Sciences Mathématiques et Applications (SMA/S6) Année Universitaire 2020-2021

Travaux Dirigés : Equations Différentielles Ordinaires

Série 1

Exercice I.

On se donne 3 réels $A > 0, B \geq 0$ et $C > 0$. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ vérifiant :

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad {u'}^2(t) \leq B^2 + 2C^2 \int_0^t |u(s)u'(s)|\, ds \quad \forall t \in [0, A]\,.$$

1) En posant $v(t) = \displaystyle\int_0^t |u'(s)|\, ds$, montrer que

$$v(t) \leq \frac{B}{C}(e^{Ct} - 1) \quad \forall t \in [0, A]\,.$$

2) En déduire que pour tout $t \in [0, A]$ on a la majoration suivante :

$$|u(t)| \leq \frac{B}{C}(e^{Ct} - 1) \;\text{ et }\; |u'(t)| \;\leq Be^{Ct} \quad \forall t \in [0, A]\,.$$

Exercice II.

Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,(n \geq 1)$ une fonction Lipschitzienne de rapport k.

1) Montrer que f définie par $f(x, y) = g(x)h(y)$ est localement Lipchitzienne par rapport à y uniformément en x.

2) En déduire que pour chaque $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ le problème suivant

$$(P) \begin{cases} y'(x) = & f(x, y(x)) \\ y(a) = & b \end{cases}$$

admet une unique solution maximale y définie sur un intervalle maximal d'existence $]\alpha, \beta[$.

3) On suppose par l'absurde que $]\alpha, \beta[$ est borné. Montrer que pour tout $x \in\,]\alpha, \beta[$ la solution y vérifie la

majoration suivante

$$\|y(x)\| \leq A + B\, e^{C(x)},$$

où $A,\ B$ sont des constantes et $C(x) \geq 0$ est une fonction positive qui dépend de x à déterminer.

$4)$ En déduire que $]\alpha, \beta[= \mathbb{R}$.

Exercice III.

Soient x_0 et y_0 deux réels. Montrer que le problème

$$(P) \begin{cases} y'(x) = y^2(x) + x^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur un intervalle maximale $]\alpha, \beta[$ borné.

Exercice IV.

Montrer que pour chaque réel a le problème

$$\begin{cases} x'(t) = & t + \sin(x(t)) \\ x(0) = & a \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur $\mathbb{R}$.

Solutions des Exercices

Série 1

Exercice I.

1) Soit $v(t) = \int_0^x |u'(s)|\, ds$. D'où $v'(t) = |u'(t)| \geq 0$. D'où d'après la donnée

$$v'^2(t) = u'^2(t) \leq B^2 + 2C^2 \int_0^x |u'(s)|\, v'(s) ds \quad \forall s \in [0, A]\,.$$

Il faut alors majorer $|u(s)|$ en fonction de $v(s)$; pour cela il faut noter que puisque $u(0) = 0$, alors $u(s) = u(s) - u(0) = \int_0^x u'(y) dy$. D'où

$$|u(s)| \leq \int_0^x |u'(s)|\, ds = v(s).$$

Par suite, en utilisant le fait que $v(0) = 0$,

$$\begin{aligned} v'^2(t) &= u'^2(t) \leq B^2 + 2C^2 \int_0^x v(s) v'(s) ds \\ &= B^2 + 2C^2 \int_0^x \left(\frac{v^2(s)}{2} \right)' ds \\ &\leq B^2 + C^2 v^2(s) \quad \forall s \in [0, A]\,. \end{aligned}$$

D'où

$$|v'(t)| = v'(t) \leq \sqrt{B^2 + C^2 v^2(s)} \leq \sqrt{B^2} + \sqrt{C^2 v^2(s)} \ \leq B + C v(s) \quad \forall s \in [0, A]\,.$$

Donc

$$v'(t) - C v(t) \leq B \quad \forall s \in [0, A]\,,$$

c'est à dire

$$(v(t) e^{-C\, t})' \ \leq B e^{-C\, t} \ \ \forall s \in [0, A]\,.$$

En intégrant sur $[0, t] \subset [0, A]$ on obtient

$$v(t) \leq \frac{B}{C} (e^{C\, t} - 1).$$

2) Comme $|u(t)| \leq \ v(t)$, alors

$$|u(t)| \leq \frac{B}{C} (e^{C\, t} - 1).$$

De même

$$|u'(t)| = \ v'(t) \leq B + Cv(t),$$

donc

$$|u'(t)| \leq B + C\left(\frac{B}{C}(e^{C\ t} - 1)\right) = Be^{Ct} \quad \forall t \in [0, A]\,.$$

Exercice II.

1) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Prenons $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ (par exemple $\varepsilon = 1/2$ et $r = 1/3$) et soit

$$I = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \text{ et } U = B(x_0, r).$$

Comme h est Lipchitzienne alors

$$\|h(y_1) - h(y_2)\| \leq k\,\|y_1\ - y_2\| \quad \forall y_1, y_2) \in U.$$

D'autre part comme est I est compact et g est continue alors

$M = \max\limits_{x \in I} |g(x)|$ existe. Par conséquent on a

$$\begin{aligned}\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| &= \|g(x)(h(y_1) - h(y_2))\| \\ &\leq Mk\,\|y_1 - y_2\| \qquad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in I \times U.\end{aligned}$$

2) La fonction f est continue par rapport à x et localement Lipschitzienne en y uniformément par rapport à x ; d'après le Théorème de Cauchy -Lipschitz le problème (P) admet une unique solution maximale y définie sur un intervalle maximal $]\alpha, \beta[$ contenu dans $\mathbb{R}$ et contenant a.

