كلية العلوم

جامعة عبد المالك السعدي

Université Abdelmalek Essaadi

Filières SMP/SMC — Année Universitaire 2014/2015

Travaux Dirigés

Analyse II

Série 1

Exercice I. Montrer que les deux séries suivantes sont convergentes. Calculer leurs sommes.

$a)\ \displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{8}{3^n}\right);$

$b)\ \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}.$

Exercice II. Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

Etudier la nature des séries suivantes.

$a)\ \displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{1+u_n};$

$b)\ \displaystyle\sum_{n\geq 0}\sqrt{u_n\, v_n}.$

Exercice III. Etudier la nature des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!};$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2};$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n};$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3};$

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n^3};$

6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n);$

7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}};$

8) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{2^n+5}{8^n-11}.$

Exercice IV.

1) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}$.

2) Est-elle absolument convergente ?

Exercice V. Calculer les intégrales simples suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2(x)\,dx;$ 2) $\displaystyle\int_0^1\arctan x\,dx;$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{3}{2x^2+1}\,dx;$ 4) $\displaystyle\int_1^{3^{\frac{1}{4}}}\frac{x}{1+x^4}\,dx.$

Exercice VI. Calculer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int\frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,dx\,;$

2) $\displaystyle\int\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx.$

Exercice VII. Calculer les intégrales trigonométriques suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}\,;$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx\,;$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx.$

Exercice VIII. Déterminer les intégrales convergentes et calculer leurs valeurs.

1) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{3^x}\,dx\,;$

2) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}\,;$

3) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx.$

Exercice IX. Etudier la nature des intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx;$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx;$

3) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx;$ 4) $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{dx}{x^3+1}.$

Exercice X.

1) Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\ln x\,dx.$

2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\ln x\,\sin x\,dx$ est absolument convergente.

Solutions des Exercices

Série 1

Exercice I.

$a)$ $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

De même, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$. Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Par suite, la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{8}{3^n}\right)$ est convergente. Sa somme est

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{8}{3^n}\right) = 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = 22.$$

$b)$ On pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ alors $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Soit T_n la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$. Donc,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} T_n = 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et on a

$$T = \lim_{n\to+\infty} T_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Exercice II.

$a)$ Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{1+u_n}$.

Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, alors $1 + u_n \geq 1$ pour tout $n \geq 0$. Par suite,

$$0 \leq \frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{1+u_n}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

$b)$ Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n\, v_n}$.

On a

$$0 \leq \sqrt{u_n\, v_n} \leq \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes, alors $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{u_n}{2}+\frac{v_n}{2}\right)$ est aussi une série à termes positifs convergente. Donc, $\sum_{n\geq 0}\sqrt{u_n\, v_n}$ est une série convergente d'après le critère de comparaison.

Exercice III.

1) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad n \geq 1.$

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2(n!)^2(2n)!}{2(n+1)(2n+1)(2n)!(n!)^2}\\ &= \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}.\end{aligned}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$. Par suite, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}; \quad n \geq 1.$

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$. Par suite, d'après la règle de cauchy, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

3) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Comme $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$), alors la série $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

4) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(2n)^4}{(7n^2)^3} = \frac{2^4}{7^3}\,\frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2>1$), alors $\sum_{n\geq 1} \frac{2^4}{7^3\,n^2}$ est convergente. Par suite, $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

5) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$; $\quad n\geq 1$.

On a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} n^2\frac{\ln(n)}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Donc, d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

6) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n)$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n = \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n)$; $\; n\geq 1$. Donc

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n).$$

On a pour tout $1<\alpha<2$, $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n) = 0$. Donc, d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n)$ est convergente. Par suite, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente d'après le critère de comparaison.

7) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$.

C'est une série à termes de signes quelconques.

On a pour tout $n\geq 1$,

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente (car $\frac{3}{2}>1$), alors $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right|$ est convergente, c'est à dire $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est convergente.

8) Nature de la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$.

Comme $\frac{2^n+5}{8^n-11} \geq 0$ pour tout $n \geq 2$, alors $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$ est une série alternée.

On a pour tout $n \geq 2$,

$$\left|(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}\right| = \frac{2^n+5}{8^n-11}.$$

Donc

$$\left|(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n}{8^n} = \left(\frac{2}{8}\right)^n.$$

Comme $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{2}{8}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\left|\frac{2}{8}\right| < 1$), alors , $\sum_{n\geq 2} \left|(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}\right|$ est convergente, c'est à dire $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$ est absolument convergente. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$ est convergente.

