ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Travaux Dirigés: Série 1

Arij Bouzelmate

Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Masters: Mathématiques Appliquées à la Finance / Mathématiques et Applications

Travaux Dirigés

Exercice 1

On considère l'espace préhilbertien $E = C\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \quad \forall f,\, g \in E.$$

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; -1 \leq x \leq \dfrac{-1}{n}\,, \\ nx+1 & \text{si } \; \dfrac{-1}{n} \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{si } \; 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$ issue du produit scalaire défini ci-desus.
2) Montrer que $(E,\, \|.\|_2)$ n'est pas complet.

Exercice 1 (suite)

3) On pose

$$F = \left\{ f \in E;\ f(x) = 0 \ \ \forall x \in [-1, 0] \right\}$$

et

$$G = \left\{ f \in E;\ f(x) = 0 \ \ \forall x \in [0, 1] \right\}$$

Montrer que $F^{\perp} = G$.

4) Les sous espaces vectoriels fermés F et G sont-ils supplémentaires ? Conclure.

Solution Exercice 1

1) Soient $n \geq m \geq 1$. On a

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx = \int_{\frac{-1}{m}}^{0} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx.$$

Comme $0 \leq f_n \leq 1$ sur $[-1, 1]$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\|f_n - f_m\|_2^2 \leq \frac{4}{m}.$$

D'où, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$.
2) On montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger vers une fonction continue. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une fonction f continue sur $[-1, 1]$ telle que $\|f_n - f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution Exercice 1 (suite)

On a

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx$$
$$= \int_{-1}^{\frac{-1}{n}} |f(x)|^2 \, dx + \int_{\frac{-1}{n}}^{0} |nx + 1 - f(x)|^2 \, dx + \int_{0}^{1} |1 - f(x)|^2 \, dx.$$

Comme $nx + 1$ et f sont bornées sur $\left[\frac{-1}{n}, 0\right]$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\frac{-1}{n}}^{0} |nx + 1 - f(x)|^2 \, dx = 0.$$

Solution Exercice 1 (suite)

Par suite, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'expression de $\|f_n - f\|_2^2$, on obtient

$$\int_{-1}^{0} |f(x)|^2 \, dx + \int_{0}^{1} |1 - f(x)|^2 \, dx = 0.$$

C'est à dire, f est forcément donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0\,, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Or ceci contredit la continuité de f. Donc, aucune fonction continue ne peut être la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On déduit que $(E, \|.\|_2)$ n'est pas complet.

Solution Exercice 1 (suite)

3) (i) Montrons que $G \subset F^{\perp}$.
Soit $f \in G$ et soit $g \in F$. On a

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)g(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Donc, $f \in F^{\perp}$.
(ii) Montrons que $F^{\perp} \subset G$.
Soit $f \in F^{\perp}$, alors

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = 0 \quad \forall g \in F.$$

Donc

$$\int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx = 0 \quad \forall g \in F.$$

Solution Exercice 1 (suite)

Soit la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [-1, 0], \\ xf(x) & \text{si} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Alors, g est continue sur $[-1, 1]$ et $g \in F$. Donc,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 x\,f^2(x)\,dx = 0.$$

La fonction $x\,f^2(x)$ est positive et continue sur $[0, 1]$, donc $xf^2(x) = 0\ \forall x \in [0, 1]$. Par suite, $f(x) = 0\ \forall x \in]0, 1]$. D'où par continuité de f, $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Par suite, $f(x) = 0\ \forall x \in [0, 1]$.
C'est à dire, $f \in G$.
Il résulte que $F^{\perp} = G$.

Solution Exercice 1 (suite)

4) Supposons que $E = F \oplus G$, alors tout $f \in E$ s'écrit d'une façon unique $f(x) = g(x) + h(x)$ $\forall x \in [-1, 1]$ avec $g \in F$ et $h \in G$. En particulier $f(0) = 0$. Ce qui est absurde. $\square$

Conclusion : Même si F est un sous espace vectoriel fermé dans un espace préhilbertien, son orthogonal ne lui est pas nécessairement supplémentaire. La bonne hypothèse est que F soit complet.

Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert.
Soit $A: \ H \to H$ une application linéaire continue. On rappelle que $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A(x)\|$.
1) Prouver que $\|A\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)|$.
2) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $A^* : \ H \to H$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées.
(a) $(A(x), y) = (x, A^*(y)) \quad \forall x, \ y \in H$.
(b) A^* est continue de H dans H.
(c) $\|A\| = \|A^*\|$.
(d) $(A^*)^* = A$.
L'application linéaire continue A^* est appelée adjoint de A.

Exercice 2 (suite)

3) Montrer que

$$(A(x),y)=\frac{1}{4}\Big[(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)+ \\ i\Big((A(x+iy),x+iy)-(A(x-iy),x-iy)\Big)\Big] \quad \forall x,\ y\in H.$$

4) Supposons que $A=A^*$. On dit dans ce cas que A est symétrique ou auto-adjoint.
Montrer que $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(A(x),x)|$.

Solution Exercice 2

1) Soient x, $y \in H$ tels que $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$. Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(A(x), y)| \leq \|A(x)\| \, \|y\| \leq \|A\| \, \|x\| \, \|y\| \leq \|A\|.$$

Donc

$$\sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(A(x), y)| \leq \|A\|.$$

D'autre part, pour tout $x \in H \backslash \{0\}$,

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \left(A\left(\frac{x}{\|x\|} \right), \frac{A(x)}{\|A(x)\|} \right) \leq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(A(x), y)| \, .$$

D'où $\|A\| \leq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(A(x), y)|$.

Solution Exercice 2 (suite)

Il résulte que

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)| .$$

2) (a) L'application $T_y : x \to (A(x), y)$ est une forme linéaire continue sur H pour tout $y \in H$. Donc, d'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe un unique $z_y \in H$ tel que

$$< T_y, x >= (x, z_y) \quad \text{pour tout } x \in H.$$

C'est à dire

$$(A(x), y) = (x, z_y) \quad \text{pour tout } x \in H.$$

On prend $A^*(y) = z_y$. L'application $A^* : H \to H$ est évidemment bien définie, linéaire et unique.

Solution Exercice 2 (suite)

(b) Montrons que A^* est continue de H dans H.
Soit $x \in H$. Alors, pour tout $y \in H$ tel que $\|y\| \leq 1$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(A^*(x), y)| \leq \|A^*(x)\| \, \|y\| \leq \|A^*(x)\|.$$

Donc

$$\sup_{\|y\| \leq 1} |(A^*(x), y)| \leq \|A^*(x)\|.$$

D'autre part, on a

$$\|A^*(x)\| = \left(A^*(x), \frac{A^*(x)}{\|A^*(x)\|} \right) \leq \sup_{\|y\| \leq 1} |(A^*(x), y)|.$$

Solution Exercice 2 (suite)

Donc

$$\begin{aligned}\|A^*(x)\| &= \sup_{\|y\|\leq 1} |(A^*(x), y)| = \sup_{\|y\|\leq 1} |(y, A^*(x))| \\ &= \sup_{\|y\|\leq 1} |(A(y), x)| \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|A(y)\| \|x\|.\end{aligned}$$

Donc, A^* est continue.
$c)$ On a d'après la première question

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |(x, A^*(y))| \\ &= \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |(A^*(y), x)| = \|A^*\|.\end{aligned}$$

Solution Exercice 2 (suite)

d) Pour tous x, $y \in H$, on a

$$(x, A(y)) = \overline{(A(y), x)} = \overline{(y, A^*(x))} = (A^*(x), y) = (x, (A^*)^*(y)).$$

Donc, $(A^*)^* = A$.
3) Il est facile de voir que pour tous x, $y \in H$

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 2(A(x), y) + 2(A(y), x)$$

et

$$i\Big((A(x+iy), x+iy) - (A(x-iy), x-iy)\Big) = 2(A(x), y) - 2(A(y), x).$$

Le résultat en découle.

