كلية العلوم
جامعة عبد المالك السعدي
Université Abdelmalek Essaadi

Filières SMP/SMC — Année Universitaire 2015/2016

Travaux Dirigés

Analyse II

Série 1

Exercice I. Montrer que les séries suivantes sont convergentes. Calculer leurs sommes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^{n-2}}$;

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$;

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Exercice II. Soient $(u_n)_n$ une suite réelle positive et $(v_n)_n$ la suite définie par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Exercice III. Soient $(u_n)_n$ une suite réelle strictement positive et strictement croissante et $(v_n)_n$ la suite définie par

$$v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que si la suite $(u_n)_n$ converge alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge aussi.

Exercice IV. Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}; \qquad n \in \mathbb{N} \; et \; a > 0.$$

Exercice V. Etudier la nature des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\ln n)^n}$; 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$; 3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$;

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n)$; 5) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$; 6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

Exercice VI. Calculer les intégrales simples suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,dx$;

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$; 4) $\displaystyle\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx$.

Exercice VII. Calculer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx$;

2) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx$.

Exercice VIII. Calculer les intégrales trigonométriques suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ puis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$;

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$;

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx$;

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$.

Exercice IX. Déterminer les intégrales convergentes et calculer leurs valeurs.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$; 3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$;

4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx$; 5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$; 6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

Exercice X. Etudier la nature des intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$; 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\,dx$;

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$; 5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$; 6) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3+1}$.

Exercice XI. Soit α un réel strictement positif.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ est absolument convergente.

2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$ est convergente.

Solutions des Exercices

Série 1

Exercice I.

1) On a $\dfrac{2^n}{3^{n-2}} = 9\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Comme $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\dfrac{2^n}{3^{n-2}}$ est une série géométrique convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n-2}} = 9\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 9\times\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}} = 27.$$

2) On a $(-1)^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\dfrac{-1}{4}\right)^n$. Comme $\left|\dfrac{-1}{4}\right| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$ est une série géométrique convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{-1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

3) On pose $u_n = \dfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$ alors $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{(n+2)^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Soit S_n la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$. Donc,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}u_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+2)^2} = 1 - \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n = 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ est convergente et on a

$$S = \lim_{n\to+\infty}S_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} = 1.$$

Exercice II.

on a $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Donc, $v_n\in[0,1[$ et $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par suite

$$u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $u_n \not\longrightarrow 0$, alors $v_n \not\longrightarrow 0$ et les deux séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ divergent.

Si $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et donc les deux séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ sont de même nature d'après le critère d'équivalence.

Il résulte que dans les deux cas, les deux séries sont de même nature.

Exercice III.

Soit $(u_n)_n$ une suite strictement positive, strictement croissante et convergente vers l. Alors nécessairement $l > 0$. Donc

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_{n+1} - u_n}{l}.$$

La série à termes positifs $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ est convergente car

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_0) = l - u_0,$$

et donc, $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n) = l - u_0$.

Il résulte que $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

Exercice IV.

Soit

$$u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}; \quad n \in \mathbb{N} \ et \ a > 0.$$

Donc, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n(1+a)^{n+1}}\,\frac{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}{a^n} = \frac{a}{(1+a)^{n+1}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente.

Exercice V.

1) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \left(\frac{1}{(\ln n)^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{\ln n}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$. Par suite, d'après la règle de cauchy, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\ln n)^n}$ est convergente.

2) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{pour } n \text{ grand}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente (car $\frac{1}{2} < 1$), alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est divergente d'après le critère de comparaison.

3) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$n^2 e^{-(\ln n)^2} = e^{2\ln n - (\ln n)^2} = e^{\ln n(2-\ln n)}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-(\ln n)^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n(2-\ln n)} = 0$, alors d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$ est convergente.

4) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n)$.

C'est une série à termes positifs.

On a

$$\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n).$$

On a pour tout $1<\alpha<2$, $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n) = 0$. Donc, d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n)$ est convergente. Par suite, la série $\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n)$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

5) Nature de la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$.

Comme $\frac{2^n+5}{8^n-11} \geq 0$ pour tout $n\geq 2$, alors $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$ est une série alternée.

On a pour tout $n\geq 2$,

$$\left|(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}\right| = \frac{2^n+5}{8^n-11}.$$

Donc

$$\left|(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n}{8^n} = \left(\frac{2}{8}\right)^n.$$

Comme $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{2}{8}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\left|\frac{2}{8}\right| < 1$), alors , $\sum_{n\geq 2} \left|(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}\right|$ est convergente, c'est à dire $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$ est absolument convergente. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$ est convergente.

6) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

On pose $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$.

Comme $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée.

Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers 0.

On pose $a_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$.

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui entraine que f est décroissante en particulier sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent,

$f(n) > f(n+1)$ pour tout $n \geq 1$. D'où, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

De plus, on a

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On déduit d'après le critère spécial des séries alternées que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Exercice VI.

