Master MAF2 Année Universitaire 2018/2019

Travaux Dirigés

Contrôle Optimal

Série 1

Exercice I.

Etudier la contrôlabilité du système :

$$\begin{cases} x''(t) = -x(t) + y(t), \;\; x(0) = x_0, \;\; x'(0) = x_1 \\ y''(t) = x(t) - y(t) + u(t), \;\; y(0) = y_0, \;\; y'(0) = y_1 \end{cases} \qquad t \in [0, T]$$

où u une application de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice II.

On considère le problème (de temps minimal) pour l'équation

$x^{'''}(t) + 3x''(t) + 2x'(t) = u(t), \; t \in [0, T]$, avec les conditions : $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$ et $x''(0) = x_2$,

où x et u sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $|u(t)| \leq 1$.

On s'intéresse aux trajectoires partant du point (x_0, x_1, x_2) et rejoignant en un temps minimal $\overline{T}$ le plan $(x = 0)$, c'est à dire les solutions qui vérifient les conditions aux limites $x(\overline{T}) = 0$, $x'(\overline{T})$ et $x''(\overline{T})$ sont quelconques.

1) Etudier la contrôlabilité du système.

2) Ecrire les équations permettant de trouver le vecteur adjoint P et le contrôle u correspondant à la solution optimum, Exprimer $p_2(\overline{T})$ et $p_3(\overline{T})$.

On note $\overline{u}$ et $\overline{T}$ ces deux éléments optimums.

3) Résoudre les équations de l'état adjoint et déduire les expressions de $p_1(t),\ p_2(t)$ et $p_3(t)$ pour $t \in [0, T]$.

En étudiant le signe de la fonction $g(t) = \exp(t - \overline{T}) \left[-1 + \frac{1}{2}\exp(t - \overline{T})\right]$, déduire que p_3 garde un signe constant sur $[0, \overline{T}[$.

En déduire que pour $t \in [0, \overline{T}]$, on a soit $\overline{u} = 1$, soit $\overline{u} = -1$ le long des trajectoires optimales.

4) On suppose $u = +1$, calculer la trajectoire optimum correspondante en tenant compte des conditions initiales.

5) On suppose $u = -1$, calculer la trajectoire optimum correspondante en tenant compte des conditions initiales.

Exercice III.

On considère le système dynamique

$$(1) \qquad \begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = u(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \end{cases}$$

associé au critère

$$(2) \qquad J(u, x) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[u(t)^2 + \alpha x(t)^2 + \beta x'(t)^2\right] dt$$

avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$.

On considère le problème de minimisation de (2) sous contrainte (1).

1) Etudier la contrôlabilité du système (1).

2) Donner l'équation de l'état adjoint.

3) Exprimer la commande en fonction de l'état et de l'état adjoint.

4) On pose $p(t) = X(t)^T F(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, solution du système (1).

Trouver l'équation différentielle vérifiée par F.

Exercice IV.

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant contrôlé par $u = (u_1, u_2)$:

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + u_1(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + u_2(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

où $a,\ b,\ c$ et d sont des réels.

Soient $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \lambda > 0$ et $\mu > 0$. On considère le coût

$$C(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[\alpha x^2(t) + \beta y^2(t) + \lambda u_1^2(t) + \mu u_2^2(t)\right] dt.$$

1) Montrer que le système (S) est contrôlable.

2) Ecrire les équations permettant de trouver u_1 et u_2 correspondant à la solution optimum.

Application numérique : $a = b = c = 1$, $d = -1$; $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\lambda = \mu = 1$.

3) Calculer alors (u_1, u_2) et la trajectoire optimum associée.

Solutions des Exercices

Exercice I.

On pose $X = [z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4]^t$, avec $z_1(t) = x(t),\ z_2(t) = x'(t),\ z_3(t) = y(t)$ et $z_4(t) = y'(t)$. On a

$$X'(t) = \left([z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4]^t\right)' = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \\ y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ -x+y \\ y' \\ x-y+u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1+z_3 \\ z_4 \\ z_1-z_3+u \end{bmatrix}$$

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

On a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de Kalman est $C = [B, AB, A^2B, A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

Puisque $\det(C) = 1$, son rang est égale à 4 et le système est contrôlable.

Exercice II.

