UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
TÉTOUAN

EXERCICES CORRIGÉS

ANALYSE II

ARIJ BOUZELMATE

Filières : **SMP/SMC**

Année Universitaire : **2017-2018**

Table des matières

1 Séries Numériques

1.1 Exercices

Exercice 1.1. *Montrer que les séries suivantes sont convergentes. Calculer leurs sommes.*

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^{n-2}}$;

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$;

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{6^n} + (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right)$;

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$;

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Exercice 1.2. *Soient* $(u_n)_n$ *une suite réelle positive et* $(v_n)_n$ *la suite définie par*

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont de même nature.*

Exercice 1.3. *Soient* $(u_n)_n$ *une suite réelle strictement positive et strictement croissante et* $(v_n)_n$ *la suite définie par*

$$v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que si la suite $(u_n)_n$ *converge alors la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge aussi.*

Exercice 1.4. *On pose*

$$u_n = \frac{2^n}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)}; \qquad n \geq 1.$$

1) *Montrer que*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)}; \qquad \textit{pour tout } n \geq 1.$$

2) *Etudier la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 1.5. *Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. Soit u_n une suite réelle telle que $\left(\frac{a}{b}\right)^n u_n$ soit bornée.*

1) *Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a^n |u_n|$ est convergente.*

2) *Déduire que la série $\sum_{n\geq 0} n^\alpha r^n$ est convergente pour tous $0 < r < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

3) *En prenant $\alpha = 1$ dans la question 2, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$.*

Exercice 1.6. *Etudier la nature de la série de terme général*

$$u_n = \frac{(\ln 2)^n}{(1+\ln 2)(1+\ln 2)^2 \cdots (1+\ln 2)^n}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 1.7. *Etudier la nature des séries suivantes*

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\ln n)^n}$; 2) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$;

4) $\sum_{n\geq 1} (3+(-1)^n)^{-n}$; 5) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$; 6) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

7) $\sum_{n\geq 1} x^{\ln n}$, $x > 0$; 8) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$; 9) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$;

10) $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$; 11) $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^a}$, $a > 0$; 12) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.8.

1) *Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$.*

2) *Est-elle absolument convergente ?*

1.2 Solutions

Exercice 1.1

1) On a $\frac{2^n}{3^{n-2}} = 9\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^{n-2}}$ est une série géométrique convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}} = 9\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 9 \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 27.$$

2) On a $(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n$. Comme $\left|\frac{-1}{4}\right| < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ est une série géométrique convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{-1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

3) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{6^n}$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{1}{6}\right| < 1$. Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$.

On a $(-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{-1}{9}\right)^n$. Comme $\left|\frac{-1}{9}\right| < 1$, alors $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$ est une série géométrique convergente. Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{9}{10}$.

Par suite, la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{6^n} + (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right)$ est convergente. Sa somme est

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{6^n} + (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{6}{5} + \frac{9}{10} = \frac{21}{10}.$$

4) On pose $u_n = \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors, en utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient

$$u_n = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose $v_n = \frac{1}{3n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n = v_n - v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et dans ce cas, on dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série télescopique.

Soit S_n la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. Donc,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = v_0 = 1$. Donc la série télescopique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série convergente et sa somme

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = 1.$$

5) On pose $u_n = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors, en utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose $v_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n = v_n - v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et dans ce cas, on dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série télescopique.

Soit S_n la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. Donc,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = v_0 = 1$. Donc la série télescopique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série convergente et sa somme

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1.$$

Exercice 1.2

On a $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $v_n \in [0,1[$ et $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite

$$u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $u_n \not\longrightarrow 0$, alors $v_n \not\longrightarrow 0$ et les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ divergent.
Si $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et donc les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature d'après le critère d'équivalence.

Il résulte que dans les deux cas, les deux séries sont de même nature.

Exercice 1.3

Soit $(u_n)_n$ une suite strictement positive, strictement croissante et convergente vers l. Alors nécessairement $l > 0$. Donc

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_{n+1} - u_n}{l}.$$

La série à termes positifs $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ est convergente car

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_0) = l - u_0,$$

et donc, $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n) = l - u_0$.
Il résulte que $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

Exercice 1.4

1) Montrons par récurrence que

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

On a

$$u_1 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{1+2}.$$

Supposons que

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)}$$

et montrons que

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1} = 1 - \frac{1}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^{n+1})}.$$

On a

$$\begin{aligned}
u_1 + u_2 + \cdots + u_n + +u_{n+1} &= 1 - \frac{1}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)} + u_{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)} + \frac{2^{n+1}}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)(1+2^{n+1})} \\
&= 1 + \frac{1}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)}\left[-1 + \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)(1+2^{n+1})}.
\end{aligned}$$

Donc

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

2) Soit la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Comme $2^n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $S_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$; c'est à dire la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée.Donc, la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Exercice 1.5

1) Comme $\left(\frac{a}{b}\right)^n u_n$ est bornée, alors il existe une constante $M > 0$ telle que

$$0 \leq a^n |u_n| \leq Mb^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\sum_{n\geq 0} Mb^n$ est une série géométrique convergente car $0 < b < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} a^n |u_n|$ est une série convergente d'après le critère de comparaison.

