1.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left(-te^{-t} - e^{-t} + 1\right) = 1.$$

D'où, $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1.$

2) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx.$

La fonction $x \to \dfrac{\ln x}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [1, +\infty[$, alors

$$\int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^t (\ln x)' \ln x\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^t = \frac{(\ln t)^2}{2}.$$

Donc,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = +\infty.$$

Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ est divergente.

3) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx.$

La fonction $x \to \dfrac{1}{3^x} = e^{-x\ln 3}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [2, +\infty[$, alors

$$\int_2^t \frac{1}{3^x}\,dx = \int_2^t e^{-x\ln 3}\,dx = \left[\frac{-e^{-x\ln 3}}{\ln 3}\right]_2^t = \frac{-e^{-t\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}.$$

Donc,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{3^x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-e^{-t\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}\right) = \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3} = \frac{1}{9\ln 3}.$$

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx = \frac{1}{9\ln 3}.$

4) Nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$

La fonction $x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, ($\sin x > 0$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$), donc le problème se pose uniquement en 0.

Soit $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, alors

$$\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_t^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)'(\sin x)^{-1/2}\,dx = \Big[2\sqrt{\sin x}\Big]_t^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin t} = 2^{3/4} - 2\sqrt{\sin t}.$$

Donc,

$$\lim_{t\to 0}\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \lim_{t\to 0}\left(2^{3/4} - 2\sqrt{\sin t}\right) = 2^{3/4}.$$

Par suite, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = 2^{3/4}$.

5) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [2, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} &= \int_2^t \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x-1)\Big]_2^t - \frac{1}{2}\Big[\ln(x+1)\Big]_2^t \\ &= \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{\ln 3}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}\right] = \frac{\ln 3}{2}.$$

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ est convergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}$.

6) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ est continue sur $[0, 1[$ donc le problème se pose uniquement en 1.

Soit $t \in [0, 1[$. On fait le changement de variable $x = \sin u$, alors $dx = \cos u\,du$ et $u = \arcsin x$. On a donc,

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx &= \int_0^{\arcsin t} \frac{\sin u\,\cos u}{(\cos^2 u)^{3/2}}\,du = \int_0^{\arcsin t} \sin u\,\cos^{-2}(u)\,du = \int_0^{\arcsin t} -(\cos u)'\cos^{-2}(u)\,du \\ &= \left[\frac{1}{\cos u}\right]_0^{\arcsin t} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)} - 1.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{\cos(\arcsin t)} - 1\right) = +\infty.$$

D'où, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$ est divergente.

Exercice 3.2

1) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ (car $\cos x \leq |\cos x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

On a

$$0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{|1-\cos x|}{x^2} \leq \frac{1+|\cos x|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ est convergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ est convergente d'après le critère de comparaison.

2) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$.

La fonction $x \to \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. En particulier, elle est continue sur $[0,1]$. Donc, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est une intégrale simple.

D'autre part, on a

$$\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{5x^3} = \frac{2}{5x^2}.$$

Donc

$$\sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,|x|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,x} \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est une intégrale de Riemann divergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,x}\,dx$ est divergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

On déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est divergente.

3) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\ln x}{x^2}$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$.

Soit $1 < \alpha < 2$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2}\ln x = 0$. Donc, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ est convergente.

4) Nature de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3+1}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^3+1}$ est continue sur $]-1,0]$.

Comme

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

alors, $\lim_{x\to -1^+}(x+1)f(x) = \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}$. Par suite, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3+1}$ est divergente.

Exercice 3.3

1) Nature de $\int_0^1 \ln x\, dx$.

La fonction $x \to \ln x$ est continue sur $]0,1]$, donc le problème se pose uniquement en 0.

Soit $t \in]0,1]$, alors

$$\begin{aligned}\int_t^1 \ln x\, dx = \int_t^1 (x)' \ln x\, dx &= \Big[x\ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 x\,\frac{1}{x}\,dx\\ &= -t\ln t - \Big[x\Big]_t^1 = -t\ln t - 1 + t.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t - 1 + t) = -1.$$

Par suite, $\int_0^1 \ln x\, dx$ est convergente et $\int_0^1 \ln x\, dx = -1$.

