Masters MAF2/MAP2 Année Universitaire 2020/2021

**Travaux Dirigés**

**Equations aux dérivées partielles**

**Série 1**

**Exercice** 1. Soit $H$ un espace de Hilbert réel.

On dit que l'application $u$ de $H$ dans $H$ est une isométrie si elle est linéaire et conserve la norme, c'est à dire

$$\|u(x)\| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Montrer que $u$ est une isométrie si et seulement si elle conserve le produit scalaire, c'est à dire

$$(u(x), u(y)) = (x, y) \quad \text{pour tous } x,\, y \in H.$$

**Exercice** 2. Soit $H$ un espace de Hilbert.

Soient $F_1$ et $F_2$ deux sous espaces vectoriels fermés de $H$ tels que $F_1 \subset F_2$.

Montrer que

$$P_{F_1} \circ P_{F_2} = P_{F_1}$$

où $P_{F_1}$ et $P_{F_2}$ sont respectivement les projections orthogonales sur $F_1$ et $F_2$.

**Exercice** 3. On considère l'espace préhilbertien $E = C\big([-1,1], \mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx \quad \forall f,\, g \in E.$$

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $E$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \le x \le \dfrac{-1}{n}, \\ nx + 1 & \text{si } \dfrac{-1}{n} \le x \le 0, \\ 1 & \text{si } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$ issue du produit scalaire défini ci-desus.

2) Montrer que $(E,\ \|.\|_2)$ n'est pas complet.

3) On pose

$$F = \Big\{ f \in E;\ f(x) = 0\ \ \forall x \in [-1, 0] \Big\}$$

et

$$G = \Big\{ f \in E;\ f(x) = 0\ \ \forall x \in [0, 1] \Big\}$$

Montrer que $F^\perp = G$.

4) Les sous espaces vectoriels fermés $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires ? Conclure.

**Exercice** 4**.** Soit $H$ un espace de Hilbert. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments deux à deux orthogonaux.

1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 1} \|x_n\|^2$ est convergente.

2) On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ est convergente.

Montrer la relation de Pythagore généralisée suivante

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

**Exercice** 5**.** Soient $f \in L^2([0,1])$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'éléments de $L^2([0,1])$.

1) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^t f(s) e_n(s)\, ds \right|^2 \leq \int_0^t |f(s)|^2\, ds \qquad \forall t \in [0,1]. \quad (1)$$

2) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left| \int_0^t f(s) e_n(s)\, ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(t)|^2 (1-t)\, dt. \quad (2)$$

3) On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne.

Montrer qu'on égalité dans (1) et (2).

**Solutions des Exercices**

**Série 1**

**Exercice 1.**

$(i)$ Si $u$ est une isométrie.

Soient $x,\ y \in H$. En utilisant le fait que $H$ est un espace de Hilbert réel et $u$ est linéaire et conserve la norme, on a

$$\begin{aligned}(u(x), u(y)) &= \frac{1}{2}\Big(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big)\\ &= (x, y)\end{aligned}$$

Donc, $u$ conserve le produit scalaire.

$(ii)$ Si $u$ conserve le produit scalaire.

Soit $x \in H$. On a

$$\|u(x)\|^2 = (u(x), u(x)) = (x, x) = \|x\|^2.$$

Donc, $u$ conserve la norme.

Pour montrer que $u$ est linéaire, il suffit de montrer que pour tous $x,\ y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

Ce qui revient à démontrer que

$$\|u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 = 0.$$

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}\|u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 &= (u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y), u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y))\\ &= (u(x+\lambda y), u(x+\lambda y)) - (u(x+\lambda y), u(x)) - \lambda(u(x+\lambda y), u(y))\\ &- (u(x), u(x+\lambda y)) + (u(x), u(x)) + \lambda(u(x), u(y))\\ &- \lambda(u(y), u(x+\lambda y)) + \lambda(u(y), u(x)) + \lambda^2(u(y), u(y)).\end{aligned}$$

Comme $u$ conserve le produit scalaire, alors

$$\begin{aligned}\|u(x+\lambda y)-u(x)-\lambda u(y)\|^2 &= (x+\lambda y, x+\lambda y)-(x+\lambda y, x)-\lambda(x+\lambda y, y)\\ &-(x, x+\lambda y)+(x,x)+\lambda(x,y)\\ &-\lambda(y, x+\lambda y)+\lambda(y,x)+\lambda^2(y,y)\\ &=\|x+\lambda y-x-\lambda y)\|^2=0.\end{aligned}$$

Il résulte que $u$ est linéaire.