1) On pose $x' = y,\ y' = x'' = z$, et $z' = x''' = -3x'' - 2x' + u = -3z - 2y + u,$ on a

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

On a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

La matrice de Kalman esr $C = \left[B, AB, A^2B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$

Puisque $\det(C) = -1$, son rang est égale à 3.

On a $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$. Donc, les valeurs propres de A sont $\{0,\ -1,\ -2\}$ réelles négatives.

Donc le système est contrôlable.

2) L'état adjoint par est donné par $p = [p_1, p_2, p_3]$, $p' = [p_1', p_2', p_3'] = -pA$ et $p(\overline{T}) \perp \{x = 0\}$

$$p' = [p_1', p_2', p_3'] = -[p_1, p_2, p_3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} = [0,\ -p_1 + 2p_3,\ -p_2 + 3p_3]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1' = 0 \\ p_2' = -p_1 + 2p_3 \\ p_3' = -p_2 + 3p_3 \end{array} \right. \text{ et } p_2(\overline{T}) = p_3(\overline{T}) = 0$$

Le contrôle u correspondant à la solution optimum est $\overline{u} = signe(p(t)B) = signe(p_3(t))$.

3) Résolution de l'état adjoint

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = k \text{ une constante} \\ p_2' = 2p_3 - k \\ p_3' = 3p_3 - p_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = k \text{ une constante} \\ p_2' = 2p_3 - k \\ p_3'' = 3p_3' - p_2' = 3p_3' - 2p_3 + k \end{array} \right.$$

On déduit que p_3 vérifie l'équation $p_3'' - 3p_3' + 2p_3 = k$, pour résoudre cette équation on calcule la solution générale de l'équation sans second membre et on cherche la solution particulière de l'équation complète.

Résolution de $p_3'' - 3p_3' + 2p_3 = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Elle a deux racines réelles 1 et 2. Donc

$$p_{3_h}(t) = a\exp(t) + b\exp(2t).$$

Solution particulière. Le second membre est une constante, donc la solution particulière est $p_{3_p}(t) = \dfrac{k}{2}$.

D'où l'on a

$$\boxed{p_3(t) = a\exp(t) + b\exp(2t) + \frac{k}{2},\quad a,\ b \in \mathbb{R}.}$$

$$\Rightarrow p_2(t) = 3p_3 - p_3' = 3\left(a\exp(t) + b\exp(2t) + \frac{k}{2}\right) - \left(a\exp(t) + 2b\exp(2t)\right).$$

$$\boxed{p_2(t) = 2a\exp(t) + b\exp(2t) + \frac{3k}{2}.}$$

De plus

$$p_2\left(\overline{T}\right) = p_3\left(\overline{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a\exp(\overline{T}) + b\exp(2\overline{T}) = -\dfrac{3k}{2} \\ a\exp(\overline{T}) + b\exp(2\overline{T}) = -\dfrac{k}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -k\exp(-\overline{T}) \\ b = \dfrac{k}{2}\exp(-2\overline{T}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow p_3(t) = a\exp(t) + b\exp(2t) + \frac{k}{2} = -k\exp(-\overline{T})\exp(t) + \frac{k}{2}\exp(-2\overline{T})\exp(2t) + \frac{k}{2}$$

$$= k\exp(-\overline{T})\exp(t)\left[-1+\frac{1}{2}\exp(t-\overline{T})\right] + \frac{k}{2} = k\exp(t-\overline{T})\left[-1+\frac{1}{2}\exp(t-\overline{T})\right] + \frac{k}{2}.$$

On pose $f(t) = -1+\frac{1}{2}\exp(-\overline{T})\exp(t)$ alors f est strictement croissante de plus $f(\overline{T}) = -1+\frac{1}{2}\exp(\overline{T}-\overline{T}) = -\frac{1}{2} \leq 0$ et donc f est strictement négative sur $[0,\overline{T}]$, donc $g(t) = \exp(t-\overline{T})f(t) = \exp(t-\overline{T})\left[-1+\frac{1}{2}\exp(t-\overline{T})\right]$ est strictement négative sur $[0,\overline{T}]$. On déduit donc que p_3 garde un signe constant sur $[0,\overline{T}]$.