2) Montrons que $\int_0^1 \ln x \sin x\, dx$ est absolument convergente.

En utilisant le fait que $|\sin x| \le 1$ et $\ln x \le 0$; pour tout $x \in]0,1]$, on a

$$0 \le |\ln x \sin x| \le |\ln x| = -\ln x; \quad \text{pour tout } x \in]0,1].$$

Comme $\int_0^1 \ln x\, dx$ est convergente, alors $\int_0^1 -\ln x\, dx$ est convergente. Par suite, d'après le critère de comparaison, $\int_0^1 |\ln x \sin x|\, dx$ est convergente, ce qui veut dire que $\int_0^1 \ln x \sin x\, dx$ est absolument convergente.

Exercice 3.4

1) Montrons que $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\, dx$ est absolument convergente.

On a

$$0 \le \left|\frac{sinx}{x^{\alpha+1}}\right| \le \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad \text{pour tout } x \ge 1.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\alpha+1 > 1$), alors $\int_1^{+\infty} \left|\frac{sinx}{x^{\alpha+1}}\right| dx$ est convergente, ce qui veut dire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\, dx$ est absolument convergente.

2) Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\, dx$ est convergente.

Soit $t \in [1, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx &= \int_1^t \frac{(\sin x)'}{x^\alpha}\, dx \\ &= \left[\frac{\sin x}{x^\alpha}\right]_1^t + \alpha \int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\, dx \\ &= \frac{\sin t}{t^\alpha} - \sin 1 + \alpha \int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\, dx. \end{aligned}$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\, dx$ est absolument convergente, alors elle est convergente et par suite $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\, dx$ existe et est finie.

On a aussi $\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} = 0$ car $0 \leq \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ et $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha} = 0$.

Il résulte que $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx$ existe et est finie ; c'est à dire, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx$ est convergente.

Exercice 3.5

1) Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx\,; \quad \alpha > 0.$

La fonction $x \to \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc le problème se pose en 0 et en $+\infty$.

Etudions la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx$.

Comme $\frac{-\ln x}{\alpha^2 + x^2} \geq 0$ pour tout $x \in]0, 1]$, $\frac{-\ln x}{\alpha^2 + x^2} \underset{0}{\sim} \frac{-\ln x}{\alpha^2}$ et $\int_0^1 \frac{-\ln x}{\alpha^2}\, dx$ est convergente (car $\int_0^1 lnx, dx$ est convergente d'après l'exercice 3.3, alors $\int_0^1 \frac{-\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

Par conséquent, $\int_0^1 \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx$ est convergente.

D'autre part, on a $\frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2} \geq 0$ pour tout $x \geq 1$ et $\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2} = 0$. Donc, d'après le critère de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx$ est convergente.

Les deux intégrales $\int_0^1 \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx$ sont convergentes pour tout $\alpha > 0$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx$ est convergente pour tout $\alpha > 0$.

2) On effectue le changement de variable $x = \dfrac{\alpha^2}{t}$, alors $dx = \dfrac{-\alpha^2}{t^2}\, dt$ et on a

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx = \int_\alpha^0 \frac{\ln(\alpha^2) - \ln t}{\alpha^2 + \dfrac{\alpha^4}{t^2}} \times \frac{-\alpha^2}{t^2}\, dt = \int_0^\alpha \frac{\ln(\alpha^2) - \ln t}{\alpha^2 + t^2}\, dt$$
$$= 2\int_0^\alpha \frac{\ln \alpha}{\alpha^2 + t^2}\, dt - \int_0^\alpha \frac{\ln t}{\alpha^2 + t^2}\, dt.$$

On remarque que

$$\int_0^\alpha \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \int_0^\alpha \frac{dt}{\alpha^2 \left(1 + \left(\dfrac{t}{\alpha}\right)^2\right)}.$$

Donc, en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{t}{\alpha}$, on obtient

$$\int_0^\alpha \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{\alpha}\Big[\arctan u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4\alpha}.$$

Donc

$$2\int_0^\alpha \frac{\ln \alpha}{\alpha^2 + t^2}\, dt = 2\ln\alpha \int_0^\alpha \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{\pi \ln \alpha}{2\alpha}.$$

