



Filières SMP/SMC

Année Universitaire 2016-2017

Travaux Dirigés : Analyse II

Série 1

Exercice I. Montrer que les deux séries suivantes sont convergentes. Calculer leurs sommes.

$$1) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{6^n} + (-1)^n \left(\frac{1}{3} \right)^{2n} \right);$$

$$2) \sum_{n \geq 0} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}.$$

Exercice II. Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

Etudier la nature des séries suivantes.

$$1) \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{1 - v_n};$$

$$2) \sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}.$$

Exercice III. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. Soit u_n une suite réelle telle que $\left(\frac{a}{b}\right)^n u_n$ soit bornée.

1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a^n |u_n|$ est convergente.

2) Dédurre que la série $\sum_{n \geq 0} n^\alpha r^n$ est convergente pour tous $0 < r < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) En prenant $\alpha = 1$ dans la question 2, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$.

Exercice IV. Etudier la nature des séries suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 1) \sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n^a}, \quad a > 0; & 2) \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\
 3) \sum_{n \geq 1} (3 + (-1)^n)^{-n}; & 4) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n; \\
 5) \sum_{n \geq 1} x^{\ln n}, \quad x > 0; & 6) \sum_{n \geq 1} e^{-(\ln n)^2}; \\
 7) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}; & 8) \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}.
 \end{array}$$

Exercice V. Calculer les intégrales simples suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_0^\pi \cos^2(x) dx; & 2) \int_2^4 \frac{3}{2x(\ln x)^2} dx; \\
 3) \int_0^1 x \arctan x dx; & 4) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2 + 1} dx.
 \end{array}$$

Exercice VI. Calculer les primitives suivantes.

$$\begin{array}{l}
 1) \int \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x + 1} dx; \\
 2) \int \frac{x + 2}{x^2 - 3x - 4} dx; \\
 3) \int \frac{3x + 4}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx.
 \end{array}$$

Exercice VII. Calculer les intégrales trigonométriques suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}; & 2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2 - \sin^2(x)} dx; \\
 3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx; & 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x} \text{ puis } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx.
 \end{array}$$

Exercice VIII. Déterminer les intégrales convergentes et calculer leurs valeurs.

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} dx; & 2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx; \\
 3) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx; & 4) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}.
 \end{array}$$

Exercice IX. Etudier la nature des intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx; & 2) \int_1^{+\infty} \frac{x^\lambda + x^{2-\lambda}}{x^3 + 1} dx, \quad 0 < \lambda < 1; & 3) \int_1^{+\infty} \frac{1 + \ln x}{x + 2} dx; \\
 4) \int_0^1 \frac{e^x}{x} dx; & 5) \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx; & 6) \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3 + 1}.
 \end{array}$$

Exercice X. Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(t) = \int_1^t \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} dx$.

1) Calculer $F(t)$.

2) En déduire que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Solutions des Exercices

Série 1

Exercice I.

1) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{6^n}$ est une série géométrique convergente car $\left| \frac{1}{6} \right| < 1$. Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$.

On a $(-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{-1}{9}\right)^n$. Comme $\left| \frac{-1}{9} \right| < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$ est une série géométrique convergente. Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{9}{10}$.

Par suite, la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{6^n} + (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \right)$ est convergente. Sa somme est

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{6^n} + (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{6}{5} + \frac{9}{10} = \frac{21}{10}.$$

2) On pose $u_n = \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors, en utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient

$$u_n = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose $v_n = \frac{1}{3n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n = v_n - v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et dans ce cas, on dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série télescopique.

Soit S_n la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. Donc,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = v_0 = 1$. Donc la série télescopique $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série convergente

et sa somme

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = 1.$$

Exercice II.

1) Nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{1 - v_n}$.

Comme $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. D'où, $\frac{u_n}{1 - v_n} \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ et

$$\frac{u_n}{1 - v_n} \underset{+\infty}{\sim} u_n.$$

Comme $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série à termes positifs convergente, alors $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{1 - v_n}$ est convergente aussi d'après le critère d'équivalence.

2) Nature de la série $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$.

On a

$$0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes, alors $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2} \right)$ est aussi une série à termes positifs convergente. Donc, $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ est une série convergente d'après le critère de comparaison.

Exercice III.

1) Comme $\left(\frac{a}{b} \right)^n u_n$ est bornée, alors il existe une constante $M > 0$ telle que

$$0 \leq a^n |u_n| \leq Mb^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\sum_{n \geq 0} Mb^n$ est une série géométrique convergente car $0 < b < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} a^n |u_n|$ est une série convergente d'après le critère de comparaison.

