Master MAF2 Année Universitaire 2020/2021

Travaux Dirigés

Contrôle Optimal

Série 1

Exercice I.

On considère l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \quad x(0) = x_0.$$

On suppose x_0 donné pour $t = 0$, et $u \in L^2([0,T],\mathbb{R})$ et on veut minimiser le coût donné par l'expression

$$C(u) = \int_0^T \left(x^2(s) + u^2(s)\right) ds.$$

$a)$ Montrer que ce problème admet une solution unique.

$b)$ Trouver le vecteur adjoint p, le contrôle optimal u, la trajectoire correspondante x et calculer le coût $C(u)$.

$c)$ On pose $p(t) = E(t)x(t)$.

Trouver le problème vérifié par E (équation et condition à la limite) et calculer sa solution.

Déduir le conrôle optimum $\overline{u}$.

On considère l'équation avec la condition d'optimalité

$$C_2(u) = \int_0^T ((x(t) - 1)^2 + u^2(t))dt.$$

$d)$ Proposer une méthode pour déterminer l'état adjoint et le contrôle minimisant le coût ainsi que la trajectoire correspondante.

Exercice II.

On considère le système contrôlé

$$x = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

où $x \in C^0(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^d)$, A est une matrice $d \times d$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ un contrôle (dépendant du temps) et B une matrice $d \times m$.

1) $u(t)$ étant donné , calculer la solution de cette équation en utilisant la méthode de la variation de la constante. et déduire que l'on peut supposer $x_0 = 0$.

Dans la suite on suppose $x_0 = 0$. On dit que le système est contrôlable ou commandable si pour tout $T > 0$, pour tous points $x_0, x_T \in \mathbb{R}^d$, on peut trouver $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ qui engendre une trajectoire $x(t)$ avec $x(0) = 0$ et $x(T) = x_T$.

2) Montrer que si c'est le cas, alors nécessairement le **rang** de la matrice "de Kalman" $d \times (md)$, $K = [B, AB, ..., A^{d-1}B]$ est d.

3) On introduit la matrice $d \times d$

$$G_T = \int_0^T \exp((T-s)A)BB^t \exp((T-s)A^t)ds.$$

Montrer que si la matrice G_T est inversible, le système peut être contrôlé.

4) Montrer que si la matrice de Kalman K est de rang d, G_T est inversible.

5) Montrer que la commande : $\overline{u} : s \longrightarrow B^t \exp((T-s)A^t)G^{-1}x_T$ est optimale parmi les contrôles qui amènent 0 à x_T , pour le coût $C : u \longrightarrow C(u) = \int_0^T \|u(s)\|^2 \, ds$ (c'est même l'unique commande optimale pour ce coût).

Exercice III.

On considère le système dynamique

$$(S_1) \quad \begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = u(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \;\; x'(0) = v_0 \end{cases}$$

associé au critère

$$J(x,u) = \frac{1}{2} \int_0^T [\alpha(x(t))^2 + \beta(x'(t))^2 + u^2(t)] dt$$

avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ et

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [\alpha(x_u(t))^2 + \beta(x'_u(t))^2 + u^2(t)] dt$$

où x_u désigne la solution de (S_1) correspondante au contrôle u.

1) Mettre l'équation sous la forme d'un système noté (S_2), en posant $X = (x, x') = (x, y)$.

2) Montrer que le problème de contrôle

$$\min\{J(u); \; u \in L^2(0,T)\}$$

admet une solution unique.

On note $p_1, \; p_1$ les composantes de l'état adjoint p.

3) Donner l'équation de l'état adjoint.

4) Exprimer la commande en fonction de l'état et de l'état adjoint grâce au principe de Pontryagin.

5) On pose $p(t) = X^T(t)F(t)$ avec $X(t)$ solution de (S_2).

Trouver l'équation différentielle vérifiée par F, (équation de Riccati).

Solutions des Exercices

Série 1

Exercice I.

$a)$ On a $A = [0],\ B = [1],\ Q = 0,\ W = [1]$ et $U = [1]$. On constate que $W \geq 0$ et U est coercive, donc le système admet une solution optimale unique.

$b)$ Le vecteur adjoint est solution du problème

$$\begin{cases} p'(t) = x(t)W = x(t) \\ p(T) = 0 \end{cases} \text{ et } \overline{u}(t) = U^{-1}B^T p(t) = p(t)$$

On a alors

$$\begin{cases} x'(t) = \overline{u}(t) = p(t) \\ x(0) = x_0,\ x'(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(t) = p'(t) = x(t) \\ x(0) = x_0,\ x'(T) = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système est

$$x(t) = ae^t + be^{-t}$$

$$x(0) = a + b = x_0 \text{ et } x'(T) = ae^T - be^{-T} = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{x_0}{1+e^{2T}} \ \text{ et } b = \frac{e^{2T}}{1+e^{2T}} x_0.$$