Par suite,

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha} - \int_0^\alpha \frac{\ln t}{\alpha^2 + t^2}\, dt = \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha} - \int_0^\alpha \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx.$$

3) On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx = \int_0^\alpha \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx + \int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx$$
$$= \int_0^\alpha \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx + \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha} - \int_0^\alpha \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx.$$

On déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha} \qquad \text{pour tout } \alpha > 0.$$

4 Equations Différentielles du Premier Ordre

4.1 Exercices

Exercice 4.1. *Résoudre les équations différentielles suivantes.*

1) $\left(x^2+1\right)\, y' + x\, y = 0;$ 2) $x\, y' = y\left(1+\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right);$
3) $y' + y = e^x + \sin x;$ 4) $(x+1)\, y' - y = \ln x.$
5) $y' = \dfrac{x^2}{y};$ 6) $2x^2\, y' - y^2 - xy = 0.$

Exercice 4.2.

1) *Calculer* $\displaystyle\int e^x (x-1)\, dx.$

On considère la fonction g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = (x-2)e^x$.

2) *Montrer que* $f(x) = e^{-x} g(x)$ *est solution de l'équation différentielle*

$$y' + y = x - 1; \qquad (E)$$

3) *Montrer que la solution générale* y *de l'équation* (E) *s'écrit sous la forme*

$$y(x) = ke^{-x} + f(x), \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

4) *Déterminer la solution de l'équation* (E) *pour laquelle l'image de* 1 *est* 0.

Exercice 4.3.

1) *Résoudre l'équation différentielle suivante.*

$$y' = 2y + 8; \qquad (E_1)$$

Soit f *une solution de l'équation* (E_1).

2) $a)$ *Montrer que la fonction* g *définie par* $g(x) = x f(x)$ *est solution de l'équation différentielle suivante.*

$$x\, y' - (2x+1)\, y = 8x^2; \qquad (E_2)$$

$b)$ *Déduire toutes les solutions de l'équation* (E_2).

3) *Déterminer la solution* h *de l'équation* (E_2) *dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point* $A(\ln 2, 0)$.

Exercice 4.4. *Résoudre les équations de Bernoulli suivantes.*

1) $x\,y' + y = y^2\ \ln x.$

2) $\sqrt{x}\,y' = y + (2\sqrt{x} - x)\,\sqrt{y}.$

Exercice 4.5. *Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ telle que*

$$x \int_0^x f(t)\,dt = \frac{3}{2} \int_0^x t f(t)\,dt, \qquad \textit{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

1) *Montrer que*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \textit{si } x > 0, \\ 0 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

2) *Montrer que f est solution de l'équation*

$$x\,y' - y = 0; \qquad (E)$$

3) *Déduire l'expression de f en fonction de x.*

4.2 Solutions

Exercice 4.1

1) $\left(x^2+1\right)\, y' + x\,y = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-x}{x^2+1}\, y.$

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{x^2+1}\, y \Rightarrow \frac{dy}{y} &= \frac{-x}{x^2+1}\, dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{-1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = \frac{-1}{2} \ln(x^2+1) + cte = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{-\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)} e^{cte} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} \frac{1}{e^{\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)}} \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) $x\,y' = y\left(1+\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) \Rightarrow y' = \frac{y}{x}\left(1+\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = t(1+\ln t)$.

On pose $u = \frac{y}{x}$ alors $y = u\,x$ et $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} + u = f(u) = u(1+\ln u) &\Rightarrow x\frac{du}{dx} = u(1+\ln u) - u = u\ln u \\
&\Rightarrow \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \ln|x| = \int \frac{du}{u\ln u} + cte = \int \frac{d(\ln u)}{\ln u} + cte = \ln(|\ln u|) + cte \\
&\Rightarrow |x| = e^{\ln(|\ln u|)}e^{cte} = e^{cte}|\ln u| \\
&\Rightarrow \ln u = Cx; \quad C\in\mathbb{R} \Rightarrow u = e^{Cx}; \quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$y = ux = xe^{Cx}; \quad C\in\mathbb{R}.$$

3) $y' + y = e^x + \sin x$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k\in\mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $y' + y = e^x + \sin x$ est de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = e^x + \sin x$, on trouve que

