



Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 1

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert réel.

On dit que l'application u de H dans H est une isométrie si elle est linéaire et conserve la norme, c'est à dire

$$\|u(x)\| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Montrer que u est une isométrie si et seulement si elle conserve le produit scalaire, c'est à dire

$$(u(x), u(y)) = (x, y) \quad \text{pour tous } x, y \in H.$$

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert.

Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels fermés de H tels que $F_1 \subset F_2$.

Montrer que

$$P_{F_1} \circ P_{F_2} = P_{F_1}$$

où P_{F_1} et P_{F_2} sont respectivement les projections orthogonales sur F_1 et F_2 .

Exercice 3. On considère l'espace préhilbertien $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad \forall f, g \in E.$$

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq \frac{-1}{n}, \\ nx + 1 & \text{si } \frac{-1}{n} \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_2$ issue du produit scalaire défini ci-dessus.

2) Montrer que $(E, \|\cdot\|_2)$ n'est pas complet.

3) On pose

$$F = \left\{ f \in E; f(x) = 0 \quad \forall x \in [-1, 0] \right\}$$

et

$$G = \left\{ f \in E; f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1] \right\}$$

Montrer que $F^\perp = G$.

4) Les sous espaces vectoriels fermés F et G sont-ils supplémentaires ? Conclure.

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments deux à deux orthogonaux.

1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} x_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \|x_n\|^2$ est convergente.

2) On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} x_n$ est convergente.

Montrer la relation de Pythagore généralisée suivante

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

Exercice 5. Soient $f \in L^2([0, 1])$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'éléments de $L^2([0, 1])$.

1) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^t f(s) e_n(s) ds \right|^2 \leq \int_0^t |f(s)|^2 ds \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1)$$

2) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left| \int_0^t f(s) e_n(s) ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(t)|^2 (1-t) dt. \quad (2)$$

3) On suppose que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne.

Montrer qu'on égalité dans (1) et (2).

Solutions des Exercices

Série 1

Exercice 1.

(i) Si u est une isométrie.

Soient $x, y \in H$. En utilisant le fait que H est un espace de Hilbert réel et u est linéaire et conserve la norme, on a

$$\begin{aligned} (u(x), u(y)) &= \frac{1}{2} \left(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

Donc, u conserve le produit scalaire.

(ii) Si u conserve le produit scalaire.

Soit $x \in H$. On a

$$\|u(x)\|^2 = (u(x), u(x)) = (x, x) = \|x\|^2.$$

Donc, u conserve la norme.

Pour montrer que u est linéaire, il suffit de montrer que pour tous $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

Ce qui revient à démontrer que

$$\|u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 = 0.$$

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} \|u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 &= (u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y), u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)) \\ &= (u(x + \lambda y), u(x + \lambda y)) - (u(x + \lambda y), u(x)) - \lambda(u(x + \lambda y), u(y)) \\ &\quad - (u(x), u(x + \lambda y)) + (u(x), u(x)) + \lambda(u(x), u(y)) \\ &\quad - \lambda(u(y), u(x + \lambda y)) + \lambda(u(y), u(x)) + \lambda^2(u(y), u(y)). \end{aligned}$$

Comme u conserve le produit scalaire, alors

$$\begin{aligned} \|u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 &= (x + \lambda y, x + \lambda y) - (x + \lambda y, x) - \lambda(x + \lambda y, y) \\ &\quad - (x, x + \lambda y) + (x, x) + \lambda(x, y) \\ &\quad - \lambda(y, x + \lambda y) + \lambda(y, x) + \lambda^2(y, y) \\ &= \|x + \lambda y - x - \lambda y\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Il résulte que u est linéaire.

Exercice 2.

Comme F_1 et F_2 sont deux sous espaces vectoriels de H , alors on peut appliquer le théorème de la projection orthogonale sur F_1 et sur F_2 .

Soit $x \in H$. On veut montrer que

$$P_{F_1}(P_{F_2}(x)) = P_{F_1}(x).$$

On a $P_{F_1}(x)$ est l'unique élément de F_1 tel que $x - P_{F_1}(x) \in F_1^\perp$, $P_{F_2}(x)$ est l'unique élément de F_2 tel que $x - P_{F_2}(x) \in F_2^\perp \subset F_1^\perp$ (car $F_1 \subset F_2$) et $P_{F_1}(P_{F_2}(x))$ est l'unique élément de F_1 tel que $P_{F_2}(x) - P_{F_1}(P_{F_2}(x)) \in F_1^\perp$. Donc, $x - P_{F_2}(x) + P_{F_2}(x) - P_{F_1}(P_{F_2}(x)) = x - P_{F_1}(P_{F_2}(x)) \in F_1^\perp$. Par suite, d'après l'unicité de la projection de x sur F_1 , on a $P_{F_1}(P_{F_2}(x)) = P_{F_1}(x)$.

Exercice 3.

1) Soient $n \geq m \geq 1$. On a

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \int_{-\frac{1}{m}}^0 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx.$$

Comme $0 \leq f_n \leq 1$ sur $[-1, 1]$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\|f_n - f_m\|_2^2 \leq \frac{4}{m}.$$

D'où, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_2$.

