UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
TÉTOUAN

EXERCICES CORRIGÉS

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ARIJ BOUZELMATE

Masters : Mathématiques Appliquées à la Finance / Mathématiques et Applications

Année Universitaire : **2015-2016**

Table des matières

1 Exercices

1.1 Exercice 1

Soit $E = C\big([a,b], \mathbb{R}^{+*}\big)$.

1) Vérifier que pour toutes fonctions $f,\ g \in E$, l'application définie par

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

est un produit scalaire sur E.

2) Soit $f \in E$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right) \geq (b-a)^2.$$

3) Trouver toutes les fonctions $f \in E$ pour lesquelles on a

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right) = (b-a)^2.$$

1.2 Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert réel.

On dit que l'application u de H dans H est une isométrie si elle est linéaire et conserve la norme, c'est à dire

$$\|u(x)\| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Montrer que u est une isométrie si et seulement si elle conserve le produit scalaire, c'est à dire

$$(u(x), u(y)) = (x,y) \quad \text{pour tous } x,\ y \in H.$$

1.3 Exercice 3

Soit f une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H.

Montrer que

$$dim\big(Kerf\big)^{\perp} = 1.$$

1.4 Exercice 4

Soit H un espace de Hilbert.

Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels fermés de H tels que $F_1 \subset F_2$.

Montrer que

$$P_{F_1} \circ P_{F_2} = P_{F_1}$$

où P_{F_1} et P_{F_2} sont respectivement les projections orthogonales sur F_1 et F_2.

1.5 Exercice 5

Soient H un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé de H.

Montrer que pour tout $a \in H$, on a

$$\min_{x \in F} \|a - x\| = \max_{\substack{y \in F^{\perp} \\ \|y\|=1}} |(a, y)|.$$

1.6 Exercice 6

On considère l'espace préhilbertien $E = C\big([-1,1], \mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx \quad \forall f,\, g \in E.$$

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ -1 \leq x \leq \dfrac{-1}{n}\,, \\ nx + 1 & \text{si } \ \dfrac{-1}{n} \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$ issue du produit scalaire défini ci-dessus.

2) Montrer que $(E,\, \|.\|_2)$ n'est pas complet.

3) On pose

$$F = \Big\{ f \in E;\ f(x) = 0 \ \ \forall x \in [-1, 0] \Big\}$$

et

$$G = \Big\{ f \in E;\ f(x) = 0 \ \ \forall x \in [0,1] \Big\}$$

Montrer que $F^{\perp} = G$.

4) Les sous espaces vectoriels fermés F et G sont-ils supplémentaires ? Conclure.

1.7 Exercice 7

Soit H un espace de Hilbert.

Soit $A:\ H \to H$ une application linéaire continue. On rappelle que $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A(x)\|$.

1) Prouver que $\|A\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} |(A(x), y)|$.

2) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $A^*:\ H \to H$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées.

- (a) $(A(x), y) = (x, A^*(y)) \quad \forall x,\ y \in H$.
- (b) A^* est continue de H dans H.
- (c) $\|A\| = \|A^*\|$.
- (d) $(A^*)^* = A$.

L'application linéaire continue A^* est appelée adjoint de A.

3) Montrer que

$$(A(x), y) = \frac{1}{4}\Big[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) + i\Big((A(x+iy), x+iy) - (A(x-iy), x-iy)\Big)\Big] \quad \forall x,\ y \in H.$$

4) Supposons que $A = A^*$. On dit dans ce cas que A est symétrique ou auto-adjoint.

Montrer que $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(A(x), x)|$.

1.8 Exercice 8

Soit H un espace de Hilbert. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments deux à deux orthogonaux.

1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\ge 1} x_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum\limits_{n\ge 1} \|x_n\|^2$ est convergente.

2) On suppose que la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ est convergente.

Montrer la relation de Pythagore généralisée suivante

$$\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

1.9 Exercice 9

Soit H un espace de Hilbert. Soit $x \in H$.

Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'éléments de H et F le sous espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soient F_n le sous espace vectoriel engendré par $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et P_{F_n} la projection orthogonale sur F_n.

1) Montrer que

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k.$$

2) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \|x - P_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

3) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

4) On définit $d(x, F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 + (d(x, F))^2 = \|x\|^2.$$

1.10 Exercice 10

Soient $f \in L^2([0, 1])$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'éléments de $L^2([0, 1])$.

1) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\int_0^t f(s)e_n(s)\, ds\right|^2 \leq \int_0^t |f(s)|^2\, ds \qquad \forall t \in [0, 1]. \quad (1)$$

2) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(t)|^2(1-t)\,dt. \qquad (2)$$

3) On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne.

Montrer qu'on égalité dans (1) et (2).

1.11 Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{x(1+|\ln x|)^2}.$$

1) Montrer que $f\in L^1(]0,1])$.

2) Montrer que $f\notin L^p(]0,1])$ pour tout $p\in]1,+\infty]$.

3) Montrer que $f\in L^p([1,+\infty[)$ pour tout $p\in[1,+\infty]$.

1.12 Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } \ 0<x<1\ , \\ 0 & \text{si } \ x\notin]0,1[.\end{cases}$$

Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x-r_n)}{2^n}.$$

Montrer que $g\in L^1(\mathbb{R})$ mais, que $g\notin L^2(\mathbb{R})$.

1.13 Exercice 13

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Soit $p\in]0,1[$. On pose $p'=\dfrac{p}{p-1}<0$.

1) On suppose que

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \;\text{ et }\; 0 < \int_\Omega |g(x)|^{p'} \, dx < +\infty.$$

Montrer que

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \geq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} \, dx \right)^{1/p'}.$$

2) On suppose que

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \;\text{ et }\; \int_\Omega |g(x)|^p \, dx < +\infty.$$

Montrer que

$$\left(\int_\Omega \Big(|f(x)| + |g(x)| \Big)^p \, dx \right)^{1/p} \geq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

1.14 Exercice 14

Soient p, q et r trois réels tels que $1 \leq p < r < q$.

Montrer que

$$L^r(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N).$$

1.15 Exercice 15

Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p(\mathbb{R}^N)$.

On suppose que $f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$.

Montrer que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

1.16 Exercice 16

Soient $p \in [1, +\infty]$ et p' son exposant conjugué. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\mathbb{R}^N)$.

On suppose que $f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

1) Montrer que si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ telle que $g_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$f_n g_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} fg \qquad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^N).$$

2) Montrer que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$ et qu'il existe une constante $M>0$ telle que $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$, alors

$$f_n g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} fg \qquad \text{dans } L^p(\mathbb{R}^N).$$

1.17 Exercice 17

Soit $p\in[1,+\infty[$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\mathbb{R}^N)$ et $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$.

On suppose que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$ et $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$g_n = 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p.$$

1) Montrer que $g_n \geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

1.18 Exercice 18

Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$.

1) Montrer que $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

2) On suppose maintenant que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \text{pour tout } \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante.

2.1) Montrer que $\rho_k * f(x) = 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^N$.

2.2) Montrer que $f=0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$.

1.19 Exercice 19

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$f_n \rightharpoonup f \qquad \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^N).$$

C'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{pour tout } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

1) Montrer que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

2) On suppose de plus que $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

1.20 Exercice 20

Soit

$$C = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N);\ f \geq 0 \ p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^N \Big\}.$$

1) Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

2) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $P_C(f) = f^+$.

1.21 Exercice 21

Soient $\Omega_1 = (0,1)$ et $\Omega_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < x^r \text{ avec } r > 2\Big\}$ deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$.

1) Soit u la fonction définie sur Ω_1 par $u(x) = x^\alpha$.

Montrer que $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

2) Soit v la fonction définie sur Ω_2 par $v(x,y) = x^\alpha$.

Montrer que $v \in H^1(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > 1$.

1.22 Exercice 22

Soient $1 < p \leq +\infty$ et p' son exposant conjugué. Soit $u \in L^p(]0,1[)$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

1.23 Exercice 23

Soient $p \in [1,+\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Soient $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

On désigne par $\widetilde{\xi u}$ le prolongement de ξu par 0 en dehors de Ω.