2) Soit $0 < r < 1$, alors il existe un réel b tel que $0 < r < b < 1$, c'est à dire que $0 < \dfrac{r}{b} < 1$. D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\dfrac{r}{b}\right)^n = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Par suite, en prenant $u_n = n^\alpha$ dans la question 1, on trouve que $\sum\limits_{n\geq 0} n^\alpha r^n$ est convergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) On sait d'après la question 2 que $\sum\limits_{n\geq 0} nr^n$ est convergente (pour $\alpha = 1$). Donc, sa somme partielle S_n est convergente vers S.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} kr^k = \sum_{k=1}^{n} kr^k = r\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = r\sum_{k=1}^{n}\big((k-1)r^{k-1} + r^{k-1}\big)\\
&= r\sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-1} + r\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = r\sum_{k=0}^{n-1} kr^k + r\frac{1-r^n}{1-r}\\
&= rS_{n-1} + r\frac{1-r^n}{1-r}.
\end{aligned}$$

Donc

$$S_n - rS_{n-1} = r\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ (car $0 < r < 1$), alors en faisant tendre $n \to +\infty$ dans la dernière égalité, on obtient

$$(1-r)S = \frac{r}{1-r}.$$

D'où,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Exercice 1.6

Soit

$$u_n = \frac{(\ln 2)^n}{(1+\ln 2)(1+\ln 2)^2\cdots(1+\ln 2)^n}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Donc, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(1+\ln 2)(1+\ln 2)^2\cdots(1+\ln 2)^n(1+\ln 2)^{n+1}}\,\frac{(1+\ln 2)(1+\ln 2)^2\cdots(1+\ln 2)^n}{(\ln 2)^n} = \frac{\ln 2}{(1+\ln 2)^{n+1}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente.

Exercice 1.7

1) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \left(\frac{1}{(\ln n)^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{\ln n}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$. Par suite, d'après la règle de cauchy, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\ln n)^n}$ est convergente.

2) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{pour } n \text{ grand.}$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente (car $\frac{1}{2} < 1$), alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est divergente d'après le critère de comparaison.

3) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$n^2 e^{-(\ln n)^2} = e^{2\ln n - (\ln n)^2} = e^{\ln n(2-\ln n)}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-(\ln n)^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n(2-\ln n)} = 0$, alors d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$ est convergente.

4) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} (3 + (-1)^n)^{-n}$.

C'est une série à termes positifs.

Comme $(-1)^n \geq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors en particulier pour tout $n \geq 1$, on a

$$(3 + (-1)^n)^{-n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1}(3+(-1)^n)^{-n}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

5) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$.

C'est une série à termes positifs.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, alors

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} e\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Par la suite, utilisant le fait que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, on voit que la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$ est aussi convergente d'après le critère d'équivalence.

6) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

On pose $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$.

Comme $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée.

Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers 0.

On pose $a_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$.

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui entraine que f est décroissante en particulier sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, $f(n) > f(n+1)$ pour tout $n \geq 1$. D'où, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

De plus, on a

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On déduit d'après le critère spécial des séries alternées que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

7) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} x^{\ln n},\ \ x>0.$

C'est une série à termes positifs.

On a pour tout $n \geq 1$

$$x^{\ln n}=e^{\ln n\ \ln x}=n^{\ln x}=\frac{1}{n^{-\ln x}}.$$

Donc, la série $\sum_{n\geq 1} x^{\ln n}$ est série de Riemann convergente si $0<x<e^{-1}$ (c'est à dire $-\ln x>1$) et est divergente si $x \geq e^{-1}$ (c'est à dire $-\ln x \leq 1$).

8) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}.$

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\ \ ;\quad n\geq 1.$

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt[n]{u_n}=(u_n)^{1/n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$. Par suite, d'après la règle de cauchy, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

9) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}.$

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{3^n}{5^n}=\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Comme $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\left|\frac{3}{5}\right|<1$), alors la série $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

10) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}.$

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}\underset{+\infty}{\sim}\frac{(2n)^4}{(7n^2)^3}=\frac{2^4}{7^3}\,\frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2>1$), alors $\sum_{n\geq 1}\frac{2^4}{7^3\,n^2}$ est convergente. Par suite, $\sum_{n\geq 1}\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

11) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^a}$, $a > 0$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n = \frac{a^n}{n^a}$; $n \geq 1$.

On a pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^a$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$. Par suite, d'après la règle de d'Alembert, si $0 < a < 1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et si $a > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Si $a = 1$, alors $u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série de Riemann divergente.

12) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

C'est une série à termes positifs à partir d'un certain rang.

On pose $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$; $n \geq 1$.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{-x\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$, alors, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-x}$. Par suite, d'après la règle de cauchy, si $x > 0$ (c'est à dire $e^{-x} < 1$), la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et si $x < 0$ (c'est à dire $e^{-x} > 1$), la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Si $x = 0$, alors $u_n = 1$. Donc, u_n ne converge pas vers 0. D'où, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Exercice 1.8

1) Nature de la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$.

Comme $\frac{n}{n^2-1} \geq 0$, pour tout $n \geq 2$, alors $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ est une série alternée.

On pose $u_n = \frac{n}{n^2-1}$; $, n \geq 2$. Alors, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

Montrons que f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

La fonction f est continue et dérivable sur $[2, +\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \quad \text{pour tout } x \geq 2.$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \geq 2$. Par suite, $f(n+1) < f(n)$ pour tout $n \geq 2$ (car $n+1 > n$) ; c'est à dire $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geq 2$. D'où, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2-1} = 0$. Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n \dfrac{n}{n^2-1}$ est convergente.

2) On a

$$\left|(-1)^n \frac{n}{n^2-1}\right| = \frac{n}{n^2-1} \qquad \text{pour tout } n \geq 2.$$

Donc

$$\left|(-1)^n \frac{n}{n^2-1}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Comme $\sum\limits_{n} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors $\sum\limits_{n} \left|(-1)^n \dfrac{n}{n^2-1}\right|$ est divergente. Donc, la série $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n \dfrac{n}{n^2-1}$ n'est pas absolument convergente.

2 Intégrale Simple

2.1 Exercices

Exercice 2.1. *Calculer les intégrales simples suivantes.*

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx;$	2) $\displaystyle\int_2^{4} \frac{3}{2x\,(\ln x)^2}\,dx;$
3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx;$	4) $\displaystyle\int_0^{1} x\arctan x\,dx;$
5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx;$	6) $\displaystyle\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx;$
7) $\displaystyle\int_0^{\pi} (2x-1)\cos(3x)\,dx;$	8) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx.$

Exercice 2.2. *On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad \textit{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

1) *a) Montrer que $(u_n)_n$ est une suite décroissante. En déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente.*

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

2) *Montrer que la suite $(v_n)_n$ tend vers 0.*

3) a) *Montrer que* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + \dfrac{1}{n+1} v_n.$

b) *En déduire la limite de la suite* $(nu_n)_n$ *puis un équivalent de* $(u_n)_n$.