On pose $k = \dfrac{x_0}{1+e^{2T}}$ et on a

$$x(t) = k(e^t + e^{2T}e^{-t}) \ ,\ \overline{u}(t) = p(t) = k(e^t - e^{2T}e^{-t})$$

$$x^2(t) + \overline{u}^2(t) = k^2(2e^{2t} + 2e^{4T}e^{-2t})$$

$$\Rightarrow C(\overline{u}) = k^2 \int_0^T 2(e^{2t} + e^{4T}e^{-2t})dt = k^2 \left[e^{2t} - e^{4T}e^{-2t}\right]_0^T = k^2\left(e^{4T} - 1\right).$$

$c)$ On pose $p(t) = E(t)x(t)$

$$p'(t) = x(t) = E'(t)x(t) + E(t)x'(t) = E'(t)x(t) + E(t)u(t) = E'(t)x(t) + E^2(t)x(t).$$

Puisque x est non nulle on a $E'(t) = 1 - E^2(t)$ et $E(T) = 0$, c'est une équation à variables séparables

$$\frac{E'(t)}{1 - E^2(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{E'}{1+E} + \frac{E'}{1-E}\right) = 1.$$

On intègre sur $[t, T]$

$$T - t = \int_t^T \frac{E'(t)}{1 - E^2(t)} = \frac{1}{2}\left[(\log(|1+E|) - \log(|1-E|))\right]_t^T = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-E(t)}{1+E(t)}\right|$$

$$\frac{1-E(t)}{1+E(t)} = \exp(2(T-t)) \Leftrightarrow E(t) = \frac{1-\exp(2(T-t))}{1+\exp(2(T-t))}$$

$$p(t) = \overline{u}(t) = \frac{1-\exp(2(T-t))}{1+\exp(2(T-t))}x(t) = \frac{e^{2t} - e^{2T}}{e^{2t} + e^{2T}}x(t).$$

D'où l'équation vérifiée par $x(t)$

$$x'(t) = \frac{e^{2t} - e^{2T}}{e^{2t} + e^{2T}}x(t) = f(t)x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \Rightarrow \overline{u}(t) = x_0 f(t) \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right).$$

$d)$ On pose $z(t) = x(t) - 1$ On déduit alors que z vérifie exactement le même problème vérifié par x avec la condition initiale $z(0) = x_0 - 1$.

Exercice II.

1) La solution de l'équation sans second membre , avec $u = 0$

$$x'(t) - Ax(t) = 0$$

On multiplie par $\exp(-tA)$:

$$\exp(-tA)x'(t) - A\exp(tA)x(t) = (\exp(-tA)x(t))' = 0.$$

En intégrant entre 0 et t on a $\exp(-tA)x(t) - x_0 = 0$ donc $x(t) = \exp(tA)x_0$.

Variation de la constante. On pose par conséquent $x(t) = \exp(tA)y(t)$ ($\Leftrightarrow y(t) = \exp(-tA)x(t)$), On a alors $y(0) = x_0$ et

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \exp(-tA)x'(t) - A\exp(-tA)x(t) \\
&= \exp(-tA)(Ax(t) + Bu(t)) - A\exp(-tA)x(t) \\
&= \exp(-tA)Bu(t).
\end{aligned}$$

Donc $y(t) = x0 + \displaystyle\int_0^t \exp(-sA)Bu(s)ds$ et donc on a :

$$x(t) = \exp(tA)x_0 + \int_0^t \exp((t-s)\,A)Bu(s)ds.$$

Si on pose $\widetilde{x}(t) = x(t) - \exp(tA)x_0$ alors on aura $\widetilde{x}(0) = 0$, de plus

$$x'(t) = \widetilde{x}'(t) + A\exp(tA)x_0 = Ax(t) + Bu(t) = A(\widetilde{x}(t) + \exp(tA)x_0) + Bu(t).$$

D'où l'on déduit en fin que

$$\widetilde{x}'(t) = A\widetilde{x}(t) + Bu(t) \text{ et } \widetilde{x}(0) = 0.$$

2) Supposons le système commandable de 0 à tout x_T ; alors, il existe u qui amène une solution $x(t)$ de 0 en x_T. On fait donc l'hypothèse que pour tout $x_T \in \mathbb{R}^d$, on peut trouver $u(t)$ tel que

$$x(T) = \int_0^T \exp((T-s)A)Bu(s)ds = x_T$$
$$x_T = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n B\left(\frac{1}{n!}\int_0^T (T-s)^n Bu(s)ds\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n B v_n,$$

avec v_n quelconque puisque u est quelconque.

Mais on sait que pour $n \geq d$, A^n est combinaison linéaire des $A^i,\ 0 \leq i \leq d-1$, donc l'expression précedante devient

$$\sum_{n=0}^{d-1} A^n B v_n = x_T.$$

On déduit que la matrice de Kalman est surjective $\Rightarrow$rang$(K) = d$.

3) On suppose $G_T = \displaystyle\int_0^T \exp((T-s)A)B(B^t \exp((T-s)A^t))ds$ est inversible.

D'après ce qui précede il suffit de choisir $u(s) = B^t \exp((T-s)A^t)y$ avec $y \in \mathbb{R}^d$ est choisi tel que $G_T y = x_T$

$\Leftrightarrow y = G_T^{-1} x_T$.