Montrer que $\widetilde{\xi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla(\widetilde{\xi u}) = \widetilde{\nabla(\xi u)}$ au sens des distributions.

1.24 Exercice 24

Soient $N \geq 1$ et $\Omega =]-1,1[^N$ un pavé de $\mathbb{R}^N$. Soit u une fonction définie par

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

$1)$ Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_2\cdots dx_N - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(-1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_2\cdots dx_N.$$

$2)$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k = \left]1-\dfrac{1}{k}, 1+\dfrac{1}{k}\right[\times]-1,1[^{N-1}$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\begin{cases} 0 \leq \phi(x) \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R}^N, \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \notin A_1, \\ \phi(x) = 1 & \text{si } x = (1,x_2,\cdots,x_N) \text{ avec } |x_i| < \dfrac{1}{2} \ \ \forall i \in \{1,\cdots,N\}. \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction ϕ_k par

$$\phi_k(x) = \phi(1+k(x_1-1),x_2,\cdots,x_N) \quad \forall x = (x_1,x_2,\cdots,x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}(x)\,dx \geq 1.$$

$3)$ Montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

1.25 Exercice 25

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$.

1) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx.$$

2) Montrer que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ et que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.26 Exercice 26

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $f \in L^2(\Omega)$.

1) Montrer que les trois problèmes suivants sont équivalents.

(P_1) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

(P_2) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(P_3) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise dans $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx,$$

2) Montrer que le problème (P_1) admet une unique solution u.

3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.27 Exercice 27

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega). \end{cases}$$

Montrer que le problème (P) admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

1.28 Exercice 28

Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On considère le problème de Neumann suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est clair que si le problème (P) admet une solution u, alors $u + C$ est aussi solution de ce problème pour toute constante $C \in \mathbb{R}$. Pour assurer l'unicité de la solution, on va la chercher dans l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ à moyenne nulle sur Ω

$$V = \Big\{ v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega v(x)\, dx = 0 \Big\}.$$

1) Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ est solution du problème (P), alors on a nécessairement la condition de compatibilité suivante

$$\int_\Omega f(x)\, dx = 0.$$

2) Montrer que V muni de la norme de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V.$$

4) En déduire que V est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

5) Montrer que la formulation variationnelle associée au problème (P) admet une unique solution $u \in V$.

6) Si f vérifie la condition de compatibilité, montrer que le problème (P) admet une unique solution $u \in V$.

1.29 Exercice 29

Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

On considère le problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (P).

1.30 Exercice 30

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et A une application de Ω dans l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre N vérifiant les conditions suivantes.

(i) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\|A(x)\xi\| \leq \beta\|\xi\| \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } p.p.\ x \in \Omega.$$

(ii) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$A(x)\xi.\xi \geq \alpha\|\xi\|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } p.p.\ x \in \Omega.$$

On considère le problème aux limites

$$(P)\begin{cases} -div(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1) Montrer que

$$\int_\Omega div(A(x)\nabla u(x))v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} A\nabla u.nv\,d\sigma - \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx \quad \forall u \in H^2(\Omega),\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) Montrer que la formulation variationnelle associée au problème (P) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

On se propose de montrer que l'application $f \longrightarrow u$ est séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ (faible) dans $H_0^1(\Omega)$ (fort), c'est à dire qu'elle transforme les suites faiblement convergentes dans $L^2(\Omega)$ en suites fortement convergentes dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de la formulation variationnelle associée au problème (P) avec f_n au lieu de f.

On suppose que $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

4) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^2(\Omega)$.

5) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

2 Solutions des Exercices

2.1 Exercice 1

1) L'application $(f,g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ est une forme hermitienne sur $E \times E$ grâce à la linéarité de l'intégrale et le fait que $(f,g) \in \mathbb{R}$. Montrons qu'elle est définie positive. Soit $f \in E$ telle que

$$(f,f) = \int_a^b f^2(x)\,dx = 0.$$

Comme f^2 est positive et continue sur $[a,b]$, alors $f^2(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et par suite $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

2) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ de l'espace E, on a

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx.$$

C'est à dire

$$(b-a)^2 \le \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx.$$

3) L'égalité a lieu si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sqrt{f(x)} = \lambda \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

C'est à dire, $f(x) = \lambda$ pour tout $x \in [a,b]$. Et comme f est strictement positive sur $[a,b]$, alors les constantes strictement positives vérifient l'égalité.

2.2 Exercice 2

(i) Si u est une isométrie.

Soient $x,\ y \in H$. En utilisant le fait que H est un espace de Hilbert réel et u est linéaire et conserve la norme, on a

$$\begin{aligned}(u(x),u(y)) &= \frac{1}{2}\Big(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big)\\ &= (x,y)\end{aligned}$$

Donc, u conserve le produit scalaire.

(ii) Si u conserve le produit scalaire.

Soit $x \in H$. On a

$$\|u(x)\|^2 = (u(x),u(x)) = (x,x) = \|x\|^2.$$

Donc, u conserve la norme.

Pour montrer que u est linéaire, il suffit de montrer que pour tous $x,\ y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

Ce qui revient à démontrer que

$$\|u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 = 0.$$

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}
\|u(x+\lambda y)-u(x)-\lambda u(y)\|^2 &= (u(x+\lambda y)-u(x)-\lambda u(y), u(x+\lambda y)-u(x)-\lambda u(y)) \\
&= (u(x+\lambda y), u(x+\lambda y)) - (u(x+\lambda y), u(x)) - \lambda(u(x+\lambda y), u(y)) \\
&- (u(x), u(x+\lambda y)) + (u(x), u(x)) + \lambda(u(x), u(y)) \\
&- \lambda(u(y), u(x+\lambda y)) + \lambda(u(y), u(x)) + \lambda^2(u(y), u(y)).
\end{aligned}$$

Comme u conserve le produit scalaire, alors

$$\begin{aligned}
\|u(x+\lambda y)-u(x)-\lambda u(y)\|^2 &= (x+\lambda y, x+\lambda y) - (x+\lambda y, x) - \lambda(x+\lambda y, y) \\
&- (x, x+\lambda y) + (x, x) + \lambda(x, y) \\
&- \lambda(y, x+\lambda y) + \lambda(y, x) + \lambda^2(y, y) \\
&= \|x+\lambda y - x - \lambda y)\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Il résulte que u est linéaire.

2.3 Exercice 3

Soit f une forme linéaire continue sur H non identiquement nulle. Donc, $Kerf$ est un sous espace fermé de H. Par suite

$$H = Kerf \oplus (kerf)^{\perp}.$$

Cela veut dire que tout élément x de H s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_0 + x_1$ avec $x_0 \in Kerf$ et $x_1 \in (kerf)^{\perp}$.

Soit $y_0 \in (kerf)^{\perp}$ tel que $y_0 \neq 0$. Alors, tout élément x de H peut s'écrire sous la forme

$$x = x - \frac{f(x)}{f(y_0)}y_0 + \frac{f(x)}{f(y_0)}y_0.$$

Il est clair que $x - \dfrac{f(x)}{f(y_0)}y_0 \in Kerf$ et que $\dfrac{f(x)}{f(y_0)}y_0 \in (kerf)^{\perp}$. Il en résulte que $(kerf)^{\perp}$ est engendré par y_0 et donc de dimension 1.

2.4 Exercice 4

Comme F_1 et F_2 sont deux sous espaces vectoriels de H, alors on peut appliquer le théorème de la projection orthogonale sur F_1 et sur F_2.

Soit $x \in H$. On veut montrer que

$$P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right) = P_{F_1}(x).$$

On a $P_{F_1}(x)$ est l'unique élément de F_1 tel que $x - P_{F_1}(x) \in F_1^{\perp}$, $P_{F_2}(x)$ est l'unique élément de F_2 tel que $x - P_{F_2}(x) \in F_2^{\perp} \subset F_1^{\perp}$ (car $F_1 \subset F_2$) et $P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right)$ est l'unique élément de F_1 tel que $P_{F_2}(x) - P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right) \in F_1^{\perp}$. Donc, $x - P_{F_2}(x) + P_{F_2}(x) - P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right) = x - P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right) \in F_1^{\perp}$. Par suite, d'après l'unicité de la projection de x sur F_1, on a $P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right) = P_{F_1}(x)$.