2) Soit $0 < r < 1$, alors il existe un réel b tel que $0 < r < b < 1$, c'est à dire que $0 < \frac{r}{b} < 1$. D'où,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(\frac{r}{b} \right)^n = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Par suite, en prenant $u_n = n^\alpha$ dans la question 1, on trouve que

$\sum_{n \geq 0} n^\alpha r^n$ est convergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) On sait d'après la question 2 que $\sum_{n \geq 0} nr^n$ est convergente (pour $\alpha = 1$). Donc, sa somme partielle S_n est convergente vers S .

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n kr^k = \sum_{k=1}^n kr^k = r \sum_{k=1}^n kr^{k-1} = r \sum_{k=1}^n ((k-1)r^{k-1} + r^{k-1}) \\ &= r \sum_{k=1}^n (k-1)r^{k-1} + r \sum_{k=1}^n r^{k-1} = r \sum_{k=0}^{n-1} kr^k + r \frac{1-r^n}{1-r} \\ &= rS_{n-1} + r \frac{1-r^n}{1-r}. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n - rS_{n-1} = r \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$ (car $0 < r < 1$), alors en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ dans la dernière égalité, on obtient

$$(1-r)S = \frac{r}{1-r}.$$

D'où,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Exercice IV.

1) Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n^a}$, $a > 0$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n = \frac{a^n}{n^a}$; $n \geq 1$.

On a pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a \left(\frac{n}{n+1} \right)^a$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$. Par suite, d'après la règle de d'Alembert,

si $0 < a < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente et si $a > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.

Si $a = 1$, alors $u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série de Riemann divergente.

2) Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

C'est une série à termes positifs à partir d'un certain rang.

On pose $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n^2}$; $n \geq 1$.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)} = e^{-x \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$, alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-x}$. Par suite, d'après la règle de Cauchy, si $x > 0$

(c'est à dire $e^{-x} < 1$), la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente et si $x < 0$ (c'est à dire $e^{-x} > 1$), la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.

Si $x = 0$, alors $u_n = 1$. Donc, u_n ne converge pas vers 0. D'où, $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.

3) Nature de la série $\sum_{n \geq 1} (3 + (-1)^n)^{-n}$.

C'est une série à termes positifs.

Comme $(-1)^n \geq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors en particulier pour tout $n \geq 1$, on a

$$(3 + (-1)^n)^{-n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente car $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} (3 + (-1)^n)^{-n}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

4) Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^n$.

C'est une série à termes positifs.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$, alors

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^n \underset{+\infty}{\sim} e \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Par la suite, utilisant le fait que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, on voit que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^n$ est aussi convergente d'après le critère d'équivalence.

5) Nature de la série $\sum_{n \geq 1} x^{\ln n}$.

C'est une série à termes positifs.

On a pour tout $n \geq 1$

$$x^{\ln n} = e^{\ln n \ln x} = n^{\ln x} = \frac{1}{n^{-\ln x}}.$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} x^{\ln n}$ est série de Riemann convergente si $0 < x < e^{-1}$ (c'est à dire $-\ln x > 1$) et est divergente si $x \geq e^{-1}$ (c'est à dire $-\ln x \leq 1$).

6) Nature de la série $\sum_{n \geq 1} e^{-(\ln n)^2}$.

C'est une série à termes positifs.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$n^2 e^{-(\ln n)^2} = e^{2 \ln n - (\ln n)^2} = e^{\ln n (2 - \ln n)}.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-(\ln n)^2} = 0$ et par suite d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n \geq 1} e^{-(\ln n)^2}$ est convergente.

7) Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$.

C'est une série à termes de signes quelconques.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \left| \frac{\sin n}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente (car $\frac{3}{2} > 1$), alors $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\sin n}{n\sqrt{n}} \right|$ est convergente, c'est

à dire $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est convergente.

8) Nature de la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}$.

Comme $\frac{n}{n^2 - 1} \geq 0$, pour tout $n \geq 2$, alors $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}$ est une série alternée.

On pose $u_n = \frac{n}{n^2 - 1}$, $n \geq 2$. Alors, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Montrons que f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

La fonction f est continue et dérivable sur $[2, +\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{-(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{pour tout } x \geq 2.$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \geq 2$. Par suite, $f(n+1) < f(n)$ pour tout $n \geq 2$ (car $n+1 > n$); c'est à dire

$u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geq 2$. D'où, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2 - 1} = 0$. Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}$

est convergente.

Exercice V.

$$1) \int_0^\pi \cos^2(x) dx = \int_0^\pi \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

$$2) \int_2^4 \frac{3}{2x(\ln x)^2} dx = \frac{3}{2} \int_2^4 (\ln x)' (\ln x)^{-2} dx = \frac{-3}{2} \left[\frac{1}{\ln x} \right]_2^4 = \frac{3}{4 \ln 2}.$$

3) Pour calculer $\int_0^1 x \arctan x dx$, on fait une intégration par parties. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \arctan x dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \arctan x dx = \left[\frac{x^2}{2} \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4) On veut calculer $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1} dx$.