Solution Exercice 2 (suite)

4) Posons $M = \sup_{\|x\|=1} |(A(x), x)|$.

Soit $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(A(x), x)| \leq \|A(x)\| \, \|x\| \leq \|A\| \, \|x\|^2 = \|A\|.$$

Donc

$$M = \sup_{\|x\|=1} |(A(x), x)| \leq \|A\|.$$

Montrons maintenant que $\|A\| \leq M$.
Comme $A = A^*$, alors pour tout $x \in H$,

$$(A(x), x) = (x, A^*(x)) = (x, A(x)) = \overline{(A(x), x)}.$$

Donc, $(A(x), x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$.

Solution Exercice 2 (suite)

Par suite, d'après la troisième question, on a pour tous $x,\ y \in H$

$$Re(A(x), y) = \frac{1}{4}\Big[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)\Big].$$

Or pour tout $x \in H$,

$$|(A(x), x)| \leq \sup_{\|x\|=1} |(A(x), x)|\, \|x\|^2 = M\|x\|^2.$$

Donc

$$Re(A(x), y) \leq \frac{M}{4}\Big[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\Big] \quad \forall x,\ y \in H$$

D'où, d'après l'identité de parallélogramme
$$Re(A(x), y) \leq \frac{M}{2}\Big[\|x\|^2 + \|y\|^2\Big] \quad \forall x,\ y \in H.$$

Solution Exercice 2 (suite)

On pose $\lambda = \dfrac{(A(x), y)}{|(A(x), y)|}$, alors $|\lambda| = 1$ et $(A(x), \lambda y) = |(A(x), y)|$.
Par suite

$$\begin{aligned}|(A(x), y)| = (A(x), \lambda y) = Re(A(x), \lambda y) &\leq \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|\lambda y\|^2\right] \\ &= \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \quad \forall x,\ y \in H.\end{aligned}$$

Ainsi, si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, on a $|(A(x), y)| \leq M$.
D'où $\|A\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |(A(x), y)| \leq M$.
Il résulte que $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(A(x), x)|$. $\square$

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert. Soit $x \in H$.
Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'éléments de H et F le sous espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Soient F_n le sous espace vectoriel engendré par $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et P_{F_n} la projection orthogonale sur F_n.

1) Montrer que

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k.$$

2) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \|x - P_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Exercice 3 (suite)

3) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

4) On définit $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 + (d(x, F))^2 = \|x\|^2.$$

Solution Exercice 3

Soit $x \in H$.
1) Comme $P_{F_n}(x) \in F_n$, alors il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Mais $P_{F_n}(x)$ est caractérisé par $x - P_{F_n}(x) \in F_n^{\perp}$, c'est à dire pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $(x - P_{F_n}(x), e_i) = 0$. Ceci implique en utilisant le fait que la famille $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est orthonormale que

$$(x, e_i) = (P_{F_n}(x), e_i) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k, e_i) = \alpha_i \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Donc

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k.$$

Solution Exercice 3 (suite)

2) Comme $P_{F_n}(x)$ et $x - P_{F_n}(x)$ sont orthogonaux, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|P_{F_n}(x) + (x - P_{F_n}(x))\|^2 = \|P_{F_n}(x)\|^2 + \|x - P_{F_n}(x)\|^2.$$

Comme la famille $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est orthonormale, alors

$$\|P_{F_n}(x)\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k, \sum_{j=1}^{n}(x, e_j)e_j\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)\sum_{j=1}^{n}\overline{(x, e_j)}(e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)\overline{(x, e_k)} = \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2.$$

D'où le résultat.

