Masters MAF2/MAP2 Année Universitaire 2015/2016

Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 1

Exercice 1**.** Soit $E = C\big([a,b], \mathbb{R}^{+*}\big)$.

1) Vérifier que pour toutes fonctions $f,\ g \in E$, l'application définie par

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

est un produit scalaire sur E.

2) Soit $f \in E$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right) \geq (b-a)^2.$$

3) Trouver toutes les fonctions $f \in E$ pour lesquelles on a

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right) = (b-a)^2.$$

Exercice 2**.** Soient H un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé de H.

Montrer que pour tout $a \in H$, on a

$$\min_{x\in F}\|a-x\| = \max_{\substack{y\in F^\perp \\ \|y\|=1}} |(a,y)|.$$

Exercice 3**.** Soit H un espace de Hilbert. Soit $x \in H$.

Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'éléments de H et F le sous espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soient F_n le sous espace vectoriel engendré par $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et P_{F_n} la projection orthogonale sur F_n.

1) Montrer que

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k.$$

2) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \|x - P_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

3) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

4) On définit $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 + (d(x, F))^2 = \|x\|^2.$$

Exercice 4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $p' = \dfrac{p}{p-1} < 0$.

1) On suppose que

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \text{ et } 0 < \int_\Omega |g(x)|^{p'} \, dx < +\infty.$$

Montrer que

$$\int_\Omega |f(x) g(x)| \, dx \geq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} \, dx \right)^{1/p'}.$$

2) On suppose que

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \text{ et } \int_\Omega |g(x)|^p \, dx < +\infty.$$

Montrer que

$$\left(\int_\Omega \Big(|f(x)| + |g(x)| \Big)^p dx \right)^{1/p} \geq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Exercice 5. Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p(\mathbb{R}^N)$.

On suppose que $f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$.

Montrer que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Solutions des Exercices

Série 1

Exercice 1.

1) L'application $(f,g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ est une forme hermitienne sur $E \times E$ grâce à la linéarité de l'intégrale et le fait que $(f,g) \in \mathbb{R}$. Montrons qu'elle est définie positive. Soit $f \in E$ telle que

$$(f,f) = \int_a^b f^2(x)\,dx = 0.$$

Comme f^2 est positive et continue sur $[a,b]$, alors $f^2(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et par suite $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

2) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ de l'espace E, on a

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx.$$

C'est à dire

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx.$$

3) L'égalité a lieu si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sqrt{f(x)} = \lambda\,\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

C'est à dire, $f(x) = \lambda$ pour tout $x \in [a,b]$. Et comme f est strictement positive sur $[a,b]$, alors les constantes strictement positives vérifient l'égalité.

Exercice 2.

Comme F est un sous espace vectoriel fermé de H, alors par définition de la projection orthogonale de a sur F, on a

$$\min_{x\in F}\|a-x\| = \|a - P_F(a)\|.$$

Soit $y \in F^{\perp}$ tel que $\|y\| = 1$. Alors, en utilisant le fait que $P_F(a) \in F$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|(a,y)| = |(a - P_F(a), y)| \leq \|a - P_F(a)\|$$

Donc

$$\max_{\substack{y \in F^{\perp} \\ \|y\|=1}} |(a,y)| \leq \|a - P_F(a)\|.$$

D'autre part, comme $a - P_F(a) \in F^{\perp}$, alors

$$\left| \left(a, \frac{a - P_F(a)}{\|a - P_F(a)\|} \right) \right| = \left| \left(a - P_F(a), \frac{a - P_F(a)}{\|a - P_F(a)\|} \right) \right| = \|a - P_F(a)\| \leq \max_{\substack{y \in F^{\perp} \\ \|y\|=1}} |(a,y)|.$$

D'où

$$\min_{x \in F} \|x - a\| = \|a - P_F(a)\| = \max_{\substack{y \in F^{\perp} \\ \|y\|=1}} |(a,y)|.$$

Exercice 3.

Soit $x \in H$.