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{2}x$. Alors, $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$ et $dx = \frac{dt}{\sqrt{2}}$. Par suite

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{\sqrt{2}} [\arctan t]_0^1 = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Exercice VI.

1) On veut calculer $\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1} dx$.

On effectue la décomposition en éléments simples. Pour cela, comme le polynôme x^2+x+1 n'a pas de racines réelles (car $\Delta = -3 < 0$), alors il suffit de faire la division euclidienne de x^3+2x par x^2+x+1 . On obtient

$$x^3+2x = (x-1)(x^2+x+1) + 2x+1.$$

Donc

$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+1} = x-1 + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1} dx &= \int (x-1) dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+x+1| + cte. \end{aligned}$$

2) On veut calculer $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$.

On effectue la décomposition en éléments simples. Sachant que le polynôme x^2-3x-4 admet deux racines réelles, on cherche deux réels a et b tels que

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}.$$

Un simple calcul donne $a = \frac{-1}{5}$ et $b = \frac{6}{5}$. Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx &= \frac{-1}{5} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{6}{5} \int \frac{dx}{x-4} \\ &= \frac{-1}{5} \ln|x+1| + \frac{6}{5} \ln|x-4| + cte. \end{aligned}$$

3) On veut calculer $\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+5)^2} dx$.

Le polynôme x^2+2x+5 n'a pas de racines réelles (car $\Delta = -16 < 0$).

On écrit x^2+2x+5 sous la forme canonique $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$.

On fait le changement de variable $x = 2t - 1$, alors

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{(x^2+2x+5)^2} dx &= \int \frac{3x+4}{((x+1)^2+4)^2} dx = \frac{1}{8} \int \frac{6t+1}{(t^2+1)^2} dt \\ &= \frac{3}{8} \int \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{-3}{8(t^2+1)} + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} + cte. \end{aligned}$$

Maintenant, pour calculer $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$, on calcule $\int \frac{dt}{t^2+1}$ en utilisant une intégration par parties.

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2+1} &= \int \frac{1}{t^2+1} (t)' dt = \frac{t}{t^2+1} + 2 \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2 \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2} dt - 2 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2 \int \frac{dt}{t^2+1} - 2 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan t + cte.$$

On remplace t par $\frac{x+1}{2}$, on obtient

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+5)^2} dx = \frac{x-11}{8(x^2+2x+5)} + \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + cte.$$

Exercice VII

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{|\cos x|} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$, (car $\cos x > 0$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$).

On effectue le changement de variable $t = \sin x$ alors $x = \arcsin t$ et $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$

Comme $1-t^2 = (1-t)(1+t)$, on cherche deux réels a et b tels que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$. Un simple calcul

donne $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}$. Donc,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1+t} \\ &= \frac{-1}{2} \left[\ln(1-t) \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2} \left[\ln(1+t) \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

On déduit que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right)$.

2) On veut calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)} dx$.

On remarque que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2(x))} dx$.

On effectue le changement de variable $t = \cos x$, alors $dt = -\sin x dx$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)} dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

On cherche des réels a , b et c tels que

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Un simple calcul donne

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)} dx &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= \left[\ln t \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \left[\ln t \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \frac{1}{2} \left[\ln(1+t^2) \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\ &= -\ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

3) On veut calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x} \right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1 + \tan x} dx.$$

On effectue le changement de variable $t = \tan x$, alors $x = \arctan t$ et $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)(1+t^2)} dt.$$

On cherche des réels a , b et c tels que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Il est facile de trouver que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{-1}{2(1+t)} + \frac{t+1}{2(1+t^2)}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx &= \frac{-1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{-1}{2} [\ln(1+t)]_0^1 + \frac{1}{4} [\ln(1+t^2)]_0^1 + \frac{1}{2} [\arctan t]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}. \end{aligned}$$

4) (i) On veut calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$.

On effectue le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors $x = 2 \arctan t$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2}{t^2 + 2t + 1} dt = \int_0^1 \frac{2}{(t+1)^2} dt \\ &= \left[\frac{-2}{t+1} \right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

(ii) Calculons maintenant $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad (\text{d'après (i)}).$$

Exercice VIII.

1) Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$.

La fonction $x \rightarrow \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [0, +\infty[$, alors

$$\int_0^t \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = \left[e^{\arctan x} \right]_0^t = e^{\arctan t} - 1.$$

Donc, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$. Par suite, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$.

2) Nature de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$.