Le contrôle optimum $\overline{u}$ qui est donné par la formule $u(t) = signe(p_3(t))$ est constant sur $[0,\overline{T}]$, il est égal soit à $+1$ soit à -1.

4) On suppose $u = 1$, calculons la trajectoire associée

$$x'''(t) + 3x''(t) + 2x'(t) = 1 \Rightarrow x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t + L.$$

L'équation caracteristique $r^2 + 3r + 2 = 0$ a pour racines $\{-1,-2\}$.

La solution de l'équation $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$, est

$$x_h(t) = \alpha\exp(-t) + \beta\exp(-2t), \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver la solution générale de l'équation $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t + L$, on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 1 en posant $x_p(t) = at + b$ et on porte dans l'équation pour déduire $x_p(t) = \frac{1}{2}t + \frac{L}{2} - \frac{3}{4}$. La solution générale est alors

$$x(t) = \alpha\exp(-t) + \beta\exp(-2t) + \frac{1}{2}t + \frac{L}{2} - \frac{3}{4}.$$

On détermine $\frac{L}{2} - \frac{3}{4}$, α et β par les conditions $x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1$ et $x''(0) = x_2$,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \frac{L}{2} - \frac{3}{4} = x_0 \\ -\alpha - 2\beta + \frac{1}{2} = x_1 \\ \alpha + 4\beta = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \frac{L}{2} - \frac{3}{4} = x_0 \\ \alpha + 2\beta = -x_1 + \frac{1}{2} \\ \alpha + 4\beta = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{1}{4} \\ \alpha = -2x_1 - x_2 + 1 \end{cases}$$

et $\dfrac{L}{2} - \dfrac{3}{4} = x_0 + \dfrac{3x_1}{2} + \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{3}{4}$.

Donc

$$x(t) = \alpha \exp(-t) + \beta \exp(-2t) + \frac{t}{2} + \frac{L}{2} - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\left(2x_1 + x_2 - 1\right)\exp(-t) + \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{1}{4}\right)\exp(-2t) + \frac{t}{2} + x_0 + \frac{3x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y(t) = x'(t) = (2x_1 + x_2 - 1)\exp(-t) - \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{2}\right)\exp(-2t) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow z(t) = x''(t) = -\left(2x_1 + x_2 - 1\right)\exp(-t) + 2\left(x_1 + x_2 - \frac{1}{2}\right)\exp(-2t).$$

$5)$ On suppose $u = -1$.

$$x^{'''}(t) + 3x''(t) + 2x'(t) = -1 \Rightarrow x^{''}(t) + 3x'(t) + 2x(t) = -t + K.$$

L'équation caracteristique $r^2 + 3r + 2 = 0$ a pour racines $\{-1, -2\}$ la solution de l'équation $x^{''}(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$, est

$$x(t) = \alpha \exp(-t) + \beta \exp(-2t) \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver la solution générale de l'équation $x^{''}(t) + 3x'(t) + 2x(t) = -t + K$, on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 1 en posant $x_p(t) = at + b$ et on porte dans l'équation pour déduire $x_p(t) = -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{K}{2} + \dfrac{3}{4}$. La solution générale est

$$x(t) = \alpha \exp(-t) + \beta \exp(-2t) - \frac{1}{2}t + \frac{K}{2} + \frac{3}{4}.$$

On détermine $\dfrac{K}{2} + \dfrac{3}{4}$, α et β par les condition $x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1$ et $x''(0) = x_2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta + \dfrac{K}{2} + \dfrac{3}{4} = x_0 \\ -\alpha - 2\beta - \dfrac{1}{2} = x_1 \\ \alpha + 4\beta = x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta + \dfrac{K}{2} + \dfrac{3}{4} = x_0 \\ \alpha + 2\beta = -x_1 - \dfrac{1}{2} \\ \alpha + 4\beta = x_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{1}{4} \\ \alpha = -2x_1 - x_2 - 1 \end{array}\right.$$

et $\dfrac{K}{2}+\dfrac{3}{4}=x_0+2x_1+x_2+1-\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{1}{4}=x_0+\dfrac{3x_1}{2}+\dfrac{x_2}{2}+\dfrac{3}{4}$.