Exercice 2.3. *Calculer les primitives suivantes.*

1) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx\,;$

2) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx\,;$

3) $\displaystyle\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx.$

4) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{\left(x^2+2x+5\right)^2}\,dx.$

Exercice 2.4. *Calculer les intégrales trigonométriques suivantes.*

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ *puis* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx\,;$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}\,;$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx\,;$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx.$

2.2 Solutions

Exercice 2.1

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$

2) $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{2x\left(\ln x\right)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int_2^4 (\ln x)'\,(\ln x)^{-2}\,\,dx = \frac{-3}{2}\left[\frac{1}{\ln x}\right]_2^4 = \frac{3}{4\ln 2}.$

3) On a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

4) Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,dx$, on fait une intégration par parties. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arctan x\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctan x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big[\arctan x\Big]_0^1 dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5) Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$, on effectue le changement de variable $t = e^x$. Alors, $x = \ln t$ et $dx = \dfrac{dt}{t}$.

Par suite

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx &= \int_1^e \frac{t}{\sqrt{t+1}}\frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t+1}}\\ &= \Big[2\sqrt{t+1}\Big]_1^e = 2(\sqrt{e+1}-\sqrt{2}).\end{aligned}$$

6) Pour calculer $\displaystyle\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx$, on effectue le changement de variable $t = x^2$. Alors, $x = \sqrt{t}$ et $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.

Par suite

$$\begin{aligned}\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}\\ &= \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}.\end{aligned}$$

7) Pour calculer $\displaystyle\int_0^\pi (2x-1)\cos(3x)\,dx$, on fait une intégration par parties. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (2x-1)\cos(3x)\,dx &= \int_0^\pi (2x-1)\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)' dx = \left[(2x-1)\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2}{3}\sin(3x)\,dx\\ &= -\frac{2}{3}\left[\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{9}\Big[\cos(3x)\Big]_0^\pi = \frac{-4}{9}.\end{aligned}$$

8) Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx$, on effectue le changement de variable $t = \sqrt{2}\,x$. Alors, $x = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ et $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2}}$. Par suite

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{\sqrt{2}}\Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Exercice 2.2

1) $a)$ On a $\displaystyle u_{n+1}-u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

Comme $\dfrac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} \le 0$ pour tout $x\in[0,1]$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \le 0$. Par suite, la suite $(u_n)_n$ est décroissante. De plus, comme $\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \ge 0$ pour tout $x\in[0,1]$, alors $u_n \ge 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a donc, la suite

$(u_n)_n$ est décroissante et minorée, par suite elle est convergente.

$b)$ On a $0 \leq u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) On a $0 \leq v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)}\,\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

Donc, $0 \leq v_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3) $a)$ On a

$$\begin{aligned} u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx. \end{aligned}$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + \frac{1}{n+1} v_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$b)$ On a $n\,u_n = \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + v_n\right)$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D'où, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$.

Exercice 2.3

1) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx$.

On effectue la décompostion en éléments simples. Sachant que le polynôme x^2-3x-4 admet deux racines réelles, on cherche deux réels a et b tels que

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}.$$

Un simple calcul donne $a = \dfrac{-1}{5}$ et $b = \dfrac{6}{5}$. Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx &= \frac{-1}{5}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{6}{5}\int \frac{dx}{x-4} \\ &= \frac{-1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + cte. \end{aligned}$$

2) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$.

Le polynôme x^2+x+1 n'a pas de racines réelles (car $\Delta < 0$).

On écrit x^2+x+1 sous la forme canonique $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

On fait le changement de variable $x = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t$, alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\, dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}t}{2}}{1+t^2}\, dt \\
&= \int \frac{t}{1+t^2}\, dt - \sqrt{3} \int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt - \sqrt{3} \int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \sqrt{3} \arctan t + cte \\
&= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + cte \\
&= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + cte \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + cte.
\end{aligned}$$

3) On veut calculer $\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\, dx$.

On effectue la décomposition en éléments simples. Pour cela, on fait la division euclidienne de $7-2x^3$ par x^3+x^2-2. On obtient

$$7-2x^3 = -2(x^3+x^2-2) + 3 + 2x^2.$$

Donc

$$\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2 + \frac{3+2x^2}{x^3+x^2-2}.$$

Comme 1 est racine de x^3+x^2-2, alors on effectue la division euclidienne de x^3+x^2-2 par $x-1$ et on obtient

$$x^3+x^2-2 = (x-1)(x^2+2x+2).$$

Par suite,

$$\frac{3+2x^2}{x^3+x^2-2} = \frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)}.$$

Sachant que le polynôme x^2+2x+2 n'a pas de racines réelles, on cherche des réels $a,\ b$ et c tels que

$$\frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}.$$

Un simple calcul donne $a=1,\ b=1$ et $c=-1$, c'est à dire

$$\frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Donc,

$$\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Par suite,

$$\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx = -2x + \ln|x-1| + \int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx.$$

On calcule maintenant $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx.$

On écrit x^2+2x+2 sous la forme canonique $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$.

On fait le changement de variable $x=t-1$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{x-1}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{t-2}{t^2+1}\,dt\\ &= \int \frac{t}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 2\arctan t + cte\\ &= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\arctan t + cte\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + cte.\end{aligned}$$

On déduit que

$$\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2x + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + cte.$$

4) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+5)^2}\,dx.$

Le polynôme x^2+2x+5 n'a pas de racines réelles (car $\Delta=-16<0$).

On écrit x^2+2x+5 sous la forme canonique $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$.