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= e^{-x} \int (e^x + \sin x)e^x \, dx \\
&= e^{-x} \int e^{2x} \, dx + e^{-x} \int \sin x \, e^x \, dx \\
&= e^{-x} \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) + e^{-x} \int \sin x \, e^x \, dx \\
&= \frac{e^x}{2} + e^{-x} \int \sin x \, e^x \, dx
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int \sin x \, e^x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
&= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x \, dx \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \\
&= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx
\end{aligned}$$

Donc

$$2 \int \sin x \, e^x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) \, .$$

Ce qui implique

$$\int \sin x \, e^x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) \, .$$

Il résulte que

$$y_p(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{\sin x - \cos x}{2}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y' + y = e^x + \sin x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + \frac{e^x}{2} + \frac{\sin x - \cos x}{2}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

4) $(x+1)\, y' - y = \ln x.$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $(x+1)\,y' - y = 0$.

On a

$$
\begin{aligned}
(x+1)\,y' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1} \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1} \\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + cte = \ln(x+1) + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}(x+1) \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}(x+1).
\end{aligned}
$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $(x+1)\,y' - y = 0$ est

$$y_h(x) = k(x+1); \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$ est de la forme

$$y_p(x) = k(x)(x+1).$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$, on trouve que

$$y_p(x) = (x+1)\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx.$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx = -\int \left((x+1)^{-1}\right)' \ln x\,dx &= \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx \\
&= \frac{-\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\,dx \\
&= \frac{-\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) = \frac{-\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).
\end{aligned}
$$

Donc

$$y_p(x) = (x+1)\left(\frac{-\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = -\ln x + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Par suite, la solution générale de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k(x+1) - \ln x + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

5) $y' = \dfrac{x^2}{y}$.

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned}
y' = \frac{x^2}{y} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}\\
&\Rightarrow y\,dy = x^2\,dx\\
&\Rightarrow \int y\,dy = \int x^2\,dx\\
&\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + \lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 2\lambda = \frac{2}{3}x^3 + \mu; \quad \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc, pour $x \geq \left(\dfrac{-3}{2}\mu\right)^{1/3} = a$, on a

$$|y(x)| = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + \mu}; \quad x \in [a, +\infty[.$$

D'où

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + \mu}; \quad x \in [a, +\infty[.$$

6) $2x^2\,y' - y^2 - xy = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{y^2}{2x^2} + \dfrac{xy}{2x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x}\right)$.

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = \dfrac{1}{2}\left(t^2 + t\right)$.

On pose $u = \dfrac{y}{x}$ alors $y = u\,x$ et $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} + u = f(u) = \frac{1}{2}\left(u^2 + u\right) &\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left(u^2 + u\right) - u = \frac{1}{2}\left(u^2 - u\right)\\
&\Rightarrow \frac{2du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow 2\int \frac{du}{u(u-1)} = \int \frac{dx}{x}\\
&\Rightarrow 2\int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1}\right) du = \int \frac{dx}{x}\\
&\Rightarrow \ln|x| = 2\Big(\ln|u-1| - \ln|u|\Big) + \lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow \ln|x| = 2\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + \lambda = \ln\left(\frac{u-1}{u}\right)^2 + \lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow |x| = e^{\lambda}\left(\frac{u-1}{u}\right)^2 = C\left(\frac{u-1}{u}\right)^2; \quad C \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow x = \pm C\left(\frac{u-1}{u}\right)^2 = K\left(\frac{u-1}{u}\right)^2; \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$y = x\,u = K\left(\frac{u-1}{u}\right)^2 u = K\frac{(u-1)^2}{u}; \quad K \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.2

1) $\int e^x(x-1)\,dx$ est une primitive de la fonction $e^x(x-1)$. On a

$$\begin{aligned}\int e^x(x-1)\,dx &= \int (e^x)'(x-1)\,dx = e^x(x-1) - \int e^x\,dx \\ &= e^x(x-1) - e^x + C = e^x(x-2) + C; \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2) Soit $g(x) = (x-2)e^x; \quad x \in \mathbb{R}$. La fonction g est primitive de la fonction $e^x(x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x) = e^{-x}g(x) = x-2$. Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f' + f = 1 + x - 2 = x - 1$. Par suite, f est solution de l'équation $y' + y = x - 1$.

