Master MAF2 Année Universitaire 2019/2020

Travaux Dirigés

Contrôle Optimal

Série 1

Exercice I.

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant contrôlé par $u = (u_1, u_2)$:

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x(t)}{\partial t} = ax(t) + by(t) + u_1(t) \\ \dfrac{\partial y(t)}{\partial t} = cx(t) + dy(t) + u_2(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Soient $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \lambda > 0$ et $\mu > 0$; on considère le coût

$$C(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [\alpha x^2(t) + \beta y^2(t) + \lambda u_1^2(t) + \mu u_2^2(t)] dt.$$

$a)$ Montrer que le système (S) est contrôlable.

$b)$ Ecrire les équations permettant de trouver u_1 et u_2 correspondant à la solution optimum.

Le système (S) est un système "Prédateurs et proies" que l'on essaie de contrôler.

Application numérique : $a = b = c = 1$, $d = -1$; $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\lambda = \mu = 1$.

$c)$ Calculer alors (u_1, u_2) et la trajectoire optimum associée.

Exercice II.

Considérons le système dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2y(t) + u(t), \quad |u| \leq 1 \end{cases}$$

On se pose le problème de relier en temps minimal le point origine $(0,0)$ à tout point $(a,0)$, où $a \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité on peut supposer que $a > 0$.

1) Vérifier que le système est contrôlable.

2) Ecrire les équations permettant de trouver le vecteur adjoint $p = (p_1, p_2)$ et le contrôle u correspondant à la solution optimum. Déduire que le contôle a au plus une commutation.

3) Soit (x, y) la solution du système

$$(S_1) \quad \begin{cases} x\prime(t) = y(t) \\ y'(t) = 2y(t) + 1 \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

et Γ_1 sa représentation graphique.

Trouver cette solution et dissiner une parie de Γ_1.

4) Soit (x, y) la solution du système

$$(S_{-1}) \quad \begin{cases} x\prime(t) = y(t) \\ y'(t) = 2y(t) - 1 \\ (x(0), y(0)) \in \Gamma_1 \end{cases}$$

et Γ_{-1} sa représentation graphique.

Trouver cette solution et dissiner une partie de Γ_{-1} en précisant sa tangente au point $(x(0), y(0))$.

5) Expliquer comment une trajectoire optimum de (S) peut joindre les deux points $(0,0)$ et $(a,0).(a > 0)$.

Exercice III.

Dans sa phase finale la manoeuvre d'alunissage peut être modélisée (après de grandes simplification) par l'équation :

$$(1) \qquad h''(t) = m^{-1}u(t), \qquad t \geq 0,$$

où $h(t)$ est l'altitude à l'instant t, m la masse de l'engin, et u la somme (normalisèe) des forces extérieures supposée vérifier à tout instant $u(t) \in [-1, 1]$. Le problème est d'emmener l'engin à vitesse et altitude nulles en un temps minimal.

On notera $v = h'$ la vitesse, et $(vo, ho) = (v(0), h(0))$ la condition initiale.

1) Ecrire le problème de contrôle optimal. Est ce que le système est commandable ?

2) Expliquer pourquoi le problème a une solution unique et écrire les conditions d'optimalité en utilisant l'équation adjointe et la condition d'extermalité pour u. (Le contrôle optimal et le temps optimal seront désignés respectivement par $\overline{u}$ et $\overline{T}$).

3) Montrer que l'état adjoint ne pourrait pas s'annuler sur tout l'intervalle $[0, \overline{T}]$.

4) En déduir que le contrôle optimal vérifie :

$$\overline{u}(t) \in \{-1, 1\}$$

et $\overline{u}$ change de signe au plus 1 fois.

5) Montrer que si $\overline{u} \equiv 1$ sur $[0, \overline{T}]$., alors la trajectoire atteint la cible si et seulement si $v_0 = \overline{T}$, et $h_0 = -\dfrac{1}{2}\overline{T}^2$.

Supposons maintenant que $\overline{u} = 1$ sur $[0, \overline{T}]$., sous quelle condition sur v_0, h_0, la trajectoire optimale atteint-elle la cible ?