2.5 Exercice 5

Comme F est un sous espace vectoriel fermé de H, alors par définition de la projection orthogonale de a sur F, on a

$$\min_{x\in F}\|a - x\| = \|a - P_F(a)\|.$$

Soit $y \in F^{\perp}$ tel que $\|y\| = 1$. Alors, en utilisant le fait que $P_F(a) \in F$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|(a, y)| = |(a - P_F(a), y)| \leq \|a - P_F(a)\|$$

Donc

$$\max_{\substack{y\in F^{\perp}\\ \|y\|=1}} |(a, y)| \leq \|a - P_F(a)\|.$$

D'autre part, comme $a - P_F(a) \in F^{\perp}$, alors

$$\left|\left(a, \frac{a - P_F(a)}{\|a - P_F(a)\|}\right)\right| = \left|\left(a - P_F(a), \frac{a - P_F(a)}{\|a - P_F(a)\|}\right)\right| = \|a - P_F(a)\| \leq \max_{\substack{y\in F^{\perp}\\ \|y\|=1}} |(a, y)|.$$

D'où

$$\min_{x\in F}\|x - a\| = \|a - P_F(a)\| = \max_{\substack{y\in F^{\perp}\\ \|y\|=1}} |(a, y)|.$$

2.6 Exercice 6

1) Soient $n \geq m \geq 1$. On a

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2\,dx = \int_{\frac{-1}{m}}^{0} |f_n(x) - f_m(x)|^2\,dx.$$

Comme $0 \leq f_n \leq 1$ sur $[-1, 1]$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\|f_n - f_m\|_2^2 \leq \frac{4}{m}.$$

D'où, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$.

2) On montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger vers une fonction continue. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une fonction f continue sur $[-1, 1]$ telle que $\|f_n - f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2\,dx = \int_{-1}^{\frac{-1}{n}} |f(x)|^2\,dx + \int_{\frac{-1}{n}}^{0} |nx + 1 - f(x)|^2\,dx + \int_{0}^{1} |1 - f(x)|^2\,dx.$$

Comme $nx + 1$ et f sont bornées sur $\left[\dfrac{-1}{n}, 0\right]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{-1}{n}}^{0} |nx + 1 - f(x)|^2\,dx = 0.$$

Par suite, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'expression de $\|f_n - f\|_2^2$, on obtient

$$\int_{-1}^{0} |f(x)|^2\,dx + \int_{0}^{1} |1 - f(x)|^2\,dx = 0.$$

C'est à dire, f est forcément donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ -1 \leq x \leq 0\,, \\ 1 & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Or ceci contredit la continuité de f. Donc, aucune fonction continue ne peut être la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On déduit que $(E, \|.\|_2)$ n'est pas complet.

3) (i) Montrons que $G \subset F^{\perp}$.

Soit $f \in G$ et soit $g \in F$. On a

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)g(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Donc, $f \in F^{\perp}$.

(ii) Montrons que $F^{\perp} \subset G$.

Soit $f \in F^{\perp}$, alors

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = 0 \quad \forall g \in F.$$

Donc

$$\int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx = 0 \quad \forall g \in F.$$

Soit la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \in [-1,0], \\ xf(x) & \text{si } \; x \in [0,1]. \end{cases}$$

Alors, g est continue sur $[-1,1]$ et $g \in F$. Donc,

$$\int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{0}^{1} xf^2(x)\,dx = 0.$$

La fonction $xf^2(x)$ est positive et continue sur $[0,1]$, donc $xf^2(x) = 0$ $\forall x \in [0,1]$. Par suite, $f(x) = 0$ $\forall x \in]0,1]$. D'où par continuité de f, $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Par suite, $f(x) = 0$ $\forall x \in [0,1]$. C'est à dire, $f \in G$.

Il résulte que $F^{\perp} = G$.

4) Supposons que $E = F \oplus G$, alors tout $f \in E$ s'écrit d'une façon unique $f(x) = g(x) + h(x)$ $\forall x \in [-1,1]$ avec $g \in F$ et $h \in G$. En particulier $f(0) = 0$. Ce qui est absurde.

Conclusion : Même si F est un sous espace vectoriel fermé dans un espace préhilbertien, son orthogonal ne lui est pas nécessairement supplémentaire. La bonne hypothèse est que F soit complet.

2.7 Exercice 7

1) Soient x, $y \in H$ tels que $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$. Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(A(x),y)| \leq \|A(x)\|\,\|y\| \leq \|A\|\,\|x\|\,\|y\| \leq \|A\|.$$

Donc

$$\sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(A(x),y)| \leq \|A\|.$$

D'autre part, pour tout $x \in H\backslash\{0\}$,

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \left(A\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{A(x)}{\|A(x)\|}\right) \leq \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)|.$$

D'où

$$\|A\| \leq \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)|.$$

Il résulte que

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)|.$$

2) (a) L'application $T_y \,:\, x \to (A(x), y)$ est une forme linéaire continue sur H pour tout $y \in H$. Donc, d'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe un unique $z_y \in H$ tel que

$$< T_y, x >= (x, z_y) \quad \text{pour tout } x \in H.$$

C'est à dire

$$(A(x), y) = (x, z_y) \quad \text{pour tout } x \in H.$$

On prend $A^*(y) = z_y$. L'application $A^* \,:\, H \to H$ est évidemment bien définie, linéaire et unique.

(b) Montrons que A^* est continue de H dans H.

Soit $x \in H$. Alors, pour tout $y \in H$ tel que $\|y\| \leq 1$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(A^*(x), y)| \leq \|A^*(x)\| \, \|y\| \leq \|A^*(x)\|.$$

Donc

$$\sup_{\|y\|\leq 1} |(A^*(x), y)| \leq \|A^*(x)\|.$$

D'autre part, on a

$$\|A^*(x)\| = \left(A^*(x), \frac{A^*(x)}{\|A^*(x)\|}\right) \leq \sup_{\|y\|\leq 1} |(A^*(x), y)|.$$

Donc

$$\|A^*(x)\| = \sup_{\|y\|\leq 1} |(A^*(x), y)| = \sup_{\|y\|\leq 1} |(y, A^*(x))| = \sup_{\|y\|\leq 1} |(A(y), x)| \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|A(y)\|\|x\|.$$

Donc, A^* est continue.

$c)$ On a d'après la première question

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(x, A^*(y))| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(A^*(y), x)| = \|A^*\|.$$

$d)$ Pour tous $x,\, y \in H$, on a

$$(x, A(y)) = \overline{(A(y), x)} = \overline{(y, A^*(x))} = (A^*(x), y) = (x, (A^*)^*(y)).$$

Donc, $(A^*)^* = A$.

$3)$ Il est facile de voir que pour tous $x,\, y \in H$

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 2(A(x), y) + 2(A(y), x)$$

et

$$i\Big((A(x+iy), x+iy) - (A(x-iy), x-iy)\Big) = 2(A(x), y) - 2(A(y), x).$$

Le résultat en découle.

$4)$ Posons $M = \sup\limits_{\|x\|=1} |(A(x), x)|$.

Soit $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(A(x), x)| \leq \|A(x)\|\, \|x\| \leq \|A\|\, \|x\|^2 = \|A\|.$$

Donc

$$M = \sup_{\|x\|=1} |(A(x), x)| \leq \|A\|.$$

Montrons maintenant que $\|A\| \leq M$.

