Masters MAF2/MAP2 Année Universitaire 2017/2018

Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 1

Exercice 1**.** Soit f une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H.

Montrer que

$$dim(Kerf)^{\perp} = 1.$$

Exercice 2**.** Soit H un espace de Hilbert.

Soit $A : H \to H$ une application linéaire continue. On rappelle que $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A(x)\|$.

1) Prouver que $\|A\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)|$.

2) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $A^* : H \to H$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées.

(a) $(A(x), y) = (x, A^*(y)) \quad \forall x,\ y \in H$.

(b) A^* est continue de H dans H.

(c) $\|A\| = \|A^*\|$.

(d) $(A^*)^* = A$.

L'application linéaire continue A^* est appelée adjoint de A.

3) Montrer que

$$(A(x), y) = \frac{1}{4}\Big[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) + i\Big((A(x+iy), x+iy) - (A(x-iy), x-iy)\Big)\Big] \quad \forall x,\ y \in H.$$

4) Supposons que $A = A^*$. On dit dans ce cas que A est symétrique ou auto-adjoint.

Montrer que $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(A(x), x)|$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x(1 + |\ln x|)^2}.$$

1) Montrer que $f \in L^1(]0, 1])$.

2) Montrer que $f \notin L^p(]0, 1])$ pour tout $p \in]1, +\infty]$.

3) Montrer que $f \in L^p([1, +\infty[)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Exercice 4. Soient $p \in [1, +\infty]$ et p' son exposant conjugué. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\mathbb{R}^N)$.

On suppose que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

1) Montrer que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ telle que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$f_n g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} fg \qquad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^N).$$

2) Montrer que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ *p.p.* sur $\mathbb{R}^N$ et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$, alors

$$f_n g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} fg \qquad \text{dans } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Exercice 5. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$f_n \rightharpoonup f \qquad \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^N).$$

C'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \text{pour tout } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

1) Montrer que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

2) On suppose de plus que $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Solutions des Exercices

Série 1

Exercice 1.

Soit f une forme linéaire continue sur H non identiquement nulle. Donc, $Kerf$ est un sous espace fermé de H. Par suite

$$H = Kerf \oplus (kerf)^{\perp}.$$

Cela veut dire que tout élément x de H s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_0 + x_1$ avec $x_0 \in Kerf$ et $x_1 \in (kerf)^{\perp}$.

Soit $y_0 \in (kerf)^{\perp}$ tel que $y_0 \neq 0$. Alors, tout élément x de H peut s'écrire sous la forme

$$x = x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0 + \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0.$$

Il est clair que $x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0 \in Kerf$ et que $\frac{f(x)}{f(y_0)} y_0 \in (kerf)^{\perp}$. Il en résulte que $(kerf)^{\perp}$ est engendré par y_0 et donc de dimension 1.

Exercice 2.

1) Soient $x,\ y \in H$ tels que $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$. Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(A(x), y)| \leq \|A(x)\|\,\|y\| \leq \|A\|\,\|x\|\,\|y\| \leq \|A\|.$$

Donc

$$\sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(A(x), y)| \leq \|A\|.$$

D'autre part, pour tout $x \in H \backslash \{0\}$,

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \left(A\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{A(x)}{\|A(x)\|} \right) \leq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(A(x), y)|\,.$$

D'où

$$\|A\| \leq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(A(x), y)|\,.$$

Il résulte que

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)| \,.$$

2) (a) L'application $T_y \,:\, x \to (A(x), y)$ est une forme linéaire continue sur H pour tout $y \in H$. Donc, d'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe un unique $z_y \in H$ tel que

$$< T_y, x >= (x, z_y) \quad \text{pour tout } x \in H.$$

C'est à dire

$$(A(x), y) = (x, z_y) \quad \text{pour tout } x \in H.$$

On prend $A^*(y) = z_y$. L'application $A^* \,:\, H \to H$ est évidemment bien définie, linéaire et unique.

(b) Montrons que A^* est continue de H dans H.

Soit $x \in H$. Alors, pour tout $y \in H$ tel que $\|y\| \leq 1$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(A^*(x), y)| \leq \|A^*(x)\| \, \|y\| \leq \|A^*(x)\|.$$

Donc

$$\sup_{\|y\|\leq 1} |(A^*(x), y)| \leq \|A^*(x)\|.$$

D'autre part, on a

$$\|A^*(x)\| = \left(A^*(x), \frac{A^*(x)}{\|A^*(x)\|} \right) \leq \sup_{\|y\|\leq 1} |(A^*(x), y)|.$$

Donc

$$\|A^*(x)\| = \sup_{\|y\|\leq 1} |(A^*(x), y)| = \sup_{\|y\|\leq 1} |(y, A^*(x))| = \sup_{\|y\|\leq 1} |(A(y), x)| \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|A(y)\| \|x\|.$$

Donc, A^* est continue.

$c)$ On a d'après la première question

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(x, A^*(y))| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(A^*(y), x)| = \|A^*\|.$$

$d)$ Pour tous x, $y \in H$, on a

$$(x, A(y)) = \overline{(A(y), x)} = \overline{(y, A^*(x))} = (A^*(x), y) = (x, (A^*)^*(y)).$$

Donc, $(A^*)^* = A$.