On fait le changement de variable $x=2t-1$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+5)^2}\,dx &= \int \frac{3x+4}{((x+1)^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{6t+1}{(t^2+1)^2}\,dt\\ &= \frac{3}{8}\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}\\ &= \frac{-3}{8(t^2+1)} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} + cte.\end{aligned}$$

Maintenant, pour calculer $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$, on calcule $\int \frac{dt}{t^2+1}$ en utilisant une intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t^2+1} &= \int \frac{1}{t^2+1}(t)'\,dt = \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt - 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + cte.$$

On remplace t par $\frac{x+1}{2}$, on obtient

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = \frac{x-11}{8(x^2+2x+5)} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + cte.$$

Exercice 2.4

1) (i) On veut calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$.

On effectue le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors $x = 2\arctan t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{2}{t^2+2t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{2}{(t+1)^2}\,dt \\ &= \left[\frac{-2}{t+1}\right]_0^1 = 1.\end{aligned}$$

(ii) Calculons maintenant $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{(d'après } (i)\text{)}.$$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{|\cos x|} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$, (car $\cos x > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).

On effectue le changement de variable $t = \sin x$ alors $x = \arcsin t$ et $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$

Comme $1-t^2=(1-t)(1+t)$, on cherche deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{1-t^2}=\dfrac{a}{1-t}+\dfrac{b}{1+t}$. Un simple calcul donne $\dfrac{1}{1-t^2}=\dfrac{1}{2(1-t)}+\dfrac{1}{2(1+t)}$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{1-t^2}&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{1+t}\\&=\frac{-1}{2}\Big[\ln(1-t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

On déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$.

3) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx$.

On remarque que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2(x))}\,dx$.

On effectue le changement de variable $t=\cos x$, alors $dt=-\sin x\,dx$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{t(1+t^2)}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

On cherche des réels $a,\ b$ et c tels que

$$\frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Un simple calcul donne

$$\frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx&=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{dt}{t}-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{t}{1+t^2}\,dt\\&=\Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1-\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{2t}{1+t^2}\,dt\\&=\Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1-\frac{1}{2}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\\&=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

4) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$.

On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x\left(1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}\right)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1 + \tan x}\, dx.$$

On effectue le changement de variable $t = \tan x$, alors $x = \arctan t$ et $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}\, dt.$$

On cherche des réels $a,\ b$ et c tels que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Il est facile de trouver que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{-1}{2(1+t)} + \frac{t+1}{2(1+t^2)}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx &= \frac{-1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{-1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.
\end{aligned}$$

3 Intégrales Généralisées

3.1 Exercices

Exercice 3.1. *Déterminer les intégrales convergentes et calculer leurs valeurs.*

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$; 3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\, dx$;

4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\, dx$; 5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$; 6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$.

Exercice 3.2. *Etudier la nature des intégrales suivantes.*

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$; 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$; 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\, dx$;

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\, dx$; 5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$; 6) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3+1}$.

Exercice 3.3. *Soit α un réel strictement positif.*

1) *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ *est absolument convergente.*

2) *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$ *est convergente.*

Exercice 3.4. *Soit α un réel strictement positif.*

1) *Etudier la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx.$

2) *Exprimer l'intégrale* $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx$ *en fonction de* $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx.$

Indication : Utiliser le changement de variable $x = \dfrac{\alpha^2}{t}$.

3) *En déduire la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx.$

3.2 Solutions

Exercice 3.1

1) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[0,1[$, donc le problème se pose uniquement en 1.

Soit $t \in [0,1[$, alors

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^t = -2\sqrt{1-t}+2.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$. Par suite, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ est convergente et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$

2) Nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$

La fonction $x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ est continue sur $\Big]0,\dfrac{\pi}{4}\Big]$, donc le problème se pose uniquement en 0.

Soit $t \in \Big]0,\dfrac{\pi}{4}\Big]$, alors

$$\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \Big[2\sqrt{\sin x}\Big]_t^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin t} = 2^{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{\sin t}.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = 2^{\frac{3}{4}}$. Par suite, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = 2^{\frac{3}{4}}.$

3) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx.$

La fonction $x \to \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [0, +\infty[$, alors

$$\int_0^t \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \left[e^{\arctan x}\right]_0^t = e^{\arctan t} - 1.$$

Donc, $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$. Par suite, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$.

4) Nature de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx$.

La fonction $x \to \frac{1}{3^x}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [2, +\infty[$, alors

$$\int_2^t \frac{1}{3^x}\,dx = \int_2^t e^{-x\ln 3}\,dx = \left[\frac{-e^{-x\ln 3}}{\ln 3}\right]_2^t = \frac{-e^{-t\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}.$$

Donc,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{1}{3^x}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{-e^{-t\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}\right) = \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3} = \frac{1}{9\ln 3}.$$

Par suite, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx$ est convergente et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx = \frac{1}{9\ln 3}$.

5) Nature de $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$.

La fonction $x \to \frac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [2, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} &= \int_2^t \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x-1)\Big]_2^t - \frac{1}{2}\Big[\ln(x+1)\Big]_2^t \\ &= \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{\ln 3}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}\right] = \frac{\ln 3}{2}.$$

Par suite, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ est convergente et $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}$.

6) Nature de $\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

La fonction $x \to \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ est continue sur $[0, 1[$ donc le problème se pose uniquement en 1.

Soit $t \in [0,1[$. On fait le changement de variable $x = \sin u$, alors $dx = \cos u \, du$ et $u = \arcsin x$. On a donc,

$$\int_0^t \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx = \int_0^{\arcsin t} \frac{\sin u \, \cos u}{(\cos^2 u)^{3/2}}\, du = \int_0^{\arcsin t} \sin u \, \cos^{-2}(u)\, du = \int_0^{\arcsin t} -(\cos u)' \cos^{-2}(u)\, du$$
$$= \left[\frac{1}{\cos u}\right]_0^{\arcsin t} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)} - 1.$$

Par suite,

$$\lim_{t\to 1} \int_0^t \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx = \lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{\cos(\arcsin t)} - 1\right) = +\infty.$$

D'où, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$ est divergente.