Comme $A = A^*$, alors pour tout $x \in H$,

$$(A(x), x) = (x, A^*(x)) = (x, A(x)) = \overline{(A(x), x)}.$$

Donc, $(A(x), x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$. Par suite, d'après la troisième question, on a pour tous $x,\, y \in H$

$$Re(A(x), y) = \frac{1}{4}\Big[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)\Big].$$

Or pour tout $x \in H$,

$$|(A(x),x)| \leq \sup_{\|x\|=1} |(A(x),x)| \, \|x\|^2 = M\|x\|^2.$$

Donc

$$Re(A(x),y) \leq \frac{M}{4}\left[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right] \quad \forall x,\, y \in H$$

D'où, d'après l'identité de parallélogramme

$$Re(A(x),y) \leq \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \quad \forall x,\, y \in H.$$

On pose $\lambda = \dfrac{(A(x),y)}{|(A(x),y)|}$, alors $|\lambda| = 1$ et

$$(A(x),\lambda y) = |(A(x),y)|.$$

Par suite

$$|(A(x),y)| = (A(x),\lambda y) = Re(A(x),\lambda y) \leq \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|\lambda y\|^2\right] = \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \quad \forall x,\, y \in H.$$

Ainsi, si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, on a

$$|(A(x),y)| \leq M.$$

D'où

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |(A(x),y)| \leq M.$$

Il résulte que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(A(x),x)|.$$

2.8 Exercice 8

Soient $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|^2$.

C'est à dire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

et

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

D'après le théorème de Pythagore, on a pour deux entiers p et q tels que $p < q$,

$$\left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2.$$

Ce qui équivaut à

$$\|S_q - S_p\|^2 = \alpha_q - \alpha_p = |\alpha_q - \alpha_p|.$$

Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy si et seulement si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi.

2) D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \quad \forall n \geq 1.$$

Ce qui équivaut à

$$\|S_n\|^2 = \alpha_n \quad \forall n \geq 1.$$

Par suite, comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi convergente et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n\|^2 = \| \lim_{n\to+\infty} S_n\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n.$$

D'où

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

2.9 Exercice 9

Soit $x \in H$.

1) Comme $P_{F_n}(x) \in F_n$, alors il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Mais $P_{F_n}(x)$ est caractérisé par $x - P_{F_n}(x) \in F_n^{\perp}$, c'est à dire pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $(x - P_{F_n}(x), e_i) = 0$. Ceci implique en utilisant le fait que la famille $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est orthonormale que

$$(x, e_i) = (P_{F_n}(x), e_i) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k, e_i) = \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Donc

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k.$$

2) Comme $P_{F_n}(x)$ et $x - P_{F_n}(x)$ sont orthogonaux, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|P_{F_n}(x) + (x - P_{F_n}(x))\|^2 = \|P_{F_n}(x)\|^2 + \|x - P_{F_n}(x)\|^2.$$

Comme la famille $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est orthonormale, alors

$$\begin{aligned} \|P_{F_n}(x)\|^2 &= \left\|\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\right\|^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k, \sum_{j=1}^{n}(x, e_j)e_j\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)\sum_{j=1}^{n}\overline{(x, e_j)}(e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)\overline{(x, e_k)} = \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

3) D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Donc, la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1}|(x, e_n)|^2$ est convergente car sa somme partielle $\sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2$ est majorée. Sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

4) D'après les questions précédentes, il suffit de démontrer que $\|x - P_{F_n}(x)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x, F)$. Or $\|x - P_{F_n}(x)\| = d(x, F_n)$, donc il suffit finalement de montrer que $d(x, F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x, F)$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N},\ F_n \subset F$. Donc, $d(x, F) \leq d(x, F_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par définition de la borne inférieure, il existe $y \in F$ tel que

$$\|x - y\| \leq d(x, F) + \varepsilon.$$

Comme $y \in F$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0,\ y \in F_n$. D'où

$$d(x, F_n) \leq \|x - y\|.$$

D'où, pour tout $n \geq n_0$ on a

$$d(x, F) \leq d(x, F_n) \leq d(x, F) + \varepsilon.$$

Ce qui implique que $d(x, F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x, F)$. Le résultat est prouvé.

2.10 Exercice 10

$L^2([0,1])$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad \forall f,\ g \in L^2([0,1]).$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système orthonormal, alors on peut le compléter par une famille $(e_i)_{i\in I}$ tel que $(e_i)_{i\in I\cup\mathbb{N}^*}$ soit une base Hilbertienne.

Soit $t \in [0,1]$. Posons $f_1(s) = f(s)\chi_{[0,t]}(s)$ pour tout $s \in [0,1]$. Alors, en utilisant l'égalité de Bessel-Parseval, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2\,ds = \int_0^1 |f_1(s)|^2\,ds = \|f_1\|^2_{L^2([0,1])} = \sum_{i\in I\cup\mathbb{N}^*} |(f_1, e_i)|^2.$$

Donc

$$\|f_1\|^2_{L^2([0,1])} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |(f_1, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\int_0^1 f_1(s)e_n(s)\,ds\right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2.$$

2) On a d'après la première question,

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\int_0^t f(s)e_k(s)\,ds\right|^2 \leq \int_0^t |f(s)|^2\,ds.$$

Donc, en intégrant de 0 à 1, on obtient

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left|\int_0^t f(s)e_k(s)\,ds\right|^2 dt \leq \int_0^1 \int_0^t |f(s)|^2\,ds\,dt = \int_0^1 \int_0^1 |f(s)|^2 \chi_{[0,t]}(s)\,ds\,dt.$$

Ceci implique que

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \left|\int_0^t f(s)e_k(s)\,ds\right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(s)|^2 \int_s^1 dt\,ds = \int_0^1 |f(s)|^2(1-s)\,ds.$$

La série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_0^1 \left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 dt$ est convergente car sa somme partielle est majorée.

Sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(s)|^2(1-s)\,ds.$$

3) Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne, alors d'après l'égalité de Bessel-Parseval, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2\,ds = \|f_1\|^2_{L^2([0,1])} = \sum_{n=1}^{+\infty} |(f_1,e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2.$$

La somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2$ est positive, croissante et converge vers $\displaystyle\int_0^t |f(s)|^2\,ds$ qui est intégrable pour tout $t\in[0,1]$. Donc d'après le théorème de la convergence monotone, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 dt = \int_0^1\int_0^t |f(s)|^2\,ds\,dt = \int_0^1 |f(s)|^2(1-s)\,ds.$$

2.11 Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2}.$$

1) La fonction f est strictement positive sur $]0,+\infty[$. On effectue le changement de variable $y=\dfrac{1}{x}$, on obtient

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y(1+\ln y)^2}\,dy = \left[\frac{-1}{1+\ln y}\right]_1^{+\infty} = 1.$$

Donc, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ est convergente, d'où $f\in L^1(]0,1])$.

2) On distingue deux cas.

Cas 1. $1<p<+\infty$.

Comme

$$\lim_{x\to 0^+} x|f(x)|^p = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{p-1}(1+|\ln x|)^{2p}} = +\infty,$$

alors, d'après la règle de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^p\,dx$ est divergente, d'où $f\notin L^p(]0,1])$.

Cas 2. $p=+\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, alors f n'est pas bornée au voisinage de 0, d'où $f\notin L^\infty(]0,1])$.

3) On distingue trois cas.

Cas 1. $p=1$.

Comme

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln x)^2}\,dx = 1,$$

alors, $f \in L^1([1,+\infty[)$.

Cas 2. $1 < p < +\infty$.

On a

$$|f(x)|^p = \frac{1}{x^p(1+\ln x)^{2p}} \leq \frac{1}{x^p} \qquad \forall x \in [1,+\infty[.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)|^p\,dx$ est aussi convergente. D'où, $f \in L^p([1,+\infty[)$.

Cas 3. $p = +\infty$.

Comme f est positive, continue et décroissante sur $[1,+\infty[$, alors

$$f(x) \leq f(1) = 1 \qquad \forall x \in [1,+\infty[.$$

Donc, $f \in L^\infty([1,+\infty[)$.

2.12 Exercice 12

On a $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

Donc, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Et comme

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty,$$

alors, $f \notin L^2(\mathbb{R})$.

La somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{f(x-r_n)}{2^n}$ est positive et croissante. Donc, en appliquant le théorème de la convergence monotone, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} f(x-r_n)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Donc, $g \in L^1(\mathbb{R})$. D'où, $g(x) < +\infty$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}$ et par suite $g^2(x) < +\infty$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}} g^2(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \int_{\mathbb{R}} (f(x-r_n))^2\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = +\infty.$$

D'où, $g \notin L^2(\mathbb{R})$.

2.13 Exercice 13

1) Si $\displaystyle\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx = +\infty$, alors l'inégalité est évidente.

On suppose que $\displaystyle\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx < +\infty$, alors $fg \in L^1(\Omega)$.

On pose $q = \dfrac{1}{p} \in]1,+\infty[$ et $q' = \dfrac{-p'}{p} = \dfrac{1}{1-p} \in]1,+\infty[$. Alors, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Comme $|fg|^p \in L^q(\Omega)$ et $|g|^{-p} \in L^{q'}(\Omega)$, alors d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega |f(x)|^p\,dx = \int_\Omega |f(x)g(x)|^p\,|g(x)|^{-p}\,dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)g(x)|^{pq}\,dx\right)^{1/q} \left(\int_\Omega |g(x)|^{-pq'}\right)^{1/q'}.$$

C'est à dire

$$\int_\Omega |f(x)|^p\,dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx\right)^p \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'}\right)^{-p/p'}.$$

D'où

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \geq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'}.$$

2) On suppose que $\displaystyle\left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx\right)^{1/p} < +\infty$, $\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p\,dx > 0$ et $\displaystyle\int_\Omega |g(x)|^p\,dx > 0$ car sinon l'inégalité est triviale.

On a

$$\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx = \int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p-1}|f(x)|\,dx + \int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p-1}|g(x)|\,dx.$$

On veut appliquer la première question aux deux intégrales du membre à droite de l'inégalité précédente, pour cela il suffit de montrer que

$$\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{(p-1)p'} dx = \int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx > 0.$$

Comme $0 < p < 1$, alors la fonction réelle $t \to t^p$ est concave. Donc

$$\left(\frac{1}{2}|f(x)| + \frac{1}{2}|g(x)|\right)^p \geq \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

Par suite

$$\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p\,dx \geq 2^{p-1}\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx + \int_\Omega |g(x)|^p\,dx\right) > 0.$$

Maintenant, d'après la première question, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p-1}|f(x)|\,dx &\geq \left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{(p-1)p'}\,dx\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p}\,dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

De même

$$\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p-1}|g(x)|\,dx \geq \left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p}\,dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_\Omega |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Donc

$$\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p}\,dx \geq \left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p}\,dx\right)^{(p-1)/p}\left[\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_\Omega |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right].$$

D'où

$$\left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p}\,dx\right)^{1/p} \geq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_\Omega |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

2.14 Exercice 14

Soit $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$. On considère les deux ensembles

$$A = \Big\{x \in \mathbb{R}^N;\ \ |f(x)| > 1\Big\}$$

et

$$B = \Big\{x \in \mathbb{R}^N;\ \ |f(x)| \leq 1\Big\}.$$

On pose $g = f1_A$ et $h = f1_B$. Alors, $f = g + h$. Montrons que $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

Comme $1 \leq p < r < q$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^p\,dx = \int_A |f(x)|^p\,dx = \int_A |f(x)|^r|f(x)|^{p-r}\,dx < \int_A |f(x)|^r\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^r\,dx < +\infty,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^q\,dx = \int_B |f(x)|^q\,dx = \int_B |f(x)|^r|f(x)|^{q-r}\,dx \leq \int_B |f(x)|^r\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^r\,dx < +\infty.$$

Donc, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ et par suite $f \in L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$.

2.15 Exercice 15

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, donc il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas.

- Si $p \in [1, +\infty[$.

Comme $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$, alors $|f_n|^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |f|^p$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$. Par suite d'après le lemme de Fatou, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to+\infty} |f_n(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \, dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)|^p \, dx \leq M^p.$$

Ce qui entraine que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq M$. Ceci veut dire que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

- Si $p = +\infty$

Comme $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$ et $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$, alors $|f(x)| \leq M$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$. D'où, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$.

2.16 Exercice 16

1) D'abord, $f_n g_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $fg \in L^1(\mathbb{R}^N)$ d'après l'inégalité de Hölder. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)| \, |g_n(x)| \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |g_n(x) - g(x)| \, |f(x)| \, dx \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} + \leq \|g_n - g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Comme $\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\|g_n - g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|g_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}$ est bornée car la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, alors le terme à droite de l'inégalité précédente converge vers 0 quand $n \to +\infty$. D'où le résultat.

2) On a

$$\begin{aligned}\|f_ng_n - fg\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|(f_n - f)g_n + (g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq \|(f_n - f)g_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq \|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq M\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Comme $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$ et $|g_n(x)| \leq \|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$, alors $|g(x)| \leq M$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$. Par suite, $(g_n(x) - g(x))f(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$ et

$$|(g_n(x) - g(x))f(x)| \leq (|g_n(x)| + |g(x)|)\,|f(x)| \leq 2M|f(x)| \;\; p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Par suite, d'après le théorème de la convergence dominée dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, comme

$$\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors

$$\|f_ng_n - fg\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.17 Exercice 17

1) Comme la fonction réelle $t \to t^p$ est convexe pour $p \in [1, +\infty[$, alors

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p).$$

Donc, $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Comme $g_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2^{p+1}|f|^p$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$, alors d'après le lemme de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to+\infty} g_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} 2^{p+1}|f(x)|^p\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x)\,dx.$$

D'autre part, comme $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x)\,dx = 2^{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p\,dx - \limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)-f(x)|^p\,dx.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2^{p+1}|f(x)|^p\,dx \leq 2^{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p\,dx - \limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)-f(x)|^p\,dx.$$

Ce qui entraine

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)-f(x)|^p\,dx \leq 0.$$

Par conséquent

$$\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.18 Exercice 18

1) Comme $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors

$$|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}^N}|\varphi(x)| = |f(x)|\,\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,dx = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty.$$

Donc, $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

2) 2.1) D'abord comme $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $f*\varphi$ est défini partout sur $\mathbb{R}^N$.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(y) = \rho_k(x-y)$ pour $y \in \mathbb{R}^N$ (k fixé). Donc, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Par suite

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\rho_k(x-y)\,dy = 0.$$

Ce qui équivaut à $\rho_k * f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

2.2) Comme $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\rho_k * f \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^N).$$

Donc, il existe une suite extraite $(\rho_{k_j})_j$ telle que

$$\rho_{k_j} * f(x) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

Comme $\rho_{k_j} * f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, alors $f(x) = 0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$.

2.19 Exercice 19

1) Comme $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(x)\,dx = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx \le \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx = \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx &\le \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

2) $L^2(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert et on a

$$\|f_n - f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (f_n - f, f_n - f)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - 2\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx.$$

Comme $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, alors $\|f_n - f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.20 Exercice 20

1) (i) $C \neq 0$ car $0 \in C$.

(ii) Soient $f,\, g \in C$ et $t \in [0,1]$. Alors, $tf + (1-t)g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ (car $L^2(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectotiel) et $tf + (1-t)g \ge 0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$. Donc, $tf + (1-t)g \in C$. Ce qui prouve que C est convexe.

(iii) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrons que $f \in C$.

Pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

car d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}(f_n(x)-f(x))\varphi(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N}|f_n(x)-f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leq \|f_n-f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

On prend $\varphi = f^- \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors, comme $f_n f^- \geq 0\ \ p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) f^-(x)\,dx \geq 0.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ et en utilisant le fait que $f^+f^-=0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)f^-(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}(f^+(x)-f^-(x))f^-(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N}(f^-(x))^2\,dx \geq 0.$$

Ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^N}(f^-(x))^2\,dx = 0.$$

D'où, $f^-=0\ \ p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$ et par suite $f \geq 0\ \ p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$, c'est à dire $f \in C$. Donc, C est fermée.

2) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. On a $f^+ \in C$. Pour montrer que $P_C(f) = f^+$, on utilise la caractérisation de la projection sur un convexe fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Soit $g \in C$, alors en utilisant le fait que $f^+f^-=0$, on a

$$(f-f^+, g-f^+)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = -(f^-, g-f^+)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = -\int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)(g(x)-f^+(x))\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)g(x)\,dx \leq 0.$$

Donc, $P_C(f) = f^+$.

2.21 Exercice 21

1) $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $u \in L^2(\Omega_1)$ et il existe $g \in L^2(\Omega_1)$ tel que

$$\int_{\Omega_1} x^\alpha \varphi'(x)\,dx = -\int_{\Omega_1} g(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

$u \in L^2(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{-1}{2}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, alors il existe $a > 0$ tel que $supp(\varphi) \subset (a,1)$. Ainsi, comme $x^\alpha \in C^\infty((a,1))$, alors

$$\int_0^1 x^\alpha\varphi'(x)\,dx = \int_a^1 x^\alpha\varphi'(x)\,dx = -\int_a^1 \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)\,dx = -\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)\,dx.$$

$\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(0,1)$ si et seulement si $\alpha - 1 > \dfrac{-1}{2}$, c'est à dire $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Il résulte que $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

2) On a

$$\int_{\Omega_2} |v(x,y)|^2 \, dx \, dy = \int_{\Omega_2} x^{2\alpha} \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^r} x^{2\alpha} \, dy \right) dx = \int_0^1 x^{2\alpha + r} \, dx.$$

Donc, $v \in L^2(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > -1$.

On a $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \alpha x^{\alpha-1}$.

$\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(\Omega_2)$ si et seulement si $2(\alpha-1) + r > -1$, c'est à dire $2\alpha + r > 1$.

Il résulte que $v \in H^1(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > 1$.

2.22 Exercice 22

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $u \in W^{1,p}(]0,1[)$, alors il existe $g \in L^p(]0,1[)$ telle que

$$\int_0^1 u(x)\varphi'(x) \, dx = -\int_0^1 g(x)\varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\left| \int_0^1 u(x)\varphi'(x) \, dx \right| \leq \int_0^1 |g(x)| \, |\varphi(x)| \, dx \leq \|g\|_{L^p(]0,1[)} \|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \int_0^1 u(x)\varphi'(x) \, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Alors, comme $\mathcal{D}(]0,1[) \hookrightarrow L^{p'}(]0,1[)$ avec injection continue, la forme linéaire $\varphi \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 u(x)\varphi'(x) \, dx$ est continue sur $\mathcal{D}(]0,1[)$ qui est dense dans $L^{p'}(]0,1[)$, par suite d'après le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue ψ sur $L^{p'}(]0,1[)$. Par le théorème de Riesz, il existe un unique $v \in L^p(]0,1[)$ tel que

$$\psi(\phi) = \int_0^1 v(x)\phi(x) \, dx \quad \forall \phi \in L^{p'}(]0,1[).$$

Donc

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x) \, dx = -\int_0^1 (-v(x))\phi(x) \, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

D'où, en posant $u' = -v \in L^p(]0,1[)$, on constate que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.

2.23 Exercice 23

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\xi u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx &= \int_\Omega \xi(x) u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \\ &= \int_\Omega u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)\varphi(x)) - \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x)\varphi(x) \right) dx \\ &= \int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)\varphi(x))\, dx - \int_\Omega u(x) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\, dx.\end{aligned}$$

Comme $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\xi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)\varphi(x))\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\xi(x)\varphi(x)\, dx.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\xi u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx &= -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\xi(x) + u(x)\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) \right) \varphi(x)\, dx \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)u(x))\varphi(x)\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi u)}(x)\varphi(x)\, dx.\end{aligned}$$

On déduit que $\widetilde{\xi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et de plus pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\xi u}) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi u)} \qquad \text{au sens des distributions.}$$

2.24 Exercice 24

1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\, dx &= \int_{]-1,1[^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\, dx \\ &= \int_{]-1,1[^{N-1}} \left(\int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\, dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_N \\ &= \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\varphi(1, x_2, \cdots, x_n) - \varphi(-1, x_2, \cdots, x_n) \Big) dx_2 \cdots dx_N.\end{aligned}$$

2) Comme $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors d'après la première question

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}(x)\,dx &= \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\phi_k(1,x_2,\cdots,x_n) - \phi_k(-1,x_2,\cdots,x_n)\Big)\,dx_2\cdots dx_N \\
&= \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\phi(1,x_2,\cdots,x_n) - \phi(1-2k,x_2,\cdots,x_n)\Big)\,dx_2\cdots dx_N \\
&= \int_{]-1,1[^{N-1}} \phi(1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_2\cdots dx_N \\
&\geq \int_{]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}[^{N-1}} \phi(1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_2\cdots dx_N \\
&= \int_{]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}[^{N-1}} dx_2\cdots dx_N = 1.
\end{aligned}$$

3) On raisonne par l'absurde et on suppose que $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour tout $i \in \{1,\cdots,N\}$, il existe

$g_i \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} g_i\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le fait que $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),\ 0 \leq \phi_k \leq 1$ et $\phi_k = 0$ sur $\mathbb{R}^N\backslash A_k$, alors

$$1 \leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} g_1(x)\phi_k(x)\,dx\right| \leq \int_{A_k} |g_1(x)|\,dx \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Or ceci est impossible car $mes(A_k)$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$.

2.25 Exercice 25

1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par définition de la dérivée par transposition, on a

$$< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)\,dx = \int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx.$$

D'autre part, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1,\cdots,N\}$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Donc

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall i \in \{1,\cdots,N\}.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx.$$

C'est à dire

$$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx.$$

Il résulte que

$$< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

2) Comme Ω est borné, on considère sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $\|u\|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ (équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$).

Pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, on a en utilisant la question 1 et puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| = \left|\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx\right| \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{1,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}.$$

Donc, l'application $\varphi \to < \Delta u, \varphi >$ est linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la norme de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Et comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, cette application se prolonge en une application linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ notée encore Δu, c'est à dire $\Delta u\in H^{-1}(\Omega)$. Ce prolongement par densité donne

$$< \Delta u, v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx \quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\left|< \Delta u, v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\right| \le \|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

Par suite

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \|u\|_{1,\Omega}.$$

D'autre part, on a

$$\left|< \Delta u, u >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\right| = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{1,\Omega} \le \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{1,\Omega}.$$

D'où

$$\|u\|_{1,\Omega} \le \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Il résulte que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.26 Exercice 26

1) On procède en quatre étapes.

Etape 1. $(P_2) \Rightarrow (P_1)$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_2), alors puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

C'est à dire

$$\sum_{i=1}^N < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} .$$

D'où, par définition de la dérivation au sens des distributions, on a

$$-\sum_{i=1}^N < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} .$$

C'est à dire

$$-\Delta u = f \quad \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Etape 2. $(P_1) \Rightarrow (P_2)$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_1), alors

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite, d'après l'exercice 25, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{ dans } L^2(\Omega)$$

et

$$\nabla \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla v \quad \text{ dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N .$$

D'où

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$$

et

$$\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Par suite

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Etape $3.$ $(P_3) \Rightarrow (P_2)$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle J et soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors

$$J(u) \le J(u+tv) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Or

$$\begin{aligned} J(u+tv) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+tv)(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)(u+tv)(x)\,dx \\ &= J(u) + t\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx - t\int_\Omega f(x)v(x)\,dx. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$t\left(\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx \ge 0.$$

En divisant cette dernière inégalité par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \ge 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En divisant la même inégalité par $t < 0$ et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \le 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ce qui prouve que u est solution de (P_2).

Etape $4.$ $(P_2) \Rightarrow (P_3)$.

Soit u solution de (P_2), alors pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} J(u+v) &= J(u) + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \\ &= J(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que u réalise le minimum de J sur $H_0^1(\Omega)$.

2) On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u,v)_{1,\Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$ est un espace de Hilbert.