3) Soit $x \in\,]\alpha, \beta[$. On a

$$y(x) - y(a) = \int_a^x f(s, y(s))ds = \int_a^x [f(s, y(s)) - f(s, y(a)) + f(s, y(a)]\, ds.$$

D'où puisque h est lipshitzienne par rapport à k,

$$\begin{aligned}\|y(x) - b\| \ &\leq \ \int_a^x \Big[\,|g(s)|\,\|h(y(s)) - h(b)\| + |g(s)|\,\|h(b)\|\,\Big] ds \\ &\leq \ k\int_a^x |g(s)| \left\{\|y(s) - b\| + \frac{\|h(b)\|}{k}\right\} ds.\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$u(s) = \|y(s) - b\| + \frac{\|h(b)\|}{k},$$

alors

$$u(x) = \|y(x) - b\| + \frac{\|h(b)\|}{k} \leq \frac{\|h(b)\|}{k} + k \int_a^x |g(s)| \, u(s) ds.$$

Donc d'après le Lemme de Gronwall, on déduit que

$$u(x) \leq \frac{\|h(b)\|}{k} \exp(k \int_a^x |g(s)| \, ds).$$

D'où

$$\begin{aligned} \|y(x)\| &\leq \|y(x) - y(a)\| + \|y(a)\| \\ &\leq u(x) - \frac{\|h(b)\|}{k} + \|b\| \\ &\leq \frac{\|h(b)\|}{k} \exp(k \int_a^x |g(s)| \, ds) - \frac{\|h(b)\|}{k} + \|b\| \, . \end{aligned}$$

En particulier on aura pour tout $x \in \,]\alpha, \beta[$,

$$\|y(x)\| \leq \|b\| + \frac{\|h(b)\|}{k} \exp(k \int_a^x |g(s)| \, ds).$$

4) Comme on a supposé que $]\alpha, \beta[$ est borné et puisque g est continue alors

$$\int_a^x |g(s)| \, ds \leq \int_\alpha^\beta |g(s)| \, ds = L.$$

D'où pour tout $x \in \,]\alpha, \beta[$ on aura

$$\|y(x)\| \leq \frac{\|h(b)\|}{k} e^{Lk} + \|b\| = M.$$

C'est à dire qu'on a trouvé une constante M telle que

$$\|y(x)\| \leq M, \; \forall x \in \,]\alpha, \beta[\, ;$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $]\alpha, \beta[$ est borné. Donc nécessairement $]\alpha, \beta[\, = \mathbb{R}$.

Exercice III.

La fonction f définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(s, u) = s^2 + u^2$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car ses dérivées partielles le sont) ; en particulier f est continue par rapport à s et localement Lipschitzienne par rapport à u uniformément en s. D'où d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz le problème (P) admet une unique solution y définie sur un intervalle maximal $]\alpha, \beta[$ contenant x_0.

Supposons que $\beta = +\infty$. Alors

$$y'(x) = y^2(x) + x^2 \geq y^2(x) + 1 \quad \forall x \in [1\,, +\infty[\,.$$

D'où

$$\int_1^x \frac{y'(s)}{y^2(s)+1} ds \geq x - 1 \quad \forall x \in [1\,, +\infty[\,;$$

C'est à dire

$$Arctg(y(x)) \geq Arctg(y(1)) + x - 1 \quad \forall x \in [1\,, +\infty[\,;$$

Or le premier membre à gauche est borné alors que le second membre à droite tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$; ce qui est absurde. Par suite β est fini.

Le même raisonnemnt se fait pour la borne α. En effet si α est infinie c'est à dire $\alpha = -\infty$; on aura

$$y'(x) = y^2(x) + x^2 \geq y^2(x) + 1 \quad \forall x \in \,]-\infty, -1]\,.$$

D'où

$$\int_x^{-1} \frac{y'(s)}{y^2(s)+1} ds \geq -1 - x \quad \forall x \in \,]-\infty, -1]\,.$$

C'est à dire

$$Arctg(y(x)) \leq Arctg(y(-1)) + x + 1 \quad \forall x \in \,]-\infty, -1]\,;$$

ce qui est absurde et donc α est fini.

En conclusion $]\alpha, \beta[$ est borné.

Exercice IV.

La fonction f définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(s, u) = s + \sin(u)$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car ses dérivées partielles le sont) ; en particulier f est continue par rapport à s et localement Lipschitzienne par rapport à u uniformément en s. D'où d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz le problème (P) admet une unique solution y définie sur un intervalle maximale $]\alpha, \beta[$ contenant 0.

On a

$$x(t) - x(0) = x(t) - a = \int_0^t x'(s)\, ds.$$

On a pour tout $t \in \,]\alpha, \beta[\,$,

$$|x(t)| \leq |a| + \int_0^t |x'(s)|\, ds \leq \int_0^t (|s| + |\sin(x(s))|)\, ds \leq |a| + \int_0^t (|s| + 1) ds.$$

Supposons par l'absurde que β est fini. Alors pour tout $t \in [0, \beta[\,$,

$$|x(t)| \leq |a| + \int_0^\beta (s+1) ds \leq |a| + \left(\frac{\beta^2}{2} + \beta\right).$$

Donc

$$|x(t)| \ \leq M, \ \forall t \in [0, \beta[\,.$$

C'est à dire qu'on a trouvé une constante M majorant x; ce qui contredit le cours. D'où nécessairement $\beta = +\infty$. De la même façon on montre que $\alpha = -\infty$. En conclusion $]\alpha, \beta[\, = \mathbb{R}$.