Exercice IV.

1) Nature de la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$.

Comme $\frac{n}{n^2-1} \geq 0$, pour tout $n \geq 2$, alors $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ est une série alternée.

On pose $u_n = \frac{n}{n^2-1}$; $, n \geq 2$. Alors, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

Montrons que f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

La fonction f est continue et dérivable sur $[2, +\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \quad \text{pour tout } x \geq 2.$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \geq 2$. Par suite, $f(n+1) < f(n)$ pour tout $n \geq 2$ (car $n+1 > n$); c'est à dire $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geq 2$. D'où, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2-1} = 0$. Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ est convergente.

2) On a

$$\left|(-1)^n \frac{n}{n^2-1}\right| = \frac{n}{n^2-1} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

Donc

$$\left|(-1)^n \frac{n}{n^2-1}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Comme $\sum_n \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors $\sum_n \left|(-1)^n \frac{n}{n^2-1}\right|$ est divergente. Donc, la série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ n'est pas absolument convergente.

Exercice V.

1) $\int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$

2) $\int_0^1 \arctan x\,dx = \int_0^1 (x)' \arctan x\,dx = \Big[x\ \arctan x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

3) On veut calculer $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx.$

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{2}\,x$. Alors, $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$ et $dx = \frac{dt}{\sqrt{2}}$. Par suite

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{\sqrt{2}}\Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}.$$

4) On veut calculer $\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx.$

On effectue le changement de variable $t = x^2$. Alors, $x = \sqrt{t}$ et $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. Par suite

$$\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}.$$

Exercice VI.

1) On veut calculer $\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,dx.$

On effectue la décomposition en éléments simples. Pour cela, comme le polynôme x^2+x+1 n'a pas de racines réelles (car $\Delta = -3 < 0$), alors il suffit de faire la division euclidienne de x^3+2x par x^2+x+1. On obtient

$$x^3 + 2x = (x-1)(x^2+x+1) + 2x + 1.$$

Donc

$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+1} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,dx &= \int (x-1)\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+x+1| + cte.\end{aligned}$$

2) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx$.

On effectue la décomposition en éléments simples. Pour cela, on fait la division euclidienne de $7-2x^3$ par x^3+x^2-2. On obtient

$$7-2x^3 = -2(x^3+x^2-2)+3+2x^2.$$

Donc

$$\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2 + \frac{3+2x^2}{x^3+x^2-2}.$$

Comme 1 est racine de x^3+x^2-2, alors on effectue la division euclidienne de x^3+x^2-2 par $x-1$ et on obtient

$$x^3+x^2-2 = (x-1)(x^2+2x+2).$$

Par suite,

$$\frac{3+2x^2}{x^3+x^2-2} = \frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)}.$$

Sachant que le polynôme x^2+2x+2 n'a pas de racines réelles, on cherche des réels $a,$ b et c tels que

$$\frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}.$$

Un simple calcul donne $a=1,$ $b=1$ et $c=-1$, c'est à dire

$$\frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Donc,

$$\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Par suite,

$$\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx = -2x + \ln|x-1| + \int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx.$$

On calcule maintenant $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx$.

On écrit x^2+2x+2 sous la forme canonique $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$.

On fait le changement de variable $x=t-1$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{x-1}{(x+1)^2+1}\,dx &= \int \frac{t-2}{t^2+1}\,dt \\ &= \int \frac{t}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 2\arctan t + cte \\ &= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\arctan t + cte \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + cte.\end{aligned}$$

On déduit que

$$\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2x + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + cte.$$

Exercice VII

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{|\cos x|} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$, (car $\cos x > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).

On effectue le changement de variable $t=\sin x$ alors $x=\arcsin t$ et $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$

Comme $1-t^2=(1-t)(1+t)$, on cherche deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$. Un simple calcul donne $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2(1-t)} + \dfrac{1}{2(1+t)}$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1+t} \\ &= \frac{-1}{2}\Big[\ln(1-t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

On déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$.

2) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx$.

On remarque que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2(x)}\,dx.$

On effectue le changement de variable $t=\cos x$, alors $dt = -\sin x\,dx$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

On cherche des réels $a,\ b$ et c tels que

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Un simple calcul donne

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \\
&= \Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt \\
&= \Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\
&= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

3) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx.$

On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x\left(1+\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+\tan x}\,dx.$$

On effectue le changement de variable $t=\tan x$, alors $x=\arctan t$ et $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt.$$

On cherche des réels $a,\ b$ et c tels que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Il est facile de trouver que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{-1}{2(1+t)} + \frac{t+1}{2(1+t^2)}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx &= \frac{-1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{-1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.\end{aligned}$$

Exercice VIII.

1) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{3^x} = e^{-x\ln 3}$ est continue sur $[2,+\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [2,+\infty[$, alors

$$\int_2^t \frac{1}{3^x}\,dx = \int_2^t e^{-x\ln 3}\,dx = \left[\frac{-e^{-x\ln 3}}{\ln 3}\right]_2^t = \frac{-e^{-t\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}.$$

Donc,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{3^x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-e^{-t\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}\right) = \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3} = \frac{1}{9\ln 3}.$$

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx = \frac{1}{9\ln 3}$.

2) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2,+\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [2,+\infty[$, alors

$$\begin{aligned}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} &= \int_2^t \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x-1)\Big]_2^t - \frac{1}{2}\Big[\ln(x+1)\Big]_2^t \\ &= \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{\ln 3}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}\right] = \frac{\ln 3}{2}.$$

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ est convergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}$.

3) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ est continue sur $[0,1[$ donc le problème se pose uniquement en 1.

Soit $t \in [0,1[$. On fait le changement de variable $x = \sin u$, alors $dx = \cos u\, du$ et $u = \arcsin x$. On a donc,

$$\int_0^t \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx = \int_0^{\arcsin t} \frac{\sin u\, \cos u}{(\cos^2 u)^{3/2}}\, du = \int_0^{\arcsin t} \sin u\, \cos^{-2}(u)\, du = \int_0^{\arcsin t} -(\cos u)' \cos^{-2}(u)\, du$$
$$= \left[\frac{1}{\cos u}\right]_0^{\arcsin t} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)} - 1.$$

Par suite,

$$\lim_{t\to 1} \int_0^t \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx = \lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{\cos(\arcsin t)} - 1\right) = +\infty.$$

D'où, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$ est divergente.

Exercice IX.

1) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx.$

La fonction $x \to \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ (car $\cos x \le |\cos x| \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

On a

$$0 \le \frac{1-\cos x}{x^2} \le \frac{|1-\cos x|}{x^2} \le \frac{1+|\cos x|}{x^2} \le \frac{2}{x^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$ est convergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$ est convergente d'après le critère de comparaison.

2) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\, dx.$

La fonction $x \to \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. En particulier, elle est continue sur $[0,1]$. Donc, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\, dx$ est une intégrale simple.

D'autre part, on a

$$\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{5x^3} = \frac{2}{5x^2}.$$

Donc

$$\sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,|x|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,x} \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est une intégrale de Riemann divergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,x}\, dx$ est divergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\, dx$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

On déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\, dx$ est divergente.

3) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\ln x}{x^2}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$.

Soit $1 < \alpha < 2$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2} \ln x = 0$. Donc, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ est convergente.

4) Nature de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3+1}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^3+1}$ est continue sur $]-1, 0]$.

Comme

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

alors, $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} (x+1)f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}$. Par suite, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3+1}$ est divergente.

Exercice X.

1) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$.

La fonction $x \to \ln x$ est continue sur $]0, 1]$, donc le problème se pose uniquement en 0.

Soit $t \in]0, 1]$, alors

$$\begin{aligned}\int_t^1 \ln x\, dx = \int_t^1 (x)' \ln x\, dx &= \Big[x \ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 x\, \frac{1}{x}\, dx \\ &= -t\ln t - \Big[x\Big]_t^1 = -t\ln t - 1 + t.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t\to0^+} \int_t^1 \ln x\, dx = \lim_{t\to0^+} (-t\ln t - 1 + t) = -1.$$

Par suite, $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx = -1$.

2) Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, \sin x\, dx$ est absolument convergente.

En utilisant le fait que $|\sin x| \leq 1$ et $\ln x \leq 0$; pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$0 \leq |\ln x\, \sin x| \leq |\ln x| = -\ln x; \qquad \text{pour tout } \ x \in]0, 1].$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$ est convergente, alors $\displaystyle\int_0^1 -\ln x\, dx$ est convergente. Par suite, d'après le critère de comparaison, $\displaystyle\int_0^1 |\ln x\, \sin x|\, dx$ est convergente, ce qui veut dire que $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, \sin x\, dx$ est absolument convergente.