3) On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

$$\begin{aligned} y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $y' + y = e^x + \sin x$ est de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = x - 1$, on trouve que

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x} \int (x-1)e^x \, dx = e^{-x} g(x) \qquad \text{(car } g \text{ est primitive de } e^x(x-1)\text{)} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y' + y = x - 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + f(x); \quad k \in \mathbb{R}.$$

$4)$ Soit y la solution de (E) telle que $y(1) = 0$. On a

$$y(1) = 0 \Rightarrow ke^{-1} + 1 - 2 = 0 \Rightarrow ke^{-1} = 1 \Rightarrow k = e.$$

Donc, $y(x) = e^{1-x} + f(x) = e^{1-x} + x - 2$ est solution de (E) telle que $y(1) = 0$.

Exercice 4.3

$1)$ $y' = 2y + 8 \Rightarrow y' - 2y = 8$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - 2y = 0$.

$$\begin{aligned} y' - 2y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = 2x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{2x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{2x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = Ce^{2x}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $y' - 2y = 8$ est de la forme

$$y_p(x) = C(x)e^{2x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' - 2y = 8$, on trouve que

$$y_p(x) = e^{2x} \int 8e^{-2x}\, dx = 8e^{2x} \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right) = -4.$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' - 2y = 8$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{2x} - 4; \quad C \in \mathbb{R}.$$

2) $a)$ Soit $g(x) = xf(x)$ avec f solution de l'équation (E_1). On a

$$\begin{aligned} x\,g' - (2x+1)\,g &= x(f + xf') - (2x+1)\,xf \\ &= xf + x^2 f' - 2x^2 f - xf \\ &= x^2(f' - 2f) = 8x^2 \quad \text{(car } f \text{ est solution de } (E_1)). \end{aligned}$$

Donc, la fonction g est solution de l'équation (E_2).

$b)$ Utilisant le fait que $f(x) = Ce^{2x} - 4;\ \ C \in \mathbb{R}$ est solution générale de l'équation (E_1), alors les solutions de l'équation (E_2) sont de la forme

$$g(x) = xf(x) = x\Big(Ce^{2x} - 4\Big); \quad C \in \mathbb{R}.$$

3) Soit h solution de l'équation (E_2). Alors, $h(x) = x\Big(Ce^{2x} - 4\Big)$.

Comme $A(\ln 2, 0) \in C_h$, alors $h(\ln 2) = 0$, c'est à dire, $\ln 2\Big(Ce^{2\ln 2} - 4\Big) = 0$. Par suite, $C = 1$.

Il résulte que $h(x) = x\Big(e^{2x} - 4\Big)$.

Exercice 4.4

1) On veut résoudre l'équation de Bernoulli $x\,y' + y = y^2\, \ln x$.

On a $y = 0$ est solution de l'équation de Bernoulli.

On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. On a

$$\begin{aligned} x\,y' + y = y^2\, \ln x &\Rightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2 \\ &\Rightarrow y'y^{-2} + \frac{1}{x}yy^{-2} = \frac{\ln x}{x} \\ &\Rightarrow -\left(y^{-1}\right)' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x} \\ &\Rightarrow \left(y^{-1}\right)' - \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{-\ln x}{x}. \end{aligned}$$

On pose $u = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$ alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$u' - \frac{1}{x}u = \frac{-\ln x}{x}.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $u' - \dfrac{1}{x}u = 0$.

$$\begin{aligned}
u' - \frac{1}{x}u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}u \\
&\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \ln|u| = \ln|x| + cte = \ln x + cte \\
&\Rightarrow |u| = e^{cte}x \\
&\Rightarrow u = \pm e^{cte}x.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $u' - \dfrac{1}{x}u = 0$ est

$$u_h(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $u' - \dfrac{1}{x}u = \dfrac{-\ln x}{x}$ est de la forme

$$u_p(x) = k(x)x.$$

On calcule u_p' et on remplace dans l'équation $u' - \dfrac{1}{x}u = \dfrac{-\ln x}{x}$, on trouve que

$$u_p(x) = -x \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\int \left(x^{-1}\right)' \ln x\,dx &= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Donc

$$u_p(x) = -x\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = \ln x + 1.$$

Par suite, la solution générale de l'équation $u' - \frac{1}{x}u = \frac{-\ln x}{x}$ est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx + \ln x + 1; \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation de Bernoulli est

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{kx + \ln x + 1}; \qquad k \in \mathbb{R}.$$

2) $\sqrt{x}\, y' = y + (2\sqrt{x} - x)\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x}\, y' - y = (2\sqrt{x} - x)\sqrt{y}$.