Exercice 3.2

1) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$.

On a pour tout $x \in]0,1]$,

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\frac{1}{2} < 1$), alors $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|$ est convergente d'après le critère de comparaison, d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$ est absolument convergente et par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$ est convergente.

2) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ (car $\cos x \leq |\cos x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

On a pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{|1-\cos x|}{x^2} \leq \frac{1+|\cos x|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $2 > 1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$ est convergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$ est convergente d'après le critère de comparaison.

3) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{1+\ln x}{x+2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. On a

$$\frac{1+\ln x}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}$ est divergente car

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = +\infty.$$

D'où, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\, dx$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

4) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\, dx$.

La fonction $x \to \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. En particulier, elle est continue sur $[0,1]$. Donc, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\, dx$ est une intégrale simple.

D'autre part, on a

$$\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{5x^3} = \frac{2}{5x^2}.$$

Donc

$$\sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,|x|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,x} \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est une intégrale de Riemann divergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,x}\, dx$ est divergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\, dx$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

On déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\, dx$ est divergente.

5) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\ln x}{x^2}$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$.

Soit $1<\alpha<2$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2}\ln x = 0$. Donc, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ est convergente.

6) Nature de $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3+1}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^3+1}$ est continue sur $]-1,0]$.

Comme

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

alors, $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} (x+1)f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}$. Par suite, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3+1}$ est divergente.

Exercice 3.3

1) Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ est absolument convergente.

On a pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq \left|\frac{sinx}{x^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{x^{\alpha+1}}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\alpha+1 > 1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{sinx}{x^{\alpha+1}}\right| dx$ est convergente d'après le critère de comparaison. Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ est absolument convergente.

2) Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$ est convergente.

Soit $t \in [1, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx &= \int_1^t \frac{(\sin x)'}{x^\alpha}\,dx \\
&= \left[\frac{\sin x}{x^\alpha}\right]_1^t + \alpha \int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx \\
&= \frac{\sin t}{t^\alpha} - \sin 1 + \alpha \int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx.
\end{aligned}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ est absolument convergente, alors elle est convergente et par suite $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ existe et est finie.

On a aussi $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} = 0$ car $0 \leq \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha} = 0$.

Il résulte que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ existe et est finie ; c'est à dire, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ est convergente.

Exercice 3.4

1) Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\,dx$; $\quad \alpha > 0$.

La fonction $x \to \dfrac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc le problème se pose en 0 et en $+\infty$.

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\,dx$.

Comme $\dfrac{-\ln x}{\alpha^2 + x^2} \geq 0$ pour tout $x \in]0, 1]$, $\dfrac{-\ln x}{\alpha^2 + x^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\ln x}{\alpha^2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{\alpha^2}\,dx$ est convergente (car $\displaystyle\int_0^1 lnx\,dx$ est convergente et même $\displaystyle\int_0^1 lnx\,dx = -1$), alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{\alpha^2 + x^2}\,dx$ est convergente d'après le critère d'équivalence. Par conséquent, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\,dx$ est convergente.

D'autre part, on a $\dfrac{\ln x}{\alpha^2 + x^2} \geq 0$ pour tout $x \geq 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2} = 0$. Donc, d'après le critère de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2 + x^2}\,dx$ est convergente.

Les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx$ sont convergentes pour tout $\alpha>0$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx$ est convergente pour tout $\alpha>0$.

2) On effectue le changement de variable $x=\dfrac{\alpha^2}{t}$, alors $dx=\dfrac{-\alpha^2}{t^2}\,dt$ et on a

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx &= \int_\alpha^0 \frac{\ln(\alpha^2)-\ln t}{\alpha^2+\dfrac{\alpha^4}{t^2}} \times \frac{-\alpha^2}{t^2}\,dt = \int_0^\alpha \frac{\ln(\alpha^2)-\ln t}{\alpha^2+t^2}\,dt\\ &= 2\int_0^\alpha \frac{\ln\alpha}{\alpha^2+t^2}\,dt - \int_0^\alpha \frac{\ln t}{\alpha^2+t^2}\,dt.\end{aligned}$$

On remarque que

$$\int_0^\alpha \frac{dt}{\alpha^2+t^2} = \int_0^\alpha \frac{dt}{\alpha^2\left(1+\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)^2\right)}.$$

Donc, en effectuant le changement de variable $u=\dfrac{t}{\alpha}$, on obtient

$$\int_0^\alpha \frac{dt}{\alpha^2+t^2} = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\alpha}\Big[\arctan u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4\alpha}.$$

Donc

$$2\int_0^\alpha \frac{\ln\alpha}{\alpha^2+t^2}\,dt = 2\ln\alpha\int_0^\alpha \frac{dt}{\alpha^2+t^2} = \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha}.$$

Par suite,

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx = \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha} - \int_0^\alpha \frac{\ln t}{\alpha^2+t^2}\,dt = \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha} - \int_0^\alpha \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx.$$

3) On a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx &= \int_0^\alpha \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx + \int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx\\ &= \int_0^\alpha \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx + \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha} - \int_0^\alpha \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

On déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}\,dx = \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha} \qquad \text{pour tout } \alpha>0.$$

4 Equations Différentielles du Premier Ordre

4.1 Exercices

Exercice 4.1. *Résoudre les équations différentielles suivantes.*

1) $(x-1)y' - 2y = 0$;

2) $y' = (1-y)(2-y)$;

3) $xy' = x + y$;

4) $2xyy' = y^2 - x^2$;

5) $2x^2\, y' + y = 1$;

6) $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$;

7) $y' \sin x - y \cos x = x$;

8) $(x+1)\, y' - y = \ln x$.

Exercice 4.2.

1) *Calculer* $\displaystyle\int e^x (x-1)\, dx$.

On considère la fonction g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = (x-2)e^x$.