Solution Exercice 3 (suite)

3) D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Donc, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} |(x, e_n)|^2$ est convergente car sa somme partielle $\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2$ est majorée. Sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Solution Exercice 3 (suite)

4) D'après les questions précédentes, il suffit de démontrer que $\|x - P_{F_n}(x)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x,F)$. Or $\|x - P_{F_n}(x)\| = d(x,F_n)$, donc il suffit finalement de montrer que $d(x,F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x,F)$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset F$. Donc, $d(x,F) \leq d(x,F_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par définition de la borne inférieure, il existe $y \in F$ tel que

$$\|x - y\| \leq d(x,F) + \varepsilon.$$

Comme $y \in F$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $y \in F_n$. D'où

$$d(x,F_n) \leq \|x - y\|.$$

D'où, pour tout $n \geq n_0$ on a

$$d(x,F) \leq d(x,F_n) \leq d(x,F) + \varepsilon.$$

Ce qui implique que $d(x,F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x,F)$. Le résultat est prouvé. $\square$

Exercice 4

Soient $f \in L^2([0,1])$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'éléments de $L^2([0,1])$.

1) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 \leq \int_0^t |f(s)|^2\,ds \qquad \forall t\in[0,1]. \quad (1)$$

2) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(t)|^2(1-t)\,dt. \quad (2)$$

3) On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne. Montrer qu'on égalité dans (1) et (2).

Solution Exercice 4

$L^2([0,1])$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad \forall f,\, g\in L^2([0,1]).$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système orthonormal, alors on peut le compléter par une famille $(e_i)_{i\in I}$ tel que $(e_i)_{i\in I\cup\mathbb{N}^*}$ soit une base Hilbertienne.
Soit $t\in[0,1]$. Posons $f_1(s)=f(s)\chi_{[0,t]}(s)$ pour tout $s\in[0,1]$. Alors, en utilisant l'égalité de Bessel-Parseval, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2\,ds=\int_0^1 |f_1(s)|^2\,ds=\|f_1\|^2_{L^2([0,1])}=\sum_{i\in I\cup\mathbb{N}^*}|(f_1,e_i)|^2.$$

Solution Exercice 4 (solution)

Donc

$$\|f_1\|^2_{L^2([0,1])} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |(f_1, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^1 f_1(s) e_n(s)\, ds \right|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^t f(s) e_n(s)\, ds \right|^2 .$$

2) On a d'après la première question,

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \int_0^t f(s) e_k(s)\, ds \right|^2 \leq \int_0^t |f(s)|^2\, ds.$$

Solution Exercice 4 (solution)

Donc, en intégrant de 0 à 1, on obtient

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n \left| \int_0^t f(s)e_k(s)\,ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 \int_0^t |f(s)|^2\,ds\,dt$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 |f(s)|^2 \chi_{[0,t]}(s)\,ds\,dt.$$

Ceci implique que

$$\sum_{k=1}^n \int_0^1 \left| \int_0^t f(s)e_k(s)\,ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(s)|^2 \int_s^1 dt\,ds$$
$$= \int_0^1 |f(s)|^2 (1-s)\,ds.$$

Solution Exercice 4 (solution)

La série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} \int_0^1 \left| \int_0^t f(s)e_n(s)\, ds \right|^2 dt$ est convergente car sa somme partielle est majorée. Sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left| \int_0^t f(s)e_n(s)\, ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 |f(s)|^2(1-s)\, ds.$$

3) Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne, alors d'après l'égalité de Bessel-Parseval, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2\, ds = \|f_1\|^2_{L^2([0,1])} = \sum_{n=1}^{+\infty} |(f_1, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^t f(s)e_n(s)\, ds \right|^2.$$

Solution Exercice 4 (solution)

La somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1}\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2$ est positive, croissante et converge vers $\int_0^t |f(s)|^2\,ds$ qui est intégrable pour tout $t\in[0,1]$. Donc d'après le théorème de la convergence monotone, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2\,dt=\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\int_0^t f(s)e_n(s)\,ds\right|^2\,dt$$

$$=\int_0^1\int_0^t |f(s)|^2\,ds\,dt=\int_0^1 |f(s)|^2(1-s)\,ds.\ \square$$