La fonction $x \rightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{4}]$, donc le problème se pose uniquement en 0.

Soit $t \in]0, \frac{\pi}{4}]$, alors

$$\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \left[2\sqrt{\sin x} \right]_t^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin t} = 2^{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{\sin t}.$$

Donc, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = 2^{\frac{3}{4}}$. Par suite, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$ est convergente et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = 2^{\frac{3}{4}}$.

3) Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

La fonction $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [1, +\infty[$, alors

$$\int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^t (\ln x)' \ln x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^t = \frac{(\ln t)^2}{2}.$$

Donc,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = +\infty.$$

Par suite, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ est divergente.

4) Nature de $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$.

La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [2, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} \int_2^t \frac{dx}{x^2-1} &= \int_2^t \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x-1) \right]_2^t - \frac{1}{2} \left[\ln(x+1) \right]_2^t \\ &= \frac{1}{2} \ln(t-1) - \frac{1}{2} \ln(t+1) + \frac{\ln 3}{2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) + \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) + \frac{\ln 3}{2} \right] = \frac{\ln 3}{2}.$$

Par suite, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ est convergente et $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}$.

Exercice IX.

1) Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

La fonction $x \rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ (car $\cos x \leq |\cos x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

On a pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{|1-\cos x|}{x^2} \leq \frac{1+|\cos x|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $2 > 1$), alors $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$ est convergente, par suite $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ est convergente d'après le critère de comparaison.

2) Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{x^\lambda + x^{2-\lambda}}{x^3+1} dx$, $0 < \lambda < 1$.

Soit $0 < \lambda < 1$. La fonction $x \rightarrow \frac{x^\lambda + x^{2-\lambda}}{x^3+1}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

On a

$$x^\lambda + x^{2-\lambda} = x^{2-\lambda} (1 + x^{2(\lambda-1)}),$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2(\lambda-1)} = 0$ (car $0 < \lambda < 1$), alors

$$x^\lambda + x^{2-\lambda} \underset{+\infty}{\sim} x^{2-\lambda}.$$

Par la suite, utilisant de plus le fait que $x^3+1 \underset{+\infty}{\sim} x^3$, on obtient

$$\frac{x^\lambda + x^{2-\lambda}}{x^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{2-\lambda}}{x^3} = \frac{1}{x^{\lambda+1}}.$$

Comme $\lambda+1 > 1$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda+1}}$ est une intégrale de Riemann convergente. D'où, $\int_1^{+\infty} \frac{x^\lambda + x^{2-\lambda}}{x^3+1} dx$ est une intégrale convergente d'après le critère d'équivalence.

3) Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2} dx$.

La fonction $x \rightarrow \frac{1+\ln x}{x+2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

On a

$$\frac{1+\ln x}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}$ est divergente (d'après la troisième question de l'exercice VIII). D'où, $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2} dx$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

4) Nature de $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$.

La fonction $x \rightarrow \frac{e^x}{x}$ est continue et positive sur $]0, 1]$.

On a pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\frac{e^x}{x} > \frac{e^0}{x} = \frac{1}{x} > 0.$$

Comme $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ est une intégrale de Riemann divergente, alors $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$ est divergente d'après le critère de comparaison.

5) Nature de $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

La fonction $x \rightarrow \frac{\ln x}{x^2}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$.

Soit $1 < \alpha < 2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-2} \ln x = 0$. Donc, d'après le critère de Riemann, l'intégrale

$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est convergente.

6) Nature de $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3 + 1}$.

La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x^3 + 1}$ est continue sur $] -1, 0]$.

Comme

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x+1)(x^2 - x + 1)},$$

alors, $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}$. Par suite, d'après le critère de Riemann, l'intégrale

$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3 + 1}$ est divergente.

Exercice X.

1) Soit $t \in [1, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx = \int_1^t \left(\frac{-1}{x} \right)' \ln(1+x^2) dx \\ &= \left[\frac{-\ln(1+x^2)}{x} \right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x} (\ln(1+x^2))' dx \\ &= \left[\frac{-\ln(1+x^2)}{x} \right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x} \times \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{-\ln(1+t^2)}{t} + \ln 2 + \int_1^t \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{-\ln(1+t^2)}{t} + \ln 2 + 2[\arctan x]_1^t \\ &= \frac{-\ln(1+t^2)}{t} + \ln 2 + 2 \arctan t - 2 \arctan 1. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$F(t) = \frac{-\ln(1+t^2)}{t} + 2 \arctan t + \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

2) Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(1+t^2)}{t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$, alors $F(t)$ est convergente quand $t \rightarrow +\infty$, ce qui veut dire que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$ est convergente. Sa valeur est

$$I = \pi + \ln 2 - \frac{\pi}{2} = \ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$