Montrons que L est une application bien définie, linéaire et continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors comme $f \in L^2(\Omega)$, l'inégalité de Hölder implique que $fv \in L^1(\Omega)$. Donc, L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré (Ω est borné), on obtient

$$|L(v)| = \left|\int_\Omega f(x)v(x)\,dx\right| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, alors $\nabla u,\ \nabla v \in L_N^2(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $\nabla u \nabla v = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = |(u,v)_{1,\Omega}| \le \|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega).$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_{1,\Omega} = \|u\|^2_{1,\Omega} \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

C'est à dire u est l'unique solution du problème (P_2) et par la suite de (P_1).

3) En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{1,\Omega} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = a(u,u) &= \int_\Omega f(x)u(x)\,dx \\ &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'où

$$|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.27 Exercice 27

On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega). \end{cases}$$

Puisque $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega))$, alors il existe au moins un relèvement $r_g \in H^1(\Omega)$ tel que $g = \gamma_0(r_g)$.

On pose $w = u - r_g$, alors $\gamma_0(w) = \gamma_0(u - r_g) = \gamma_0(u) - \gamma_0(r_g) = 0$.

On considère le problème en la variable $w = u - r_g \in H^1_0(\Omega)$ associé au relèvement r_g suivant

(P_{r_g}) : Trouver $w \in H^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla w(x)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega w(x)v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx - \int_\Omega \nabla r_g(x)\nabla v(x)\,dx - \int_\Omega r_g(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad \forall u,\, v \in H^1_0(\Omega)$$

et

$$L_g(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx - \int_\Omega \nabla r_g(x)\nabla v(x)\,dx - \int_\Omega r_g(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique $w_g \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(w_g, v) = L_g(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u,v)_{1,\Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

Montrons que L_g est une application bien définie, linéaire et continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $r_g \in H^1(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$, alors l'inégalité de Hölder implique que $fv,\ r_g v$ et $\nabla r_g \nabla v$ sont intégrables sur Ω. Donc, L_g est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|L_g(v)| = \left| \int_\Omega f(x)v(x)\,dx - (r_g, v)_{H^1(\Omega)} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|r_g\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Or d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C^2}\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On déduit que

$$|L_g(v)| \leq \left(C\|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1+C^2}\,\|r_g\|_{H^1(\Omega)} \right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \left(C\|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1+C^2}\,\|r_g\|_{H^1(\Omega)} \right) \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, alors $u,\ v \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u,\ \nabla v \in L_N^2(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $uv,\ \nabla u \nabla v \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = \left|(u,v)_{H^1(\Omega)}\right| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (1+C^2)\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega).$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \|u\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $w_g \in H_0^1(\Omega)$ du problème (P_{r_g}).

La solution w_g dépend continûment de L_g, on a

$$\|w_g\|_{1,\Omega}^2 \leq a(w_g, w_g) = L_g(w_g) \leq \|L_g\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w_g\|_{1,\Omega}.$$

D'où

$$\|w_g\|_{1,\Omega} \leq \|L_g\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

On conclut que pour un relèvement choisi r_g il existe une solution $u = w_g + r_g \in H^1(\Omega)$ du problème de Dirichlet (P). Reste à montrer que la solution u ne dépend pas du relèvement r_g choisi. Pour cela, on prend deux relèvements r_1 et r_2 de g. On pose $w_1 = u - r_1 \in H_0^1(\Omega)$ et $w_2 = u - r_2 \in H_0^1(\Omega)$. Les problèmes P_{r_1} et P_{r_2} associés aux relèvements r_1 et r_2 admettent respectivement une unique solution w_1 et w_2.

On obtient deux solutions $u_1 = w_1 + r_1$ et $u_2 = w_2 + r_2$ du problème (P). Par la suite, $\psi = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ est solution du problème de Dirichlet homogène

$$(Q)\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega), \end{cases}$$

pour lequel on a montré l'existence et l'unicité (voir cours). La solution $\psi = 0$ est la seule solution du problème (Q). On déduit que $u_1 = u_2$. Il résulte que la solution du problème (P) ne dépend pas du relèvement choisi.

2.28 Exercice 28

1) Notons d'abord, que pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$ telle que $\Delta v \in L^2(\Omega)$, on a $v \in H^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$.

En particulier, si $u \in H^1(\Omega)$ est solution du problème (P), alors $\Delta u = -f \in L^2(\Omega)$ et par suite $u \in H^2(\Omega)$.

On peut donc appliquer la formule de Green à u et $v = 1 \in H^1(\Omega)$. On obtient

$$\int_\Omega f(x)\,dx = -\int_\Omega \Delta u(x)\,dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma.$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$, alors

$$\int_\Omega f(x)\,dx = 0.$$

Il résulte que la condition compatibilité est nécessaire pour l'existence d'une solution du problème (P).

2) Comme $H^1(\Omega)$ est un Hilbert, il suffit de montrer que V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V telle que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } H^1(\Omega).$$

Alors, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection continue, alors

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que Ω est borné, on obtient

$$\left|\int_\Omega (v_n(x) - v(x))\,dx\right| \leq \int_\Omega |v_n(x) - v(x)|\,dx \leq \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} mes(\Omega)^{1/2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme $\displaystyle\int_\Omega v_n(x)\,dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\int_\Omega v(x)\,dx = 0$, c'est à dire $v \in V$.

Il résulte que V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$.

3) On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V telle que

$$\|w_n\|_{H^1(\Omega)} > n\|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quitte à considérer la suite $v_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, on a $v_n \in V\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte (d'après le théorème de Rellich-Kondrachov), il existe une sous suite extraite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme par hypothèse

$$\|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors, la suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge nécessairement vers v dans $H^1(\Omega)$. Par passage à la limite, on obtient $v \in V$ (car V est fermé dans $H^1(\Omega)$), $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$ et $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Ce qui donne $\nabla v = 0$ sur Ω et comme Ω est connexe, alors v est constante sur Ω. Or $v \in V$, d'où, nécessairement $v = 0$ sur Ω. Or ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

4) En utilisant la question 3 et la définition de la norme de $H^1(\Omega)$, on obtient

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|v\|_V \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Donc, les deux normes $\|.\|_V$ et $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ sont équivalentes dans V. Par suite, V est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_V$.

5) Formellement, on multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v, on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx.$$

En utilisant le fait que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$, on déduit que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx.$$

La formulation variationnelle s'écrit : trouver $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \quad \text{pour tout } v \in V.$$

On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\, dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx \quad \forall u,\, v \in V$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \quad \forall v \in V.$$

On montre qu'il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

D'après la question 4, l'espace V muni du produit scalaire $(u,v)_V = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$ est un espace de Hilbert.

Montrons que L est une application bien définie, linéaire et continue de V dans $\mathbb{R}$.

Soit $v \in V \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors comme $f \in L^2(\Omega)$, l'inégalité de Hölder implique que $fv \in L^1(\Omega)$. Donc, L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue.

En utilisant l'inégalité de Hölder et les questions 3 et 4, on obtient

$$|L(v)| = \left|\int_\Omega f(x)v(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

D'où, L est continue sur V.

Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $u,\, v \in V$, alors $\nabla u,\, \nabla v \in L^2_N(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $\nabla u \nabla v = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = |(u,v)_V| \leq \|u\|_V\|v\|_V \qquad \forall u,\, v \in V.$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_V = \|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V.$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in V.$$

$6)$ Montrons que la solution unique $u \in V$ du problème variationnel

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in V,$$

est une solution du poblème (P).

Soit $v \in H^1(\Omega)$, alors $v_1 = v - \dfrac{1}{mes(\Omega)}\displaystyle\int_\Omega v(x)\,dx \in V$. Donc, d'après la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v_1(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v_1(x)\,dx.$$

C'est à dire

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x)\, dx - \frac{1}{mes(\Omega)} \int_{\Omega} v(x)\, dx \int_{\Omega} f(x)\, dx.$$

En utilisant la condition de compatibilité vérifiée par f, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x)\, dx.$$

Donc

$$< -\Delta u, \varphi > = < f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et

$$-\Delta u = f \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Il reste à retrouver la condition sur la frontière. On a

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En appliquant la formule de Green (car $u \in H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$), on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Ce qui donne

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ce qui entraine

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\partial\Omega).$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout sur $\partial\Omega$.