6) Donner la synthèse de la solution optimale.

Solutions des Exercices

Série 1

Exercice I.

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + u_1(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + u_2(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

$a)$ Les matrices $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, La matrice de Kalman $C = [B,\ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$

est de rang 2. Donc le système est contrôlable.

$b)$ En utilisant les notations du cours on a

$$Q = 0,\ \ W = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \ U = \begin{bmatrix} \lambda/2 & 0 \\ 0 & \mu/2 \end{bmatrix}.$$

Donc l'état adjoint est donné par ($p = (p_1, p_2)\ ,\ X = (x, y)$),

$$p'(t) = -pA + X^T W,\ \ p(T) = 0,$$

$$\begin{cases} p_1'(t) = -ap_1(t) - cp_2(t) + \dfrac{1}{2}x(t) \\ p_2'(t) = -bp_1(t) + dp_2(t) + y(t) \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{cases}$$

Le contrôle est donné par

$$u = (u_1, u_2) = U^{-1}B^T p^T = \begin{bmatrix} 2/\lambda & 0 \\ 0 & 2/\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} u_1(t) = (2/\lambda)p_1\ ,\ \ u_2(t) = (2/\mu)p_2(t).$$

On remarque que le vecteur adjoint p dépent de l'état (x, y), donc pour trouver p on doit résoudre un système d'ordre 4 qui permet de calculer à la fois (x, y) et (p_1, p_2).

En regroupant les deux systèmes relativement à (x, y) et (p_1, p_2) on a :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + (2/\lambda)p_1 \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + (2/\mu)p_2(t) \\ p_1'(t) = -ap_1(t) - cp_2(t) + \dfrac{1}{2}x(t) \\ y'(t) = -bp_1(t) + dp_2(t) + y(t) \end{cases} \quad \text{avec les conditions} \begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{cases}$$

$c)$ Application numérique

$$a = b = c = 1, d = -1\,; \alpha = 1, \beta = 2, \lambda = \mu = 1.$$

Alors le dernier système devient

$$(S') \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + 2p_1 \\ y'(t) = x(t) - y(t) + 2p_2(t) \\ p_1'(t) = \dfrac{1}{2}x(t) - p_1(t) - p_2(t) + \\ y'(t) = y(t) - p_1(t) + p_2(t) + \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{cases}$$

Ecriture matricielle :

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

alors (S') s'écrit

$$(S'') \qquad F' = EF \text{ et avec les conditions } \begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{cases}$$

Pour touver F on dispose de deux façons.

- Utiliser la résolvante.
- Diagonaliser E pour aboutir à une séparation des inconnues.

Utilisons cette dernière méthode et diagonalisons E. Le polynome caractéristique de E est

$$P_E(\lambda) = (1+\lambda)^2(1-\lambda)^2 + 5(1+\lambda)(1-\lambda) + 6 = (1-\lambda^2)^2 + 5(1-\lambda^2) + 6.$$

On pose $X = 1-\lambda^2$ et on a $P_E(\lambda) = X^2+5X+6$. Pour touver λ on résout d'abord $X^2+5X+6 = 0$ pour avoir deux racines $X_1 = 2$ et $X_2 = 3$, puis on résout $1-\lambda^2 = X_i$ ce qui donne en fin $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -\sqrt{3}$ et $\lambda_4 = \sqrt{3}$.

Si on disigne par D la matrice diagonnale formée de valeurs propres et K la matrice formée par le vecteurs propres (matrice de passage) on aura $E = K^{-1}DK$ et le système (S'') s'écrit $(KF)' = DKF$. Si on pose $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = KF$ on aura un système dont les inconnus sont indépendants à savoir

$$z_1' = -2z_1 \;\Rightarrow z_1(t) = z_1(0)\exp(-2t),$$

$$z_2' = 2z_2 \;\Rightarrow z_2(t) = z_2(0)\exp(2t),$$

$$z_3' = -\sqrt{3}z_3 \Rightarrow z_3(t) = z_3(0)\exp(-\sqrt{3}t),$$

$$z_4' = \sqrt{3}z_4 \Rightarrow z_4(t) = z_4(0)\exp(\sqrt{3}t),$$

Connaissant Z on peut avoir F par la relation $F = KZ$. Ce qui permet de résoudre complètement le problème.