2) On montre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger vers une fonction continue. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une fonction f continue sur $[-1, 1]$ telle que $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

On a

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} |f(x)|^2 dx + \int_{-\frac{1}{n}}^0 |nx + 1 - f(x)|^2 dx + \int_0^1 |1 - f(x)|^2 dx.$$

Comme $nx + 1$ et f sont bornées sur $\left[-\frac{1}{n}, 0\right]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^0 |nx + 1 - f(x)|^2 dx = 0.$$

Par suite, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'expression de $\|f_n - f\|_2^2$, on obtient

$$\int_{-1}^0 |f(x)|^2 dx + \int_0^1 |1 - f(x)|^2 dx = 0.$$

C'est à dire, f est forcément donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Or ceci contredit la continuité de f . Donc, aucune fonction continue ne peut être la limite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On

déduit que $(E, \|\cdot\|_2)$ n'est pas complet.

3) (i) Montrons que $G \subset F^\perp$.

Soit $f \in G$ et soit $g \in F$. On a

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = \int_{-1}^0 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx = 0.$$

Donc, $f \in F^\perp$.

(ii) Montrons que $F^\perp \subset G$.

Soit $f \in F^\perp$, alors

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = 0 \quad \forall g \in F.$$

Donc

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = 0 \quad \forall g \in F.$$

Soit la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0], \\ xf(x) & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Alors, g est continue sur $[-1, 1]$ et $g \in F$. Donc,

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 xf^2(x) dx = 0.$$

La fonction $xf^2(x)$ est positive et continue sur $[0, 1]$, donc $xf^2(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$. Par suite, $f(x) = 0 \forall x \in]0, 1]$. D'où par continuité de f , $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Par suite, $f(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$. C'est à dire, $f \in G$.

Il résulte que $F^\perp = G$.

4) Supposons que $E = F \oplus G$, alors tout $f \in E$ s'écrit d'une façon unique $f(x) = g(x) + h(x) \forall x \in [-1, 1]$ avec $g \in F$ et $h \in G$. En particulier $f(0) = 0$. Ce qui est absurde.

Conclusion : Même si F est un sous espace vectoriel fermé dans un espace préhilbertien, son orthogonal ne lui est pas nécessairement supplémentaire. La bonne hypothèse est que F soit complet.

Exercice 4.

Soient $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} x_n$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} \|x_n\|^2$.

C'est à dire

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

et

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

D'après le théorème de Pythagore, on a pour deux entiers p et q tels que $p < q$,

$$\left\| \sum_{k=p+1}^q x_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^q \|x_k\|^2.$$

Ce qui équivaut à

$$\|S_q - S_p\|^2 = \alpha_q - \alpha_p = |\alpha_q - \alpha_p|.$$

Donc, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy si et seulement si $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'est aussi.

2) D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \quad \forall n \geq 1.$$

Ce qui équivaut à

$$\|S_n\|^2 = \alpha_n \quad \forall n \geq 1.$$

Par suite, comme la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, alors $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est aussi convergente et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n.$$

D'où

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

Exercice 5.

$L^2([0, 1])$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx \quad \forall f, g \in L^2([0, 1]).$$

Comme $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système orthonormal, alors on peut le compléter par une famille $(e_i)_{i \in I}$ tel que $(e_i)_{i \in I \cup \mathbb{N}^*}$ soit une base Hilbertienne.

Soit $t \in [0, 1]$. Posons $f_1(s) = f(s)\chi_{[0,t]}(s)$ pour tout $s \in [0, 1]$. Alors, en utilisant l'égalité de Bessel-Parseval, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds = \int_0^1 |f_1(s)|^2 ds = \|f_1\|_{L^2([0,1])}^2 = \sum_{i \in I \cup \mathbb{N}^*} |(f_1, e_i)|^2.$$

Donc

$$\|f_1\|_{L^2([0,1])}^2 \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |(f_1, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^1 f_1(s)e_n(s) ds \right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^t f(s)e_n(s) ds \right|^2.$$

2) On a d'après la première question,

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_0^t f(s)e_k(s) ds \right|^2 \leq \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

Donc, en intégrant de 0 à 1, on obtient

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n \left| \int_0^t f(s)e_k(s) ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 \int_0^t |f(s)|^2 ds dt = \int_0^1 \int_0^1 |f(s)|^2 \chi_{[0,t]}(s) ds dt.$$

Ceci implique que

$$\sum_{k=1}^n \int_0^1 \left| \int_0^t f(s)e_k(s) ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(s)|^2 \int_s^1 dt ds = \int_0^1 |f(s)|^2 (1-s) ds.$$

La série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \int_0^1 \left| \int_0^t f(s)e_n(s) ds \right|^2 dt$ est convergente car sa somme partielle est majorée.

Sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left| \int_0^t f(s)e_n(s) ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(s)|^2 (1-s) ds.$$

3) Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne, alors d'après l'égalité de Bessel-Parseval, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds = \|f_1\|_{L^2([0,t])}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(f_1, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^t f(s)e_n(s) ds \right|^2.$$

La somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} \left| \int_0^t f(s)e_n(s) ds \right|^2$ est positive, croissante et converge vers $\int_0^t |f(s)|^2 ds$ qui est intégrable pour tout $t \in [0, 1]$. Donc d'après le théorème de la convergence monotone, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left| \int_0^t f(s)e_n(s) ds \right|^2 dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^t f(s)e_n(s) ds \right|^2 dt = \int_0^1 \int_0^t |f(s)|^2 ds dt = \int_0^1 |f(s)|^2 (1-s) ds.$$