4) Il suffit de montrer que $\ker(G_T) = \{0\}$. Soit $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $G_T v = 0$, donc ${}^t v G_T v = 0 = \displaystyle\int_0^T v^t \exp((T-s)A)BB^t \exp((T-s)A^t)vds = \int_0^T \left\|v^t \exp((T-s)A)B\right\|^2 ds$ et par conséquent pour tout s, $v^t \exp((T-s)A)B = 0$. Soit pour tout $s \in [0,T]$:

$$\sum_{n\geq 0} v^t \frac{(T-s)^n}{n!} A^n B = v^t B + (T-s) \sum_{n\geq 1} v^t \frac{(T-s)^n}{n!} A^n B = 0.$$

En prenant $s = T$, on voit que $v^t B = 0$. En divisant le reste par $(T-s)$ et on prend $s = T$ on voit que $v^t AB = 0$. Ainsi par récurrence on conclut que $v^t A^n B = 0$ pour tout n, donc le rang de K est strictement plus petit que d si $v \neq 0$, (l'image de K est orthogonale à v).

5) On va démontrer que pour tout contrôle v qui permet de joindre 0 à x_T on a $C(v) \geq C(\overline{u})$, on pose $v = \overline{u} + h$ et soit x_v la trajectoire associée, c'est à dire $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} x_v(t) &= \int_0^t \exp((t-s)A)B(\overline{u}+h)ds \\ &= \int_0^t \exp((t-s)A)B(\overline{u})ds + \int_0^t \exp((t-s)A)B(h)ds \\ &= x_{\overline{u}}(t) + x_h(t). \end{aligned}$$

Comme $x_v(T) = x_{\overline{u}}(T) + x_h(T) = x_T$ et $x_v(T) = x_{\overline{u}}(0) + x_h(0)$ on déduit que

$$x_h(T) = x_h(0) = 0.$$

Calculons $C(v)$

$$\begin{aligned}
C(v) = C(\overline{u}+h) &= \int_0^T \|\overline{u}+h\|_2^2\, ds = \int_0^T \langle \overline{u}+h, \overline{u}+h\rangle ds \\
&= C(\overline{u}) + C(h) + 2\int_0^T \langle \overline{u}, h\rangle ds \\
&= C(\overline{u}) + C(h) + 2\int_0^T \langle B^t \exp((T-s)A^t)G^{-1}x_T, h\rangle ds \\
&= C(\overline{u}) + C(h) + 2\langle G^{-1}x_T, \int_0^T \exp((T-s)A)Bh(s)ds\rangle \\
&= C(\overline{u}) + C(h) + 2\langle G^{-1}x_T, x_h(T)\rangle = C(\overline{u}) + C(h)
\end{aligned}$$

Donc $C(v) \geq C(\overline{u})$ et même $C(v) > C(\overline{u})$ si $h \neq 0$ ($\Leftrightarrow v \neq \overline{u}$), d'où l'unicité.

Exercice III.

1) On pose $x'(t) = y(t)$, $y'(t) = x''(t) = -x(t) - 2y(t) + u(t)$, et $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$.

On obtient alors

$$(S_2) \quad X'(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

On a donc $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2) D'après les notation du cours, on a $Q = 0$, $W = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ et $U = \frac{1}{2}$.

Le problème admet une solution unique car les hypothèses, $\int_0^T X(s)^T W X(s) ds \geq 0$ et $\int_0^T u(s)^T U u(s) ds \geq C\int_0^T u(s)^T u(s) ds$ (pour toute constante C non nulle comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$) sont satisfaites.

3) L'équation adjointe est donnée par :

$$p'(t) = [p_1'(t) \;\; p_2'(t)] = -pA + X^T(t)W \;\;,\; p(T) = -X^T(T)Q = 0$$

$$p'(t) = -[p_1\;,\;p_2]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + [x\;,\;y]\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} = [p_2 + \frac{\alpha}{2}x\;,\; -p_1 + 2p_2 + \frac{\beta}{2}y].$$

On a alors le système

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) + u(t) \\ p_1'(t) = +\frac{\alpha}{2}x(t) + p_2(t) \\ p_2'(t) = \frac{\beta}{2}y - p_1 + 2p_2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ p_1'(t) \\ p_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\beta}{2} & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

4) On utilise la formule du cours

$$u(t) = U^{-1}.B^T.p(t)^T = 2\,[0\ ,\ 1]\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = 2p_2.$$

5) Si on pose $p(t) = X^T F(t)$ on a

$$p' = X^T F' + \left(X^T\right)' F = X^T F' + (AX + Bu)^T F = X^T F' + (AX + B2B^T p(t)^T)^T F = X^T F' + X^T A^T F + 2PBB^T F$$

$$= X^T F' + X^T A^T F + 2X^T FBB^T F.$$

De l'autre coté on a

$$p' = -pA + X^T(t)W = -X^T F(t)A + X^T(t)W.$$

On déduit donc

$$X^T F' + X^T A^T F + 2X^T FBB^T F = -X^T FA + X^T W.$$

Comme X n'est pas une solution triviale on déduit

$$F' + A^T F + 2FBB^T F = -FA + W$$

$$\Rightarrow F' + FA + A^T F + 2FBB^T F = W.$$