Exercice II.

Considérons le système dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x\prime(t) = y(t) \\ y\prime(t) = 2y(t) + u(t), \quad |u| \leq 1 \end{cases}$$

1) Ce système est un système de contrôle avec contrainte, on étudie donc les trajecoires issues d'un point (x_0, y_0) et joignant l'origine $(0,0)$. pour cela on effectue le changement de variable $z_1(t) = x(T-t),\ z_2(t) = y(T-t)$, alors $z = (z_1, z_2)$ vérifie le système

$$z_1'(t) = -x'(T-t) = -y(T-t) = -z_2(t),$$

$$z_2'(t) = -y'(T-t) = -2y(T-t) - u(t) = -z_2(t) - u(t)$$

$$\Leftrightarrow z'(t) = Az(t) + Bu$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \;\; B' = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A' sont négatives ou nulles et la matrice de Kalman $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ est de rang 2, donc le système est contrôlable.

2) On revient au premier système, on pose l'équation adjointe $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$

$$p\prime(t) = -Ap(t) \Leftrightarrow \begin{cases} p_1'(t) = 0 \\ p_2'(t) = -p_1 - 2p_2 \end{cases}$$

On a $p_1(t)$ est constant , $p_1() = p_1$. La solution de la deuxième équation est donnée par la méthode habituelle, équation linéaire avec second membre $p_2(t) = K\exp(-2t) - \frac{p_1}{2}$. $K = \frac{2p_2(0)+p_1}{2}$.

Le calcul du contrôle u passe par la formule

$$p(t)Bu(t) = \max_{|v|\le 1} p(t)Bv.$$

Or $p(t)B = (p_1, K\exp(-2t) - \frac{p_1}{2})\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = K\exp(-2t) - \frac{p_1}{2}$, donc $\max_{|v|\le 1} p(t)Bv = \left|K\exp(-2t) - \frac{p_1}{2}\right|$.

Donc $u(t) = signe(K\exp(-2t) - \frac{p_1}{2}) = \pm 1$.

P_2 est une fonction strictement monotone, si elle s'annulle c'est au plus une seule fois donc u admet au plus une commutation.

3) On considère le système : $x'(t) = y(t)$, $y'(t) = 2y(t) + 1$, $x(0) = y(0) = 0$. La solution de ce système est

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}\exp(2t) - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ y(t) = \frac{1}{2}\exp(2t) - \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a $(x'(0), y'(0)) = (0,1)$ donc la tangent à Γ_1 en $(0,0)$ est verticale, puisque $\exp(2t)$ est plus forte que $t/2$, Γ_1 restera dans le premier rectangle $x \ge 0,\ y \ge 0$.

4) On considère le système : $x'(t) = y(t)$, $y'(t) = 2y(t) - 1$, $(x(0), y(0)) \in \Gamma_1$. la solution de ce système est

$$\begin{cases} x(t) = \frac{k}{2}\exp(2t) + \frac{1}{2}t + l \\ y(t) = k\exp(2t) + \frac{1}{2} \end{cases} ,\ k,\ l \in \mathbb{R}$$

On a $(x(0), y(0)) \in \Gamma_1$ donc $x(0), y(0) > 0 \Rightarrow x'(0) > 0$, par contre pour $y'(0)$ on a

$$y'(0) = 0 \text{ si } y(0) = \frac{1}{2}\ ,\ y'(0) < 0 \text{ si } y(0) < \frac{1}{2} \text{ et } y'(0) > 0 \text{ si } y(0) > \frac{1}{2}.$$

$$\text{En résumé} \begin{cases} y < \frac{1}{2} \text{ on a } x \text{ croissant et } y \text{ décroissant} \\ y > \frac{1}{2} \text{ on a } x \text{ croissant et } y \text{ croissant} \\ y = \frac{1}{2} \text{ on a } x \text{ croissant et } y \text{ stationnaire } = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

5) Une trajectoire optimum issue du point $(0,0)$ et joint le point $(a,0)$ doit suivre dans une première étape la courbe Γ_1 jusqu'à un point (x_0, y_0) avec $y_0 < \frac{1}{2}$ puis suivre une courbe Γ_{-1} pour arriver au point $(a, 0)$.