2) *Montrer que* $f(x) = e^{-x} g(x)$ *est solution de l'équation différentielle*

$$y' + y = x - 1; \qquad (E)$$

3) *Montrer que la solution générale* y *de l'équation* (E) *s'écrit sous la forme*

$$y(x) = ke^{-x} + f(x), \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

4) *Déterminer la solution de l'équation* (E) *pour laquelle l'image de* 1 *est* 0.

Exercice 4.3. *Soit* f *une fonction continue sur* $[0, +\infty[$ *telle que*

$$x \int_0^x f(t)\, dt = \frac{3}{2} \int_0^x t f(t)\, dt, \qquad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

1) *Montrer que*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & si\ \ x > 0, \\ 0 & si\ \ x = 0. \end{cases}$$

2) *Montrer que f est solution de l'équation*

$$x\,y' - y = 0; \qquad (E)$$

3) *Donner l'expression de f en fonction de x.*

Exercice 4.4. *Déterminer toutes les solutions de l'équation de Bernoulli suivante en précisant leurs domaines de définition.*

$$x\,y' + y = xy^3.$$

4.2 Solutions

Exercice 4.1

1) $(x-1)y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x-1}$.

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-1} &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x-1} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x-1} \\ &\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x-1| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{2\ln|x-1|}e^{cte} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}(x-1)^2 \\ &\Rightarrow y = C(x-1)^2; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) $y' = (1-y)(2-y)$.

C'est une équation à variables séparées (plus exactement elle est autonome).

On a

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = (1-y)(2-y) &\Rightarrow \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = \int dx \\
&\Rightarrow \int \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y} \right) dy = \int dx \\
&\Rightarrow -\ln|1-y| + \ln|2-y| = x + cte \Rightarrow \ln\left|\frac{2-y}{1-y}\right| = x + cte \\
&\Rightarrow \left|\frac{2-y}{1-y}\right| = e^x\, e^{cte} \Rightarrow \frac{2-y}{1-y} = \pm e^{cte} e^x \\
&\Rightarrow \frac{2-y}{1-y} = Ce^x; \quad C \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow y = \frac{Ce^x - 2}{Ce^x - 1}; \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3) $xy' = x + y \Rightarrow y' = 1 + \frac{y}{x}$.

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = 1 + t$.

On pose $u = \frac{y}{x}$ alors $y = u\,x$ et $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} + u = f(u) = 1 + u &\Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \int du = \int \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow u = \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$y = ux = x\left(\ln|x| + C\right); \quad C \in \mathbb{R}.$$

4) $2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - 1\right)\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = \frac{1}{2}(t-1)(1+\frac{1}{t}) = \frac{t^2-1}{2t}$.

On pose $u = \dfrac{y}{x}$ alors $y = u\,x$ et $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} + u = f(u) = \frac{u^2-1}{2u} &\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2-1}{2u} - u = \frac{-u^2-1}{2u}\\
&\Rightarrow \frac{-2u}{u^2+1}\,du = \frac{dx}{x}\\
&\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2u}{u^2+1}\,du\\
&\Rightarrow \ln|x| = -\ln(u^2+1) + cte\\
&\Rightarrow |x| = e^{cte}e^{-\ln(u^2+1)} = \frac{e^{cte}}{u^2+1}\\
&\Rightarrow x = \frac{C}{u^2+1}; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$y = x\,u = \frac{Cu}{u^2+1}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant u par $\dfrac{y}{x}$, on obtient

$$y^2 + x^2 - Cx = 0; \quad C \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$y = \sqrt{Cx - x^2}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

5) $2x^2\,y' + y = 1.$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $2x^2\,y' + y = 0.$

On a

$$\begin{aligned}
2x^2\,y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x^2}\\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}\\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2}\\
&\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2x} + cte\\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{\frac{1}{2x}}\\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{\frac{1}{2x}}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $2x^2\,y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{\frac{1}{2x}}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $2x^2\,y' + y = 1$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{\frac{1}{2x}}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $2x^2\,y' + y = 1$, on trouve que

$$y_p(x) = e^{\frac{1}{2x}} \int \frac{e^{\frac{-1}{2x}}}{2x^2}\,dx = e^{\frac{1}{2x}}\,e^{\frac{-1}{2x}} = 1.$$

Donc, la solution générale de l'équation $2x^2\,y' + y = 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{\frac{1}{2x}} + 1; \quad k \in \mathbb{R}.$$

6) $y' + x^2\,y = 3e^{-x^3/3}$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + x^2\,y = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
y' + x^2\,y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -x^2\,y \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2\,dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x^2\,dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = \frac{-x^3}{3} + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x^3/3} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x^3/3}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + x^2\,y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x^3/3}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + x^2\,y = 3e^{-x^3/3}$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x^3/3}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$, on trouve que $k'(x) = 3$, d'où $k(x) = 3x$.

Donc,

$$y_p(x) = 3xe^{-x^3/3}.$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x^3/3} + 3xe^{-x^3/3} = (3x+k)e^{-x^3/3}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

7) $y' \sin x - y \cos x = x$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' \sin x - y \cos x = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
y' \sin x - y \cos x = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{\sin x} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln(|\sin x|) + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{\ln(|\sin x|)} = e^{cte} |\sin x| \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte} \sin x.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' \sin x - y \cos x = 0$ est

$$y_h(x) = k \sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' \sin x - y \cos x = x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x) \sin x.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' \sin x - y \cos x = x$, on trouve que

$$y_p(x) = \sin x \int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = \int x\left(\frac{-1}{\tan x}\right)'\,dx &= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}\,dx\\ &= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx\\ &= \frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|).\end{aligned}$$

Il résulte que

$$y_p(x) = \sin x\left(\frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|)\right) = -x\cos x + \sin x\ln(|\sin x|).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'\sin x - y\cos x = x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k\sin x - x\cos x + \sin x\ln(|\sin x|) = -x\cos x + \Big(k + \ln(|\sin x|)\Big)\sin x;\quad k\in\mathbb{R}.$$