**Exercice** 2.

Comme $F_1$ et $F_2$ sont deux sous espaces vectoriels de $H$, alors on peut appliquer le théorème de la projection orthogonale sur $F_1$ et sur $F_2$.

Soit $x \in H$. On veut montrer que

$$P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right)=P_{F_1}(x).$$

On a $P_{F_1}(x)$ est l'unique élément de $F_1$ tel que $x-P_{F_1}(x) \in F_1^{\perp}$, $P_{F_2}(x)$ est l'unique élément de $F_2$ tel que $x-P_{F_2}(x) \in F_2^{\perp} \subset F_1^{\perp}$ (car $F_1 \subset F_2$) et $P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right)$ est l'unique élément de $F_1$ tel que $P_{F_2}(x)-P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right) \in F_1^{\perp}$. Donc, $x-P_{F_2}(x)+P_{F_2}(x)-P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right)=x-P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right) \in F_1^{\perp}$. Par suite, d'après l'unicité de la projection de $x$ sur $F_1$, on a $P_{F_1}\left(P_{F_2}(x)\right)=P_{F_1}(x)$.

**Exercice** 3.

1) Soient $n \geq m \geq 1$. On a

$$\|f_n-f_m\|_2^2=\int_{-1}^{1}|f_n(x)-f_m(x)|^2\,dx=\int_{\frac{-1}{m}}^{0}|f_n(x)-f_m(x)|^2\,dx.$$

Comme $0 \leq f_n \leq 1$ sur $[-1,1]$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\|f_n-f_m\|_2^2 \leq \frac{4}{m}.$$

D'où, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$.

2) On montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger vers une fonction continue. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une fonction $f$ continue sur $[-1,1]$ telle que $\|f_n-f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx = \int_{-1}^{\frac{-1}{n}} |f(x)|^2\, dx + \int_{\frac{-1}{n}}^{0} |nx + 1 - f(x)|^2\, dx + \int_{0}^{1} |1 - f(x)|^2\, dx.$$

Comme $nx+1$ et $f$ sont bornées sur $\left[\frac{-1}{n}, 0\right]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{-1}{n}}^{0} |nx + 1 - f(x)|^2\, dx = 0.$$

Par suite, en passant à la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ dans l'expression de $\|f_n - f\|_2^2$, on obtient

$$\int_{-1}^{0} |f(x)|^2\, dx + \int_{0}^{1} |1 - f(x)|^2\, dx = 0.$$

C'est à dire, $f$ est forcément donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; -1 \le x \le 0\,, \\ 1 & \text{si } \; 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Or ceci contredit la continuité de $f$. Donc, aucune fonction continue ne peut être la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On déduit que $(E,\ \|.\|_2)$ n'est pas complet.

3) $(i)$ Montrons que $G \subset F^{\perp}$.

Soit $f \in G$ et soit $g \in F$. On a

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f(x)g(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)g(x)\, dx = 0.$$

Donc, $f \in F^{\perp}$.

$(ii)$ Montrons que $F^{\perp} \subset G$.

Soit $f \in F^{\perp}$, alors

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx = 0 \quad \forall g \in F.$$

Donc

$$\int_{0}^{1} f(x)g(x)\, dx = 0 \quad \forall g \in F.$$

Soit la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \in [-1, 0], \\ xf(x) & \text{si } \; x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Alors, $g$ est continue sur $[-1,1]$ et $g \in F$. Donc,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 xf^2(x)\,dx = 0.$$

La fonction $xf^2(x)$ est positive et continue sur $[0,1]$, donc $xf^2(x) = 0\ \forall x \in [0,1]$. Par suite, $f(x) = 0\ \forall x \in ]0,1]$. D'où par continuité de $f$, $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Par suite, $f(x) = 0\ \forall x \in [0,1]$. C'est à dire, $f \in G$.