Donc

$$x(t)=-(2x_1+x_2+1)\exp(-t)+\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1}{4}\right)\exp(-2t)-\frac{1}{2}t+x_0+\frac{3x_1}{2}+\frac{x_2}{2}+\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y(t)=x'(t)=(2x_1+x_2+1)\exp(-t)-\left(x_1+x_2+\frac{1}{2}\right)\exp(-2t)-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow z(t)=x''(t)=-(2x_1+x_2+1)\exp(-t)+2\left(x_1+x_2+\frac{1}{2}\right)\exp(-2t).$$

Exercice III.

1) On pose $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors le système (1) s'écrit :

$$X'(t)=AX(t)+Bu(t),\quad X(0)=\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Kalman $C=(B,AB)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc le système est contrôlable.

2) $J(u,x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T\left[u(t)^2+\alpha x(t)^2+\beta x'(t)^2\right]dt$. Donc d'après les notations du cours $Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $U=\dfrac{1}{2}$.

Soit $p=(p_1,p_2)$ l'état adjoint associé. Donc l'équation vérifiée par p est :

$$p'(t)=-p(t)A+X(t)^TW \text{ et } p(T)=-X(T)^TQ=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1'(t) & p_2'(t) \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \end{pmatrix}A+\frac{1}{2}\left(\alpha x(t)\ \ \beta x'(t)\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1'(t)=p_2(t)+\dfrac{\alpha}{2}x(t) \\ p_2'=-p_1(t)+2p_2(t)+\dfrac{\beta}{2}x'(t) \\ p_1(T)=p_2(T)=0 \end{cases}$$

3) Le contrôle est donné par la relation

$$u(t)=U^{-1}B^Tp(t)^T=2\,(0\ \ 1)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}=2p_2.$$

Remarque. Si on veut trouver p on doit résoudre le système qui donne à la fois p et X. Si on pose $y = x'$ on obtient le système donnant l'état et le vecteur adjoint,

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) + 2p_2(t) \\ p_1'(t) = \dfrac{\alpha}{2}x(t) + p_2(t) \\ p_2'(t) = \dfrac{\beta}{2}y(t) - p_1(t) + 2p_2(t) \end{cases}$$

La résolution de ce système passe par la diagonalisation de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ \dfrac{\alpha}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{\beta}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Si on pose $p(t) = X(t)^T F(t)$ on a

$$p' = X^T F' + \left(X^T\right)' F = X^T F' + (AX + Bu)^T F = X^T F' + (AX + B2B^T p(t)^T)^T F = X^T F' + X^T A^T F + 2PBB^T F$$

$$= X^T F' + X^T A^T F + 2X^T FBB^T F.$$

De l'autre coté on a

$$p' = -pA + X(t)^T W = -X(t)^T F(t) A + X(t)^T W.$$

On déduit donc

$$X^T F' + X^T A^T F + 2X^T FBB^T F = -X^T FA + X^T W.$$

Comme X n'est pas une solution triviale on déduit

$$F' + A^T F + 2FBB^T F = -FA + W$$

$$\Rightarrow F' + FA + A^T F + 2FBB^T F = W.$$

Et comme $p(t) = X(t)^T F(t) = -X(t)^T Q$, alors F vérifie l'équation de Riccati

$$F' = W - A^T F - FA - 2FBB^T F, \quad F(T) = -Q = 0_{2\times 2}.$$

Exercice IV.

On considère le système

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + u_1(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + u_2(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

1) Les matrices $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matrice de Kalman $C = [B,\ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$ est de rang 2. Donc le système est contrôlable.

2) En utilisant les notations du cours on a

$$Q = 0_{2\times 2}, \quad W = \begin{pmatrix} \alpha/2 & 0 \\ 0 & \beta/2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \lambda/2 & 0 \\ 0 & \mu/2 \end{pmatrix}.$$

Donc l'état adjoint est donné par ($p = (p_1, p_2)$, $X = (x, y)$),

$$p'(t) = -pA + X(t)^T W, \quad p(T) = -x(T)^T Q = 0,$$

$$\begin{cases} p_1'(t) = -ap_1(t) - cp_2(t) + \dfrac{\alpha}{2} x(t) \\ p_2'(t) = -bp_1(t) - dp_2(t) + \dfrac{\beta}{2} y(t) \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{cases}$$

Le contrôle est donné par

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = U^{-1} B^T p^T = U^{-1} p^T = \begin{pmatrix} 2/\lambda & 0 \\ 0 & 2/\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Donc, $u_1(t) = \dfrac{2}{\lambda} p_1(t)$ et $u_2(t) = \dfrac{2}{\mu} p_2(t)$.