8) $(x+1)\,y' - y = \ln x.$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $(x+1)\,y' - y = 0.$

On a

$$\begin{aligned}(x+1)\,y' - y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x+1}\\ \Rightarrow \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x+1}\\ \Rightarrow \int\frac{dy}{y} &= \int\frac{dx}{x+1}\\ \Rightarrow \ln|y| &= \ln|x+1| + cte\\ \Rightarrow |y| &= e^{cte}|x+1|\\ \Rightarrow y &= \pm e^{cte}(x+1).\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $(x+1)\,y' - y = 0$ est

$$y_h(x) = k(x+1);\quad k\in\mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)(x+1).$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$, on trouve que

$$y_p(x) = (x+1)\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx &= -\int \left((x+1)^{-1}\right)' \ln x\,dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx \\
&= \frac{-\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\,dx \\
&= \frac{-\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) = \frac{-\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = (x+1)\left(\frac{-\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = -\ln x + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Par suite, la solution générale de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k(x+1) - \ln x + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.2

1) $\displaystyle\int e^x(x-1)\,dx$ est une primitive de la fonction $e^x(x-1)$. On a

$$\begin{aligned}
\int e^x(x-1)\,dx &= \int (e^x)'(x-1)\,dx = e^x(x-1) - \int e^x\,dx \\
&= e^x(x-1) - e^x + C = e^x(x-2) + C; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2) Soit $g(x) = (x-2)e^x; \quad x \in \mathbb{R}$. La fonction g est une primitive de la fonction $e^x(x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x) = e^{-x}g(x) = x-2$. Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f' + f = 1 + x - 2 = x - 1$. Par suite, f est solution de l'équation $y' + y = x - 1$.

3) On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

$$\begin{aligned} y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = x - 1$ est de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = x - 1$, on trouve que

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x}\int e^{x}(x-1)\,dx = e^{-x}g(x) \qquad (\text{car } g \text{ est primitive de } e^{x}(x-1)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y' + y = x - 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + f(x); \quad k \in \mathbb{R}.$$

4) Soit y la solution de (E) telle que $y(1) = 0$. On a

$$y(1) = 0 \Rightarrow ke^{-1} + 1 - 2 = 0 \Rightarrow ke^{-1} = 1 \Rightarrow k = e.$$

Donc, $y(x) = e^{1-x} + f(x) = e^{1-x} + x - 2$ est solution de (E) telle que $y(1) = 0$.

Exercice 4.3

1) On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x tf(t)\,dt.$$

Alors,

$$xF(x) = \frac{3}{2}G(x).$$

Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, alors les deux fonctions F et G sont dérivables sur $[0, +\infty[$ de dérivées respectives $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = xf(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} xF(x) = \frac{3}{2}G(x) &\Rightarrow (xF(x))' = \frac{3}{2}G'(x) \\ &\Rightarrow F(x) + xF'(x) = \frac{3}{2}G'(x) \\ &\Rightarrow F(x) + xf(x) = \frac{3}{2}xf(x) \\ &\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}xf(x) - xf(x) \\ &\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}xf(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) = 2\dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

D'autre part, comme f est continue en 0, $F(0) = 0$, F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0)$, alors

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 2F'(0) = 2f(0).$$

Par suite, $f(0) = 0$.

2) On a pour tout $x \in [0, +\infty[$, $xf(x) = 2F(x)$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} xf(x) = 2F(x) &\Rightarrow (xf(x))' = 2F'(x) \\ &\Rightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x) \\ &\Rightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc, f est solution de l'équation $x\,y' - y = 0$.

3) L'équation $x\,y' - y = 0$ est linéaire sans second membre.

On a

$$\begin{aligned} x\,y' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}|x| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} x. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation $x\,y' - y = 0$ est

$$y(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il résulte que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.4

On veut résoudre l'équation de Bernoulli $x\,y' + y = xy^3$.

On a $y = 0$ est solution de l'équation de Bernoulli.

On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. On a

$$\begin{aligned} x\,y' + y = xy^3 &\Rightarrow x\,y' y^{-3} + y\,y^{-3} = x \\ &\Rightarrow \frac{-x}{2}\left(\frac{1}{y^2}\right)' + \frac{1}{y^2} = x. \end{aligned}$$

On pose $u = \dfrac{1}{y^2}$ alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$\frac{-x}{2}u' + u = x.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $\frac{-x}{2}u' + u = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{-x}{2}u' + u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{2u}{x} \\
&\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2}{x}\,dx \\
&\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{2}{x}\,dx \\
&\Rightarrow \ln|u| = 2\ln|x| + cte \\
&\Rightarrow |u| = e^{cte}e^{2\ln|x|} = e^{cte}x^2 \\
&\Rightarrow u = \pm e^{cte}x^2.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $\frac{-x}{2}u' + u = 0$ est

$$u_h(x) = kx^2; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $\frac{-x}{2}u' + u = x$ de la forme

$$u_p(x) = k(x)x^2.$$

On calcule u_p' et on remplace dans l'équation $\frac{-x}{2}u' + u = x$, on trouve que

$$u_p(x) = x^2 \int \frac{-2}{x^2}\,dx = x^2\,\frac{2}{x} = 2x$$

Par suite, la solution générale de l'équation $\frac{-x}{2}u' + u = x$ est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx^2 + 2x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, pour $k \in \mathbb{R}$, on considère l'intervalle réel I_k défini par

$$I_k = \begin{cases}]0, +\infty[& \text{si } k = 0, \\ \left]0, \frac{-2}{k}\right[& \text{si } k < 0. \\ \left]-\infty, \frac{-2}{k}\right[\cup]0, +\infty[& \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Comme $u = \frac{1}{y^2} = kx^2 + 2x$ et $kx^2 + 2x > 0$ pour tout $x \in I_k$, alors les solutions de l'équation de Bernoulli sont de la forme

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{-1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{pour tout } x \in I_k.$$

5 Equations Différentielles Linéaires du Second Ordre à Coefficients Constants

5.1 Exercices

Exercice 5.1. *Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes.*

1) $y'' + 2y' = 4$;

2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$;

3) $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$;

4) $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$

5) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$.