Exercice III.

$$(1) \qquad h''(t) = m^{-1}u(t), \qquad t \geq 0,$$

où $h(t)$ est l'altitude à l'instant t, m la masse de l'engin, et $u(t) \in [-1, 1]$. Le problème est d'emmener l'engin à vitesse et altitude nulles en un temps minimal.

On notera $v = h'$ la vitesse, et $(vo, ho) = (v(0), h(0))$ la condition initiale.

1) $X = (h, v)$ vérifie le système $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$ où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$. Les valeurs propres de A sont nulles et la matrice de Kalman $C = \begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ 1/m & 0 \end{bmatrix}$ est de rang 2, donc le système est contôlable.

2) Le problème a une solution unique, car à tout contrôle optimal correspond une trajectoire unique issue d'une point M_0.

L'état adjoint est $p' = (p_1', p_2') = -pA$ dont la solution est $p_1 = k$ une constante et $p_2 = -kt + l$, $l \in \mathbb{R}$.

La condition d'extremalité $pBu = \max\limits_{|v|\leq 1} pBv$

$$pBv = (k, -kt + l) \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} v = \frac{1}{m}(-kt + l)v$$

On déduit que $u(t) = signe\left(\frac{1}{m}(-kt + l)\right) = signe(-kt + l) = \pm 1.$

On note par la suite $\overline{u}$ le contrôle optimal et T le temps minimal correspondant.

3) L'état adjoint $p(t) = (k, -kt + l)$ ne peut pas s'annulet sur $[0, T]$, si $\exists t_0 \in [0, T]$ tel que $p(t_0) = 0$ alors on aura $k = 0$ puis $l = 0$ dona $p = 0 \Rightarrow u = 0$ pas de contrôle.

En fait en phase finale le vecteur adjoit ne s'annule pas, car si c'est le cas il y aurrait une commutation et on passera d'un état de freinage à un état d'accélération ce qui n'est pas admis.

4) D'après la formule d'extremalité $pBu = \max\limits_{|v|\leq 1} pBv$ on a $\overline{u} = \pm 1$ donc $\overline{u} \in \{-1, 1\}$, d'aprè l'expression de p_2 qui est l'équation d'une droite on déduit que si u commutte, il ne peut commuter qu'une seule fois.

Mais d'après la question 3), p ne s'annule pas donc $\overline{u}$ ne peut prendre qu'une seule valeur $\overline{u} = 1$ ou bien $\overline{u} = -1$.

5) Soit $\overline{u} = -1$ on suppose $m = 1 \Rightarrow h''(t) = -1$ on a alors

$$\begin{cases} v(t) = h'(t) = -t + v_0 \\ h(y) = -\frac{1}{2}t^2 + v_0 t + h_0 \end{cases}$$

De la relation $v(T) = h(T) = 0$ on a $v_0 = T$ et $h_0 = -\dfrac{1}{2}T$.

Dans la suite on suppose $\overline{u} = 1 \Rightarrow h''(t) = 1$ on a alors

$$\begin{cases} v(t) = h'(t) = t + v_0 \\ h(y) = \frac{1}{2}t^2 + v_0 t + h_0 \end{cases}$$

De la relation $v(T) = h(T) = 0$ on a $v_0 = -T$ et $h_0 = \dfrac{1}{2}T$.

6) A l'instant $t = 0$, l'engin commence à freiner, sa vitesse est alors T et sa position est $h_0 = -\dfrac{1}{2}T$ ce qui correspond au contrôle $\overline{u} = -1$ ($\overline{u} = 1$ ne convient pas), il n'y a pas de commutation car p ne s'annule pas d'où l'équation du mouvement est

$$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + Tt - \frac{1}{2}T^2.$$