On remarque que le vecteur adjoint p dépend de l'état (x, y). Donc pour trouver p on doit résoudre un système d'ordre 4 qui permet de calculer à la fois (x, y) et (p_1, p_2).

En regroupant les deux systèmes relativement à (x, y) et (p_1, p_2) on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = ax(t) + by(t) + \dfrac{2}{\lambda}p_1(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + \dfrac{2}{\mu}p_2(t) \\ p_1'(t) = -ap_1(t) - cp_2(t) + \dfrac{\alpha}{2}x(t) \\ p_2'(t) = -bp_1(t) - dp_2(t) + +\dfrac{\beta}{2}y(t) \end{array}\right.$$

avec les conditions

$$\left\{\begin{array}{c} x(0) = y(0) = 0 \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{array}\right.$$

3) Application numérique

$$a = b = c = 1, d = -1\,;\, \alpha = 1, \beta = 2, \lambda = \mu = 1.$$

Alors le dernier système devient

$$(S') \quad \left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + y(t) + 2p_1(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) + 2p_2(t) \\ p_1'(t) = \dfrac{1}{2}x(t) - p_1(t) - p_2(t) \\ p_2'(t) = y(t) - p_1(t) + p_2(t) \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{c} x(0) = y(0) = 0 \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{array}\right.$$

Ecriture matricielle :

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

alors (S') s'écrit

$$(S'') \qquad Y' = MY \text{ et avec les conditions } \left\{\begin{array}{c} x(0) = y(0) = 0 \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{array}\right.$$

Pour touver Y on procède par diagonalisation de M. Le polynôme caractéristique de M est

$$P_M(\lambda) = (1+\lambda)^2(1-\lambda)^2 + 5(1+\lambda)(1-\lambda) + 6 = (1-\lambda^2)^2 + 5(1-\lambda^2) + 6.$$

On pose $\gamma = 1 - \lambda^2$ et on a $P_M(\lambda) = \gamma^2 + 5\gamma + 6$. Pour touver λ on résout d'abord $\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0$ pour avoir deux racines $\gamma_1 = -2$ et $\gamma_2 = -3$, puis on résout $1 - \lambda^2 = \gamma_i$ ce qui donne en fin $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = \sqrt{3}$

et $\lambda_4 = -\sqrt{3}$.

Si on disigne par D la matrice diagonnale formée de valeurs propres et P la matrice formée par les vecteurs propres (matrice de passage) on aura $M = PDP^{-1}$. Donc, les vecteurs Y et Y' dans la base canonique deviennent les vecteurs $V = P^{-1}Y$ et $V' = P^{-1}Y'$ dans la base des vecteurs propres.

Le système $Y' = MY$ donne $PV' = PDV$ soit $V' = DV$.

Donc pour chaque composante de V, on a

$$V_i'(t) = \lambda_i V_i(t).$$

D'où

$$V_i(t) = V_i(0)e^{\lambda_i t}.$$

Autrement dit

$$V_1' = 2V_1 \ \Rightarrow V_1(t) = V_1(0)e^{2t},$$

$$V_2' = -2V_2 \ \Rightarrow V_2(t) = V_2(0)e^{-2t},$$

$$V_3' = \sqrt{3}V_3 \Rightarrow V_3(t) = V_3(0)e^{\sqrt{3}\,t},$$

$$V_4' = -\sqrt{3}V_4 \Rightarrow V_4(t) = V_4(0)e^{-\sqrt{3}\,t}.$$

D'où $V(t) = e^{tD}V_0$, où e^{tD} est la matrice diagonale dont les coefficients sont les $e^{\lambda_i t}$.

Connaissant V on peut avoir Y car en repassant la base canonique, on obtient

$$Y(t) = PV(t) = Pe^{tD}V_0 = Pe^{tD}P^{-1}Y_0$$

On note globalement

$$e^{tM} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Ce qui permet d'obtenir l'écriture $Y(t) = e^{tM}Y_0$ qui est analogue l'écriture de la solution d'une équation différentielle scalaire.