6) $y'' + y = \cos 2x$;

7) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$;

8) $y'' - y' - 2y = \cos x + 3\sin x$.

5.2 Solutions

Exercice 5.1

1) $y'' + 2y' = 4$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda = 0$.

Elle admet deux racines réelles $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -2$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^0 + C_2\, e^{-2x} = C_1 + C_2\, e^{-2x}; \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation complète $y''+2y' = 4$ est une constante (c'est à dire un polynôme de degré 0) et on a $2 \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax$; $a \in \mathbb{R}$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' = 4$, on trouve que $a = 2$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = 2x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' = 4$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2\, e^{-2x} + 2x; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4.$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' - 2y = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$

Elle admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2.$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x}; \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ est un polynôme de degré 2 et on a $-2 \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire $y_p(x) = ax^2 + bx + c; \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}.$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$, on trouve

$$-2ax^2 + 2(a - b)x + 2a + b - 2c = 2x^2 - 2x + 4.$$

On obtient par identification $a = -1,\ b = 0$ et $c = -3.$

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = -(x^2 + 3).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x} - (x^2 + 3); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3) $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 6y' + 9y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$.

Comme $\Delta = 0$, alors elle admet une racine réelle double $\lambda = -3$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-3x}\Big(C_1 x + C_2\Big); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$ est de la forme $e^{mx}\, P_n(x)$ avec $m = 2$ et $n = 2$.

Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{2x}\, Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{2x}\left(ax^2 + bx + c\right); \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax^2 + bx + c$. Alors, $y_p(x) = e^{2x}\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$, on trouve

$$25ax^2 + (20a + 25b)x + 2a + 10b + 25c = x^2.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{1}{25}$, $b = \dfrac{-4}{125}$ et $c = \dfrac{6}{625}$.

Donc

$$u(x) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{125}x + \frac{6}{625}.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{2x}\, u(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{125}x + \frac{6}{625}\right) = \frac{e^{2x}}{625}\Big(25x^2 - 20x + 6\Big).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$ est

$$y(x) = e^{-3x}\Big(C_1 x + C_2\Big) + \frac{e^{2x}}{625}\Big(25x^2 - 20x + 6\Big); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4) $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' - 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

Comme $\Delta = 9 > 0$, alors elle admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$ est de la forme $e^{mx}\, P_n(x)$ avec $m = -2$ et $n = 2$.

comme -2 est racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{-2x}\, x\, Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{-2x}\, x \left(ax^2 + bx + c\right) == e^{-2x} \left(ax^3 + bx^2 + cx\right); \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Alors, $y_p(x) = e^{-2x}\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$, on trouve

$$-9ax^2 + (6a - 6b)x + 2b - 3c = x^2.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{-1}{9}$, $b = \dfrac{-1}{9}$ et $c = \dfrac{-2}{27}$.

Donc

$$u(x) = \frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-2x}\, u(x) = e^{-2x} \left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^x + +C_2\, e^{-2x} + e^{-2x} \left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = C_1\, e^x + e^{-2x} \left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + C_2\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$.

Comme $\Delta = -4 < 0$, alors elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ est de la forme $e^{mx}\sin(\omega x)$ avec $m = 0$ et $\omega = 1$.

Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin x$, on trouve

$$\Big(A + 2B\Big)\cos x + \Big(B - 2A - 1)\sin x = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = \frac{-2}{5}$ et $B = \frac{1}{5}$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{-2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) - \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

6) $y'' + y = \cos 2x$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 1 = 0$.

Elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y = \cos 2x$ est de la forme $e^{mx}\cos(\omega x)$ avec $m = 0$ et $\omega = 2$.

Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y = \cos 2x$, on trouve

$$\Big(3A + 1\Big)\cos(2x) + 3B\sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = \dfrac{-1}{3}$ et $B = 0$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{-\cos(2x)}{3}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y = \cos 2x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\ \cos(x) + C_2\ \sin(x) - \frac{\cos(2x)}{3}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

7) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 5y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

Comme $\Delta = -16 < 0$, alors elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = -1 + 2i$ et $\lambda_2 = -1 - 2i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\Big(C_1\ \cos(2x) + C_2\ \sin(2x)\Big); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$ est de la forme $e^{mx}\Big(2\cos(\omega x) - 3\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = -1$ et $\omega = 2$.

Comme $-1 + 2i$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = xe^{-x}\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On pose $z(x) = x\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big)$. Alors, $y_p(x) = e^{-x}\, z(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$, on trouve

$$\Big(4B - 2\Big)\cos(2x) + \Big(3 - 4A\Big)\sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = \dfrac{3}{4}$ et $B = \dfrac{1}{2}$.

Donc

$$z(x) = x\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par suite , la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-x}\, z(x) = xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\Big(C_1\,\cos(2x) + C_2\,\sin(2x)\Big) + xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = e^{-x}\left[\left(\frac{3}{4}x + C_1\right)\cos(2x) + \Big(\frac{x}{2} + C_2\Big)\sin(2x)\right]; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

8) $y'' - y' - 2y = \cos x + 3\sin x$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' - y' - 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

Comme $\Delta = 9 > 0$, alors elle admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' - y' - 2y = \cos x + 3\sin x$ est de la forme $e^{mx}\Big(\cos(\omega x) + 3\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = 0$ et $\omega = 1$.

Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' - y' - 2y = \cos x + 3\sin x$, on trouve

$$\Big(-3A - B - 1\Big)\cos x + \Big(A - 3B - 3\Big)\sin x = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = 0$ et $B = -1$.

Donc la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = -\sin x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' - y' - 2y = \cos x + 3\sin x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-x} - \sin x; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$