3) Il est facile de voir que pour tous $x,\, y \in H$

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 2(A(x), y) + 2(A(y), x)$$

et

$$i\Big((A(x+iy), x+iy) - (A(x-iy), x-iy)\Big) = 2(A(x), y) - 2(A(y), x).$$

Le résultat en découle.

4) Posons $M = \sup\limits_{\|x\|=1} |(A(x), x)|$.

Soit $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(A(x), x)| \leq \|A(x)\|\, \|x\| \leq \|A\|\, \|x\|^2 = \|A\|.$$

Donc

$$M = \sup_{\|x\|=1} |(A(x), x)| \leq \|A\|.$$

Montrons maintenant que $\|A\| \leq M$.

Comme $A = A^*$, alors pour tout $x \in H$,

$$(A(x), x) = (x, A^*(x)) = (x, A(x)) = \overline{(A(x), x)}.$$

Donc, $(A(x), x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$. Par suite, d'après la troisième question, on a pour tous $x,\, y \in H$

$$Re(A(x), y) = \frac{1}{4}\Big[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)\Big].$$

Or pour tout $x \in H$,

$$|(A(x), x)| \leq \sup_{\|x\|=1} |(A(x), x)|\, \|x\|^2 = M\|x\|^2.$$

Donc

$$Re(A(x), y) \leq \frac{M}{4}\Big[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\Big] \quad \forall x,\, y \in H$$

D'où, d'après l'identité de parallélogramme

$$Re(A(x), y) \leq \frac{M}{2}\Big[\|x\|^2 + \|y\|^2\Big] \quad \forall x,\, y \in H.$$

On pose $\lambda = \dfrac{(A(x), y)}{|(A(x), y)|}$, alors $|\lambda| = 1$ et

$$(A(x), \lambda y) = |(A(x), y)|.$$

Par suite

$$|(A(x), y)| = (A(x), \lambda y) = Re(A(x), \lambda y) \leq \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|\lambda y\|^2\right] = \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \quad \forall x,\, y \in H.$$

Ainsi, si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, on a

$$|(A(x), y)| \leq M.$$

D'où

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(A(x), y)| \leq M.$$

Il résulte que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(A(x), x)|.$$

Exercice 3.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x(1 + |\ln x|)^2}.$$

1) La fonction f est strictement positive sur $]0, +\infty[$. On effectue le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, on obtient

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y(1 + \ln y)^2}\, dy = \left[\frac{-1}{1 + \ln y}\right]_1^{+\infty} = 1.$$

Donc, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx$ est convergente, d'où $f \in L^1(]0, 1])$.

2) On distingue deux cas.

Cas 1. $1 < p < +\infty$.

Comme

$$\lim_{x \to 0^+} x|f(x)|^p = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{p-1}(1 + |\ln x|)^{2p}} = +\infty,$$

alors, d'après la règle de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^p\, dx$ est divergente, d'où $f \notin L^p(]0, 1])$.

Cas 2. $p = +\infty$.

Comme $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, alors f n'est pas bornée au voisinage de 0, d'où $f \notin L^\infty(]0,1])$.

3) On distingue trois cas.

Cas 1. $p = 1$.

Comme

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln x)^2}\, dx = 1,$$

alors, $f \in L^1([1,+\infty[)$.

Cas 2. $1 < p < +\infty$.

On a

$$|f(x)|^p = \frac{1}{x^p(1+\ln x)^{2p}} \leq \frac{1}{x^p} \qquad \forall x \in [1,+\infty[.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ est une intégrale de Riemann convergente alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)|^p\, dx$ est aussi convergente. D'où, $f \in L^p([1,+\infty[)$.

Cas 3. $p = +\infty$.

Comme f est positive, continue et décroissante sur $[1,+\infty[$, alors

$$f(x) \leq f(1) = 1 \qquad \forall x \in [1,+\infty[.$$

Donc, $f \in L^\infty([1,+\infty[)$.

Exercice 4.

1) D'abord, $f_n g_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $fg \in L^1(\mathbb{R}^N)$ d'après l'inégalité de Hölder. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)|\, |g_n(x)|\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |g_n(x) - g(x)|\, |f(x)|\, dx \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, \|g_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} + \leq \|g_n - g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Comme $\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\|g_n - g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|g_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}$ est bornée car la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, alors le terme à droite de l'inégalité précédente converge vers 0 quand $n \to +\infty$.

D'où le résultat.

2) On a

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|(f_n - f)g_n + (g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|(f_n - f)g_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq M\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Comme $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$ et $|g_n(x)| \leq \|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$, alors $|g(x)| \leq M$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$. Par suite, $(g_n(x) - g(x))f(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$ et

$$|(g_n(x) - g(x))f(x)| \leq (|g_n(x)| + |g(x)|)\,|f(x)| \leq 2M|f(x)| \;\; p.p.\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Par suite, d'après le théorème de la convergence dominée dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, comme

$$\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors

$$\|f_n g_n - fg\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 5.

1) Comme $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(x)\,dx = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx \leq \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx = \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx &\leq \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

2) $L^2(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert et on a

$$\|f_n - f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (f_n - f, f_n - f)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - 2\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) f(x)\, dx.$$

Comme $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, alors $\|f_n - f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$