1) On a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2) Pour calculer $\int_0^1 x\arctan x\,dx$, on fait une intégration par parties. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arctan x\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)'\arctan x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big[\arctan x\Big]_0^1\,dx = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3) Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$, on effectue le changement de variable $t = e^x$. Alors, $x = \ln t$ et $dx = \dfrac{dt}{t}$.

Par suite

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx &= \int_1^e \frac{t}{\sqrt{t+1}}\frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t+1}}\\ &= \Big[2\sqrt{t+1}\Big]_1^e = 2(\sqrt{e+1}-\sqrt{2}).\end{aligned}$$

4) Pour calculer $\displaystyle\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx$, on effectue le changement de variable $t = x^2$. Alors, $x = \sqrt{t}$ et $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.

Par suite

$$\begin{aligned}\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}\\ &= \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}.\end{aligned}$$

Exercice VII.

1) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx$.

On effectue la décompostion en éléments simples. Sachant que le polynôme x^2-3x-4 admet deux racines réelles, on cherche deux réels a et b tels que

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}.$$

Un simple calcul donne $a = \dfrac{-1}{5}$ et $b = \dfrac{6}{5}$. Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx &= \frac{-1}{5}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{6}{5}\int \frac{dx}{x-4}\\ &= \frac{-1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + cte.\end{aligned}$$

2) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$.

Le polynôme x^2+x+1 n'a pas de racines réelles (car $\Delta < 0$).

On écrit x^2+x+1 sous la forme canonique $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.

On fait le changement de variable $x = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t$, alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}t}{2}}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{t}{1+t^2}\,dt - \sqrt{3}\int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt - \sqrt{3}\int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \sqrt{3}\arctan t + cte \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + cte \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + cte \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + cte.
\end{aligned}$$

3) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx$.

On effectue la décomposition en éléments simples. Pour cela, on fait la division euclidienne de $7-2x^3$ par x^3+x^2-2. On obtient

$$7-2x^3 = -2(x^3+x^2-2) + 3 + 2x^2.$$

Donc

$$\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2 + \frac{3+2x^2}{x^3+x^2-2}.$$

Comme 1 est racine de x^3+x^2-2, alors on effectue la division euclidienne de x^3+x^2-2 par $x-1$ et on obtient

$$x^3+x^2-2 = (x-1)(x^2+2x+2).$$

Par suite,

$$\frac{3+2x^2}{x^3+x^2-2} = \frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)}.$$

Sachant que le polynôme x^2+2x+2 n'a pas de racines réelles, on cherche des réels $a,$ b et c tels que

$$\frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}.$$

Un simple calcul donne $a=1,$ $b=1$ et $c=-1$, c'est à dire

$$\frac{3+2x^2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Donc,

$$\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Par suite,

$$\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx = -2x + \ln|x-1| + \int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx.$$

On calcule maintenant $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx$.

On écrit x^2+2x+2 sous la forme canonique $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$.

On fait le changement de variable $x = t-1$, alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{x-1}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{t-2}{t^2+1}\,dt \\
&= \int \frac{t}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 2\arctan t + cte \\
&= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\arctan t + cte \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + cte.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2} = -2x + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + cte.$$

Exercice VIII

1) (i) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$.

On effectue le changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, alors $x = 2\arctan t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}{}_{,}\, dt$ et $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{2}{t^2+2t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{2}{(t+1)^2}\,dt \\
&= \left[\frac{-2}{t+1}\right]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

(ii) Calculons maintenant $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{(d'après } (i)\text{)}.$$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{|\cos x|} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$, (car $\cos x > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).

On effectue le changement de variable $t = \sin x$ alors $x = \arcsin t$ et $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$

Comme $1-t^2 = (1-t)(1+t)$, on cherche deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$. Un simple calcul donne $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2(1-t)} + \dfrac{1}{2(1+t)}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1+t} \\
&= \frac{-1}{2}\Big[\ln(1-t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

On déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$.

3) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx$.

On remarque que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2(x))}\,dx$.

On effectue le changement de variable $t = \cos x$, alors $dt = -\sin x\,dx$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

On cherche des réels $a,\ b$ et c tels que

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Un simple calcul donne

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt\\ &= \Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt\\ &= \Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\\ &= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

4) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx.$

On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x\left(1+\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+\tan x}\,dx.$$

On effectue le changement de variable $t=\tan x$, alors $x=\arctan t$ et $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt.$$

On cherche des réels a, b et c tels que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Il est facile de trouver que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{-1}{2(1+t)} + \frac{t+1}{2(1+t^2)}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx &= \frac{-1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\\ &= \frac{-1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_0^1\\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.\end{aligned}$$

Exercice IX.

1) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[0, 1[$, donc le problème se pose uniquement en 1.

Soit $t \in [0, 1[$, alors

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \Big[-2\sqrt{1-x} \Big]_0^t = -2\sqrt{1-t} + 2.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to 1} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$. Par suite, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ est convergente et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$.

2) Nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ est continue sur $\Big]0, \dfrac{\pi}{4}\Big]$, donc le problème se pose uniquement en 0.

Soit $t \in \Big]0, \dfrac{\pi}{4}\Big]$, alors

$$\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = \Big[2\sqrt{\sin x}\Big]_t^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin t} = 2^{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{\sin t}.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = 2^{\frac{3}{4}}$. Par suite, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = 2^{\frac{3}{4}}$.

3) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [0, +\infty[$, alors

$$\int_0^t \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\, dx = \Big[e^{\arctan x}\Big]_0^t = e^{\arctan t} - 1.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} \int_0^t \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\, dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$. Par suite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\, dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\, dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$.

4) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{3^x}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [2, +\infty[$, alors

$$\int_2^t \frac{1}{3^x}\, dx = \int_2^t e^{-x\ln 3}\, dx = \left[\frac{-e^{-x\ln 3}}{\ln 3}\right]_2^t = \frac{-e^{-t\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}.$$

Donc,

$$\lim_{t\to +\infty} \int_2^t \frac{1}{3^x}\, dx = \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{-e^{-t\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}\right) = \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3} = \frac{1}{9\ln 3}.$$

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\, dx$ est convergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\, dx = \frac{1}{9\ln 3}$.

5) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2,+\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [2,+\infty[$, alors

$$\begin{aligned}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} &= \int_2^t \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right) dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x-1)\Big]_2^t - \frac{1}{2}\Big[\ln(x+1)\Big]_2^t \\ &= \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{\ln 3}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}\right] = \frac{\ln 3}{2}.$$

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$ est convergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}$.

6) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ est continue sur $[0,1[$ donc le problème se pose uniquement en 1.

Soit $t \in [0,1[$. On fait le changement de variable $x = \sin u$, alors $dx = \cos u\, du$ et $u = \arcsin x$. On a donc,

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx &= \int_0^{\arcsin t}\frac{\sin u\,\cos u}{(\cos^2 u)^{3/2}}\,du = \int_0^{\arcsin t}\sin u\,\cos^{-2}(u)\,du = \int_0^{\arcsin t} -(\cos u)'\cos^{-2}(u)\,du \\ &= \left[\frac{1}{\cos u}\right]_0^{\arcsin t} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)} - 1.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{t\to1}\int_0^t \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \lim_{t\to1}\left(\frac{1}{\cos(\arcsin t)} - 1\right) = +\infty.$$

D'où, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$ est divergente.

Exercice X.

1) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$.

On a pour tout $x \in]0,1]$,

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\frac{1}{2} < 1$), alors $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|$ est convergente d'après le critère de comparaison, d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ est absolument convergente et par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente.

2) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ (car $\cos x \le |\cos x| \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

On a pour tout $x \ge 1$,

$$0 \le \frac{1-\cos x}{x^2} \le \frac{|1-\cos x|}{x^2} \le \frac{1+|\cos x|}{x^2} \le \frac{2}{x^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $2>1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ est convergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ est convergente d'après le critère de comparaison.

3) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{1+\ln x}{x+2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. On a

$$\frac{1+\ln x}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}$ est divergente car

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = +\infty.$$

D'où, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\,dx$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

4) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$.

La fonction $x \to \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. En particulier, elle est continue sur $[0,1]$. Donc, $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est une intégrale simple.

D'autre part, on a

$$\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{5x^3} = \frac{2}{5x^2}.$$

Donc

$$\sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,|x|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,x} \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est une intégrale de Riemann divergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,x}\,dx$ est divergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

On déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est divergente.

5) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\ln x}{x^2}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$.

Soit $1 < \alpha < 2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-2}\ln x = 0$. Donc, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ est convergente.

6) Nature de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3+1}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^3+1}$ est continue sur $]-1, 0]$.

Comme

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

alors, $\lim\limits_{x\to-1^+} (x+1)f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x^2-x+1} = \dfrac{1}{3}$. Par suite, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3+1}$ est divergente.

Exercice XI.

1) Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ est absolument convergente.

On a pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq \left|\frac{sinx}{x^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{x^{\alpha+1}}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\alpha+1 > 1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{sinx}{x^{\alpha+1}}\right| dx$ est convergente d'après le critère de comparaison. Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ est absolument convergente.

2) Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ est convergente.

Soit $t \in [1, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx &= \int_1^t \frac{(\sin x)'}{x^\alpha}\,dx \\ &= \left[\frac{\sin x}{x^\alpha}\right]_1^t + \alpha\int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx \\ &= \frac{\sin t}{t^\alpha} - \sin 1 + \alpha\int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx.\end{aligned}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ est absolument convergente, alors elle est convergente et par suite $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ existe et est finie.

On a aussi $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\sin t}{t^\alpha} = 0$ car $0 \leq \left|\dfrac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t^\alpha} = 0$.

Il résulte que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ existe et est finie ; c'est à dire, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ est convergente.