1) Comme $P_{F_n}(x) \in F_n$, alors il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Mais $P_{F_n}(x)$ est caractérisé par $x - P_{F_n}(x) \in F_n^{\perp}$, c'est à dire pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $(x - P_{F_n}(x), e_i) = 0$. Ceci implique en utilisant le fait que la famille $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est orthonormale que

$$(x, e_i) = (P_{F_n}(x), e_i) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k, e_i) = \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Donc

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k.$$

2) Comme $P_{F_n}(x)$ et $x - P_{F_n}(x)$ sont orthogonaux, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|P_{F_n}(x) + (x - P_{F_n}(x))\|^2 = \|P_{F_n}(x)\|^2 + \|x - P_{F_n}(x)\|^2.$$

Comme la famille $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est orthonormale, alors

$$\begin{aligned} \|P_{F_n}(x)\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \right\|^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k, \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \sum_{j=1}^{n} \overline{(x, e_j)} (e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \overline{(x, e_k)} = \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

3) D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Donc, la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} |(x,e_n)|^2$ est convergente car sa somme partielle $\sum_{k=1}^{n} |(x,e_k)|^2$ est majorée.
Sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(x,e_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

4) D'après les questions précédentes, il suffit de démontrer que $\|x - P_{F_n}(x)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x,F)$. Or $\|x - P_{F_n}(x)\| = d(x,F_n)$, donc il suffit finalement de montrer que $d(x,F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x,F)$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset F$. Donc, $d(x,F) \leq d(x,F_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par définition de la borne inférieure, il existe $y \in F$ tel que

$$\|x-y\| \leq d(x,F) + \varepsilon.$$

Comme $y \in F$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $y \in F_n$. D'où

$$d(x,F_n) \leq \|x-y\|.$$

D'où, pour tout $n \geq n_0$ on a

$$d(x,F) \leq d(x,F_n) \leq d(x,F) + \varepsilon.$$

Ce qui implique que $d(x,F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x,F)$. Le résultat est prouvé.

Exercice 4.

1) Si $\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx = +\infty$, alors l'inégalité est évidente.
On suppose que $\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx < +\infty$, alors $fg \in L^1(\Omega)$.
On pose $q = \dfrac{1}{p} \in]1,+\infty[$ et $q' = \dfrac{-p'}{p} = \dfrac{1}{1-p} \in]1,+\infty[$. Alors, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.
Comme $|fg|^p \in L^q(\Omega)$ et $|g|^{-p} \in L^{q'}(\Omega)$, alors d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega |f(x)|^p\,dx = \int_\Omega |f(x)g(x)|^p\,|g(x)|^{-p}\,dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)g(x)|^{pq}\,dx\right)^{1/q} \left(\int_\Omega |g(x)|^{-pq'}\right)^{1/q'}.$$

C'est à dire

$$\int_\Omega |f(x)|^p\,dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx\right)^{p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'}\right)^{-p/p'}.$$

D'où

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \geq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'}.$$

2) On suppose que $\left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx\right)^{1/p} < +\infty$, $\int_\Omega |f(x)|^p dx > 0$ et $\int_\Omega |g(x)|^p dx > 0$ car sinon l'inégalité est triviale.

On a

$$\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx = \int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p-1}|f(x)|\, dx + \int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p-1}|g(x)|\, dx.$$

On veut appliquer la première question aux deux intégrales du membre à droite de l'inégalité précédente, pour cela il suffit de montrer que

$$\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{(p-1)p'} dx = \int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx > 0.$$

Comme $0 < p < 1$, alors la fonction réelle $t \to t^p$ est concave. Donc

$$\left(\frac{1}{2}|f(x)| + \frac{1}{2}|g(x)|\right)^p \geq \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

Par suite

$$\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx \geq 2^{p-1}\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx + \int_\Omega |g(x)|^p dx\right) > 0.$$

Maintenant, d'après la première question, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p-1}|f(x)|\, dx &\geq \left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{(p-1)p'} dx\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

De même

$$\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^{p-1}|g(x)|\, dx \geq \left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Donc

$$\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx \geq \left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx\right)^{(p-1)/p}\left[\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{1/p}\right].$$

D'où

$$\left(\int_\Omega \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p dx\right)^{1/p} \geq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Exercice 5.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, donc il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas.

- Si $p \in [1, +\infty[$.

Comme $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$, alors $|f_n|^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |f|^p$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$. Par suite d'après le lemme de Fatou, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to+\infty} |f_n(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p\, dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)|^p\, dx \leq M^p.$$

Ce qui entraine que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq M$. Ceci veut dire que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

- Si $p = +\infty$

Comme $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$ et $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$, alors $|f(x)| \leq M$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$. D'où, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$.