2.29 Exercice 29

1) On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H^1(\Omega)$ telle que

$$\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)} > n\left(\|w_n\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla w_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

On considère la suite $v_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, alors $v_n \in H^1(\Omega)\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|v_n\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|\gamma_0(v_n)\|_{L^2(\partial\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte, il existe une sous suite extraite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme par hypothèse

$$\|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors, la suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge nécessairement vers v dans $H^1(\Omega)$. Donc, $v \in H^1(\Omega)$ et par passage à la limite, on obtient $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$, $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$ et $\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0$ puisque l'application trace γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Donc, $\nabla v = 0$ sur Ω et $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Par suite, v est constante sur Ω (car Ω est connexe) et comme la trace d'une fonction constante est la constante elle même, on a donc $v = 0$ dans tout Ω. Or ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

On peut raisonner de la façon suivante : Comme $v = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $v \in H^1_0(\Omega)$ et donc, d'après l'inégalité de Poincaré (Ω est borné) $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 0$, ce qui contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

Donc, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \le C\left(\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (P), on va procéder en trois étapes.

Etape 1. Recherche de la formulation variationnelle.

Formellement, on suppose que u est régulière et on multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test

v. On obtient en appliquant la formule de Green

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g - u$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, d\sigma.$$

La formulation variationnelle s'écrit : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, d\sigma.$$

Etape 2**.** Résolution du problème variationnel.

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

L'application a est bien définie sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ car pour tous $u,\ v \in H^1(\Omega)$, on a $\nabla u,\ \nabla v \in L^2_N(\Omega)$ et en utilisant l'application trace γ_0 qui est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, on a $\gamma_0(u),\ \gamma_0(v) \in L^2(\partial\Omega)$. Ce qui donne en utilisant l'inégalité de Hölder que $\nabla u \nabla v \in L^1(\Omega)$ et $\gamma_0(u)\gamma_0(v) \in L^1(\partial\Omega)$.

La bilinéarité de a résulte de la linéarité du gradient et de l'intégrale. Montrons que a est continue. Soient $u,\ v \in H^1(\Omega)$, alors en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Comme la trace γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Donc

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} = (1 + C^2) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ce qui prouve que a est continue.

a est coercive car d'après la question 1, on a

$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq \frac{1}{C}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Montrons maintenant que L est une application bien définie, linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $v \in H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors comme $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$, l'inégalité de Hölder implique que $fv \in L^1(\Omega)$ et $g\gamma_0(v) \in L^1(\partial\Omega)$. Donc, L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder, la continuité de la trace γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et le fait que $g = \gamma_0(w)$ avec $w \in H^1(\Omega)$ un relèvement de g, on obtient pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + C^2\|w\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C^2\|w\|_{H^1(\Omega)}\right)\|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où, L est continue sur $H^1(\Omega)$.

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,d\sigma = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,d\sigma \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Etape 3**.** Résolution du problème (P).

On montre que la solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème variationnel est une solution du poblème (P).

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Donc

$$< -\Delta u, \varphi > = < f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et

$$-\Delta u = f \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Il reste à retrouver la condition sur $\partial\Omega$. On a

$$-\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En appliquant la formule de Green (car $u \in H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$), on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En utilisant le fait que u est solution du problème variationnel, on obtient

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u - g\right) v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ce qui entraine

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u - g\right) v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\partial\Omega).$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial u}{\partial n} + u = g$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout sur $\partial\Omega$.

2.30 Exercice 30

1) Soient $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. On pose $F(x) = A(x)\nabla u(x)$ (un champ de vecteurs), alors

$$\int_\Omega div(F(x))v(x)\,dx + \int_\Omega F(x).\nabla v(x)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)v(x) + F_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial F_i v}{\partial x_i}(x)\,dx.$$

En appliquant la formule de Green, on obient

$$\int_\Omega \frac{\partial F_i v}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} F_i.n_i v\,d\sigma \quad \forall i = 1, \cdots, N.$$

D'où

$$\int_\Omega (divF(x))v(x)\,dx + \int_\Omega F(x).\nabla v(x)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} F_i.n_i v\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} F.nv\,d\sigma.$$

Par suite

$$\int_\Omega div(A(x)\nabla u(x))v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} A\nabla u.nv\,d\sigma - \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx \quad \forall u \in H^2(\Omega),\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) Pour établir la formulation variationnelle associée au problème (P), on fait un calcul formel. On multiplie l'équation vérifiée par u dans Ω par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, on obtient en utilisant la question 1,

$$-\int_\Omega div(A(x)\nabla u(x))v(x)\,dx = \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

La formulation variationnelle s'écrit : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle, il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

L est évidemment linéaire. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{1,\Omega}.$$

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Maintenant, a étant trivialement bilinéaire, vérifions sa continuité et sa coercivité.

Pour tous $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, en appliquant deux fois l'inégalité de Schwarz, d'abord dans $\mathbb{R}^N$ puis dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$|a(u,v)| \leq \int_\Omega |A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)|\,dx \leq \beta\int_\Omega \|\nabla u(x)\|\,\|\nabla v(x)\|\,dx \leq \beta\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \beta\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}.$$

Donc, a est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. De plus, on a

$$a(u,u) = \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla u(x)\,dx \geq \alpha\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\,dx = \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \alpha\|u\|^2_{1,\Omega}.$$

Donc, a est coercive.

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme u_n est solution de la formulation variationnelle associée au problème (P), alors $u_n \in H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x).\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f_n(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

C'est à dire

$$a(u_n, v) = L_n(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant $v = u_n$, on obtient

$$\alpha\|u_n\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_n, u_n) = L_n(u_n) \leq C\|f_n\|_{L^2(\Omega)}\|u_n\|_{1,\Omega}.$$

Donc

$$\|u_n\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\alpha}\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

4) On raisonne par l'absurde et on suppose que u_n ne converge pas faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$, alors il existe $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ telle que

$$| < \varphi, u_n - u >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} | \not\to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

D'autre part, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui est est réflexif (car c'est est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ qui est un Banach réflexif), alors il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors

$$a(u_{n_k}, v) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a(w, v).$$

Comme $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors

$$a(u_{n_k}, v) = \int_\Omega A(x)\nabla u_{n_k}(x).\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f_{n_k}(x)v(x)\,dx \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Ceci implique que

$$a(w,v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) = L(v).$$

Ceci pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Donc, d'après l'unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a $w = u$.

C'est à dire, $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. par suite

$$| < \varphi, u_{n_k} - u >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} | \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui est absurde. Il résulte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

Comme $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^2(\Omega)$.

5) On a

$$\begin{aligned}
\alpha\|u_n - u\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_n - u, u_n - u) &= \int_{\Omega} A(x)\nabla(u_n(x) - u(x)).\nabla(u_n(x) - u(x))\,dx \\
&= \int_{\Omega} A(x)\nabla u_n(x).\nabla u_n(x)dx - \int_{\Omega} A(x)\nabla u_n(x).\nabla u(x)dx - \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x).\nabla u_n(x)dx + \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x).\nabla u(x)dx \\
&= \int_{\Omega} f_n(x)u_n(x)\,dx - \int_{\Omega} f_n(x)u(x)\,dx - \int_{\Omega} f(x)u_n(x)\,dx + \int_{\Omega} f(x)u(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^2(\Omega)$ et $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} f_n(x)u_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} f(x)u(x)\,dx,$$

$$\int_{\Omega} f_n(x)u(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} f(x)u(x)\,dx$$

et

$$\int_{\Omega} f(x)u_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} f(x)u(x)\,dx.$$

Donc, le terme à droite de l'inégalité précédente tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et par suite

$$\|u_n - u\|_{1,\Omega}^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

C'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On déduit que l'application $f \longrightarrow u$ est séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ (faible) dans $H_0^1(\Omega)$ (fort).