C'est une équation de Bernoulli.

On a $y = 0$ est solution de l'équation de Bernoulli.

On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}\, y' - y = \left(2\sqrt{x} - x\right)\sqrt{y} &\Rightarrow y' - \frac{1}{\sqrt{x}}y = \left(2 - \sqrt{x}\right)\sqrt{y} \\
&\Rightarrow y'y^{-1/2} - \frac{1}{\sqrt{x}}yy^{-1/2} = 2 - \sqrt{x} \\
&\Rightarrow 2\left(y^{1/2}\right)' - \frac{1}{\sqrt{x}}y^{1/2} = 2 - \sqrt{x} \\
&\Rightarrow \left(y^{1/2}\right)' - \frac{1}{2\sqrt{x}}y^{1/2} = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}
\end{aligned}$$

On pose $u = y^{1/2} = \sqrt{y}$ alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$u' - \frac{1}{2\sqrt{x}}u = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $u' - \frac{1}{2\sqrt{x}}u = 0$.

$$\begin{aligned}
u' - \frac{1}{2\sqrt{x}}u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}u \\
&\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\
&\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\
&\Rightarrow \ln|u| = \sqrt{x} + cte \\
&\Rightarrow |u| = e^{cte}e^{\sqrt{x}} \\
&\Rightarrow u = \pm e^{cte}e^{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $u' - \frac{1}{2\sqrt{x}}u = 0$ est

$$u_h(x) = ke^{\sqrt{x}}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $u' - \frac{1}{2\sqrt{x}}u = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$ est de la forme

$$u_p(x) = k(x)e^{\sqrt{x}}.$$

On calcule u_p' et on remplace dans l'équation $u' - \frac{1}{x}u = \frac{-\ln x}{x}$, on trouve que

$$u_p(x) = e^{\sqrt{x}} \int \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) e^{-\sqrt{x}}\, dx.$$

D'autre part, pour calculer $\int \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) e^{-\sqrt{x}}\, dx,$ on effectue le changement de variable $X = \sqrt{x}$ et alors $x = X^2$ et $dx = 2X\, dX$.

$$\begin{aligned}
\int \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) e^{-\sqrt{x}}\, dx &= \int \left(1 - \frac{X}{2}\right) e^{-X} 2X\, dX \\
&= 2\int Xe^{-X}\, dX - \int X^2 e^{-X}\, dX \\
&= 2\int Xe^{-X}\, dX + \int X^2 \left(e^{-X}\right)'\, dX \\
&= 2\int Xe^{-X}\, dX + \left[X^2 e^{-X}\right] - 2\int Xe^{-X}\, dX \\
&= X^2 e^{-X} = xe^{-\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$u_p(x) = e^{\sqrt{x}}\, xe^{-\sqrt{x}} = x.$$

Par suite, la solution générale de l'équation $u' - \frac{1}{2\sqrt{x}}u = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$ est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = ke^{\sqrt{x}} + x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation de Bernoulli est

$$y(x) = u^2(x) = \left(ke^{\sqrt{x}} + x\right)^2; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.5

1) On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x tf(t)\, dt.$$

Alors,

$$xF(x) = \frac{3}{2}G(x).$$

Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, alors les deux fonctions F et G sont dérivables sur $[0, +\infty[$ de dérivées

respectives $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = xf(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} xF(x) = \frac{3}{2}G(x) &\Rightarrow (xF(x))' = \frac{3}{2}G'(x) \\ &\Rightarrow F(x) + xF'(x) = \frac{3}{2}G'(x) \\ &\Rightarrow F(x) + xf(x) = \frac{3}{2}xf(x) \\ &\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}xf(x) - xf(x) \\ &\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}xf(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) = 2\dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

D'autre part, comme f est continue en 0, $F(0) = 0$, F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0)$, alors

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 2F'(0) = 2f(0).$$

Par suite, $f(0) = 0$.