Il résulte que $F^{\perp} = G$.

4) Supposons que $E = F \oplus G$, alors tout $f \in E$ s'écrit d'une façon unique $f(x) = g(x) + h(x)\ \forall x \in [-1,1]$ avec $g \in F$ et $h \in G$. En particulier $f(0) = 0$. Ce qui est absurde.

Conclusion : Même si $F$ est un sous espace vectoriel fermé dans un espace préhilbertien, son orthogonal ne lui est pas nécessairement supplémentaire. La bonne hypothèse est que $F$ soit complet.

**Exercice** 4**.**

Soient $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|^2$. C'est à dire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

et

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

D'après le théorème de Pythagore, on a pour deux entiers $p$ et $q$ tels que $p < q$,

$$\left\|\sum_{k=p+1}^{q} x_k\right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2.$$

Ce qui équivaut à

$$\|S_q - S_p\|^2 = \alpha_q - \alpha_p = |\alpha_q - \alpha_p|.$$

Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy si et seulement si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi.

2) D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \quad \forall n \geq 1.$$

Ce qui équivaut à

$$\|S_n\|^2 = \alpha_n \quad \forall n \geq 1.$$

Par suite, comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi convergente et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n\|^2 = \|\lim_{n\to+\infty} S_n\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n.$$

D'où

$$\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

**Exercice** 5.

$L^2([0,1])$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad \forall f,\, g \in L^2([0,1]).$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système orthonormal, alors on peut le compléter par une famille $(e_i)_{i\in I}$ tel que $(e_i)_{i\in I\cup\mathbb{N}^*}$ soit une base Hilbertienne.

Soit $t\in[0,1]$. Posons $f_1(s) = f(s)\chi_{[0,t]}(s)$ pour tout $s\in[0,1]$. Alors, en utilisant l'égalité de Bessel-Parseval, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2\,ds = \int_0^1 |f_1(s)|^2\,ds = \|f_1\|^2_{L^2([0,1])} = \sum_{i\in I\cup\mathbb{N}^*} |(f_1,e_i)|^2.$$

Donc

$$\|f_1\|^2_{L^2([0,1])} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |(f_1,e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\int_0^1 f_1(s)e_n(s)\,ds\right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2.$$

2) On a d'après la première question,

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\int_0^t f(s)e_k(s)\,ds\right|^2 \leq \int_0^t |f(s)|^2\,ds.$$

Donc, en intégrant de $0$ à $1$, on obtient

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left|\int_0^t f(s)e_k(s)\,ds\right|^2\,dt \leq \int_0^1 \int_0^t |f(s)|^2\,ds\,dt = \int_0^1 \int_0^1 |f(s)|^2\chi_{[0,t]}(s)\,ds\,dt.$$

Ceci implique que

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \left|\int_0^t f(s)e_k(s)\,ds\right|^2\,dt \leq \int_0^1 |f(s)|^2 \int_s^1\,dt\,ds = \int_0^1 |f(s)|^2(1-s)\,ds.$$

La série à termes positifs $\sum_{n\geq 1}\int_0^1 \left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 dt$ est convergente car sa somme partielle est majorée. Sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(s)|^2(1-s)\,ds.$$

3) Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne, alors d'après l'égalité de Bessel-Parseval, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2\,ds = \|f_1\|^2_{L^2([0,1])} = \sum_{n=1}^{+\infty} |(f_1, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2.$$

La somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1}\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2$ est positive, croissante et converge vers $\int_0^t |f(s)|^2\,ds$ qui est intégrable pour tout $t\in[0,1]$. Donc d'après le théorème de la convergence monotone, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 dt = \int_0^1\int_0^t |f(s)|^2\,ds\,dt = \int_0^1 |f(s)|^2(1-s)\,ds.$$