Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Module Analyse II

Arij BOUZELMATE

Filières: **SMP-SMC**

1. **Séries géométriques- Séries télescopiques**
2. **Séries numériques à termes positifs**
3. **Séries numériques à termes de signes quelconques**

Exercice 1

Montrer que les séries suivantes sont convergentes. Calculer leurs sommes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^{n-2}}$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^{n-2}}$

On a $\frac{2^n}{3^{n-2}} = 9\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^{n-2}}$ est une série géométrique convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}} = 9\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 9 \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 27.$$

Série géométrique

Nature de la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

On a $(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n$. Comme $\left|\frac{-1}{4}\right| < 1$, alors $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ est une série géométrique convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{-1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$

On pose $u_n = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$ alors $u_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $v_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n = v_n - v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et dans ce cas, on dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série télescopique.

Soit S_n la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. Donc,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = v_0 = 1$. Donc, la série télescopique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente et sa somme

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1.$$

Exercice 2

Soient $(u_n)_n$ une suite réelle positive et $(v_n)_n$ la suite définie par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Solution

On a $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $0 \leq v_n < 1$ et $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite $u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow v_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$, alors la suite $(v_n)_n$ ne converge pas vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$ et dans ce cas, les deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont divergentes.

Si la suite $(u_n)_n$ converge vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$, alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et donc les deux séries à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature d'après le critère d'équivalence.

Il résulte que dans les deux cas, les deux séries sont de même nature.

Exercice 3

Etudier la nature des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}, \quad x\in\mathbb{R}$.

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$.

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n)$.

Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

On pose $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad n \geq 1.$
On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2(n!)^2(2n)!}{2(n+1)(2n+1)(2n)!(n!)^2} \\ &= \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}. \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$. Par suite, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}, \; x\in\mathbb{R}$

C'est une série à termes positifs à partir d'un certain rang.

On pose $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n^2}$; $\quad n \geq 1.$

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{-x\,\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)}{\dfrac{x}{n}} = 1$, alors, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-x}$.

Par suite, d'après la règle de cauchy, si $x > 0$ (c'est à dire $e^{-x} < 1$), la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et si $x < 0$ (c'est à dire $e^{-x} > 1$), la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Si $x = 0$, alors $u_n = 1$. Donc, u_n ne converge pas vers 0. D'où, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Nature de la série $\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$

C'est une série à termes positifs.
On a
$$n^2 e^{-(\ln n)^2} = e^{2\ln n-(\ln n)^2} = e^{\ln n(2-\ln n)}.$$
Donc, $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-(\ln n)^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n(2-\ln n)} = 0$, alors d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$ est convergente.

Nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n)$

C'est une série à termes positifs.
On a

$$\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n).$$

On a pour tout $1<\alpha<2$, $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n) = 0$. Donc, d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\pi^2}{2n^2}\ln(n)$ est convergente. Par suite, la série $\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln(n)$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

Exercice 4

Etudier la nature des séries suivantes.

1) $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \dfrac{2^n+5}{8^n-11}$.

2) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

Nature de la série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$

Comme $\frac{2^n+5}{8^n-11} \geq 0$ pour tout $n \geq 2$, alors $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}$ est une série alternée.
On a pour tout $n \geq 2$,

$$\left|(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}\right| = \frac{2^n+5}{8^n-11}.$$

Donc

$$\left|(-1)^n \frac{2^n+5}{8^n-11}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n}{8^n} = \left(\frac{2}{8}\right)^n.$$

Série absolument convergente

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left(\frac{2}{8}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\left|\frac{2}{8}\right| < 1$), alors , $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left|(-1)^n\frac{2^n+5}{8^n-11}\right|$ est convergente d'après le critère d'équivalence. Ceci veut dire que $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{2^n+5}{8^n-11}$ est absolument convergente. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{2^n+5}{8^n-11}$ est convergente.

Nature de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

On pose $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$.
Comme $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée.
Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers 0.
On pose $a_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.
La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui entraine que f est décroissante en particulier sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, $f(n) > f(n+1)$ pour tout $n \geq 1$.

Série alternée

D'où, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
De plus, on a

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
On déduit d'après le critère spécial des séries alternées que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.