2) On a pour tout $x \in [0, +\infty[$, $xf(x) = 2F(x)$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} xf(x) = 2F(x) &\Rightarrow (xf(x))' = 2F'(x) \\ &\Rightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x) \\ &\Rightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc, f est solution de l'équation $x\,y' - y = 0$.

3) L'équation $x\,y' - y = 0$ est linéaire sans second membre.

On a

$$\begin{aligned} x\,y' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}|x| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}|x|. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation $x\,y' - y = 0$ est

$$y(x) = k|x|; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il résulte que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = k|x| = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$

5 Equations Différentielles Linéaires du Second Ordre à Coefficients Constants

5.1 Exercices

Exercice 5.1. *Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes.*

1) $y'' + 2y' = 0.$

2) $y'' + 9y = 0.$

3) $y'' + 2y' + y = 2.$

4) $y'' + y' + y = x^2 + x + 1.$

5) $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}.$

6) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big).$

Exercice 5.2. *On se propose de résoudre l'équation différentielle du second ordre*

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \qquad x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[; \qquad (E)$$

1) *Donner la solution générale de l'équation sans second membre*

$$y'' + y = 0; \qquad (E_h)$$

2) *Donner une solution particulière de l'équation (E) en utilisant la méthode de variation des constantes.*

3) *Déduire la solution générale de l'équation (E).*

Exercice 5.3. *Trouver les fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient*

$$\int_0^x f(t)\,dt = x + g(x) \quad \textit{et} \quad \int_0^x g(t)\,dt = x + f(x) - 1.$$

5.2 Solutions

Exercice 5.1

1) $y'' + 2y' = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda = 0$.

Elle admet deux racines réelles $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -2$.

Donc, la solution générale est

$$y(x) = C_1\, e^0 + C_2\, e^{-2x} = C_1 + C_2\, e^{-2x}; \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) $y'' + 9y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 9 = 0$.

Elle admet deux racines complexes conjuguées, $\lambda_1 = 3i$ et $\lambda_2 = -3i$.

Donc, la solution générale est

$$y(x) = e^0\Big(C_1\, \cos(3x) + C_2\, \sin(3x)\Big) = \Big(C_1\, \cos(3x) + C_2\, \sin(3x)\Big); \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3) $y'' + 2y' + y = 2$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

Elle admet une racine réelle double $\lambda = -1$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\Big(C_1\, x + C_2\Big); \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme 2 est une solution constante évidente de l'équation $y'' + 2y' + y = 2$, alors la solution générale de cette équation est

$$y(x) = y_h(x) + 2 = e^{-x}\Big(C_1\, x + C_2\Big) + 2; \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4) $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Comme $\Delta = -3 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$ est un polynôme de degré 2 et on a $1 \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire $y_p(x) = ax^2 + bx + c; \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$, on trouve

$$ax^2 + (2a + b)x + 2a + b + c = x^2 + x + 1.$$

On obtient par identification $a = 1,\ b = -1$ et $c = 0$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = x^2 - x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x^2 - x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5) $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' - 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

Comme $\Delta = 9 > 0$, alors elle admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$ est de la forme $e^{mx}\, P_n(x)$ avec $m = -2$ et $n = 2$.

comme -2 est racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{-2x}\, x\, Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{-2x}\, x\left(ax^2 + bx + c\right) == e^{-2x}\left(ax^3 + bx^2 + cx\right); \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Alors, $y_p(x) = e^{-2x}\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$, on trouve

$$-9ax^2 + (6a - 6b)x + 2b - 3c = x^2.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{-1}{9}$, $b = \dfrac{-1}{9}$ et $c = \dfrac{-2}{27}$.

Donc

$$u(x) = \frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-2x}\, u(x) = e^{-2x}\left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^{x} + +C_2\, e^{-2x} + e^{-2x}\left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = C_1\, e^{x} + e^{-2x}\left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + C_2\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

6) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 5y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

Comme $\Delta = -16 < 0$, alors elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = -1 + 2i$ et $\lambda_2 = -1 - 2i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\Big(C_1\, \cos(2x) + C_2\, \sin(2x)\Big); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$ est de la forme $e^{mx}\Big(2\cos(\omega x) - 3\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = -1$ et $\omega = 2$.

comme $-1+2i$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = xe^{-x}\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On pose $z(x) = x\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big)$. Alors, $y_p(x) = e^{-x}\, z(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$, on trouve

$$\Big(4B - 2\Big)\cos(2x) + \Big(3 - 4A\Big)\sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = \dfrac{3}{4}$ et $B = \dfrac{1}{2}$.

Donc

$$z(x) = x\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par suite , la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-x}\, z(x) = xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\Big(C_1\ \cos(2x) + C_2\ \sin(2x)\Big) + xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = e^{-x}\left[\left(\frac{3}{4}x + C_1\right)\cos(2x) + \left(\frac{x}{2} + C_2\right)\sin(2x)\right]; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.2

1) On veut résoudre l'équation sans second membre $y'' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 1 = 0$.

Elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

Donc, la solution générale de l'équation $y'' + y = 0$, est

$$y_h(x) = k_1\ \cos x + k_2\ \sin x; \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Comme les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = C_1(x)\ \cos x + C_2(x)\ \sin x.$$

On impose de plus la condition suivante

$$C_1'(x)\ \cos x + C_2'(x)\ \sin x = 0.$$

Ce qui donne

$$y_p'(x) = -C_1(x)\ \sin x + C_2(x)\ \cos x.$$

On calcule ensuite y_p'' , on remplace dans l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ et on utilise le fait que $\cos x$ et $\sin x$ sont deux solutions de l'équation sans second membre $y'' + y = 0.$ On trouve

$$-C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

Il faut donc résoudre le système suivant

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Les deux solutions du système sont

$$C_1'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x\Big(\cos^2 x + \sin^2 x\Big)} = \frac{-\sin x}{\cos x},$$

et

$$C_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

Donc,

$$C_1(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = \ln(\cos x)\,; \qquad \left(\cos x > 0,\ \forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

et

$$C_2(x) = \int dx = x.$$

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \ln(\cos x)\cos x + x\sin x.$$

3) La solution générale de l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k_1\ \cos x + k_2\ \sin x + \ln(\cos x)\cos x + x\sin x; \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Par suite,

$$y(x) = \Big(\ln(\cos x) + k_1 \Big) \cos x + (x + k_2) \sin x; \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.3

On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x g(t)\, dt.$$

Alors

$$F(x) = x + g(x) \quad \text{et} \quad G(x) = x + f(x) - 1.$$

Par suite

$$f(x) = G(x) - x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = F(x) - x.$$

De plus, comme $F(0) = G(0) = 0$, alors $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$.

Comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, alors les deux fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et par suite les deux fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f(x) = F'(x) = 1 + g'(x)$$

et

$$g(x) = G'(x) = 1 + f'(x).$$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors g' est dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire g'' existe sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = g''(x).$$

Donc

$$g(x) = 1 + g''(x).$$

On déduit que la fonction g est solution de l'équation différentielle

$$y'' - y = -1 \quad avec \quad y(0) = 0.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' - y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 1 = 0$.

Elle admet deux racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

Donc, la solution générale de l'équation $y'' - y = 0$ est

$$y(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-x}; \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme le second membre de l'équation $y'' - y = -1$ est une constante, alors la solution particulière de l'équation complète est aussi constante, c'est à dire, elle est de la forme $y_p(x) = a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation complète, on trouve que $y_p(x) = a = 1$.

Donc, la solution générale de l'équation $y'' - y = -1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-x} + 1; \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Il résulte que

$$g(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-x} + 1 \quad avec \quad g(0) = 0,$$

et par suite

$$f(x) = 1 + g'(x) = C_1\, e^x - C_2\, e^{-x} + 1 \quad avec \quad f(0) = 1.$$

Ce qui donne en calculant $f(0)$ et $g(0)$,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ C_1 - C_2 = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{-1}{2}, \\ C_2 = \dfrac{-1}{2}. \end{cases}$$

Par conséquent

$$f(x) = 1 - \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = 1 - \sinh x,$$

et

$$g(x) = 1 - \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = 1 - \cosh x.$$