CONTRÔLE OPTIMAL

Travaux Dirigés: Série 1

Arij Bouzelmate

Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Master: Mathématiques Appliquées à la Finance

Travaux Dirigés

Exercice 1

Etudier la contrôlabilité du système :

$$\left\{\begin{array}{l} x''(t) = -x(t) + y(t), \;\; x(0) = x_0, \;\; x'(0) = x_1 \\ y''(t) = x(t) - y(t) + u(t), \;\; y(0) = y_0, \;\; y'(0) = y_1 \end{array}\right. \qquad t \in [0, T]$$

où u une application de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$.

Solution Exercice 1

On pose $X = [z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4]^t$, avec
$z_1(t) = x(t),\ z_2(t) = x'(t),\ z_3(t) = y(t)$ et $z_4(t) = y'(t)$. On a

$$X'(t) = \left([z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4]^t\right)' = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \\ y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ -x+y \\ y' \\ x-y+u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1+z_3 \\ z_4 \\ z_1-z_3+u \end{bmatrix}$$

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Solution Exercice 1 (suite)

On a $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Solution Exercice 1 (suite)

La matrice de Kalman est

$$C = [B, AB, A^2B, A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque $\det(C) = 1$, son rang est égale à 4 et le système est contrôlable.

Exercice 2

On considère le problème de temps minimal pour

$$\begin{aligned} x''(t) = u(t), \;\; t \in [0, T] \;, \\ x(0) = x_0, \;\; x'(0) = x_1 \end{aligned}$$

où x et u sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $|u(t)| \leq 1$.

On s'intéresse aux trajectoires qui partent de (x_0, x_1) et rejoignent en un temps minimal $\overline{T}$ la droite $\{x = 0\}$, c'est à dire les solutions qui vérifient les conditions aux limites $x(\overline{T}) = 0$ et $x'(\overline{T})$ est libre.

1) Etudier la contrôlabilité du système.

2) Ecrire les équations permettant de trouver le vecteur adjoint p et le contrôle u correspondant à la solution optimum. On note $\overline{u}$ et $\overline{T}$ ces deux éléments optimums.

3) Expliquer pourquoi $p_2(\overline{T}) = 0$ et déduire que p_2 garde un signe constant sur $[0, \overline{T}[$.

Exercice 2 (suite)

4) En déduire qu'on a soit $\overline{u} = 1$, soit $\overline{u} = -1$ le long des trajectoires optimales, Donner une représentation graphique de la trajectoire optimale suivant que $\overline{u} = 1$ ou $\overline{u} = -1$.

5) On suppose que x_0 et x_1 sont strictement positifs.
Quelle est alors la valeur de $\overline{u}$ qui convient ?

Solution Exercice 2

1) On pose $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}$ et on a le système $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de Kalman $C = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est de rang 2, de plus les valeurs propres de A sont nulles, donc le système est contrôlable. c'est à dire il existe un contrôle dont la trajectoire relie le point (x_0, x_1) à la droite $\{x = 0\}$ en un temps minimal.

2) le vecteur adjoint est solution de

$$p' = [p_1, p_2]' = -[p_1, p_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0, -p_1]$$

$$\Rightarrow p_1' = 0 \text{ et } p_2' = -p_1$$

$$\Rightarrow p_1 = k \text{ une constante et } p_2 = -kt + l, \ l \text{ une constante.}$$

Solution Exercice 2 (suite)

Le contrôle est donné par

$$\begin{aligned} p(t)Bu(t) &= \max_{v\in[-1,1]} (p(t)Bv) \\ \Leftrightarrow p_2(t)u(t) &= \max_{v\in[-1,1]} (p_2(t)v) \\ \Rightarrow u(t) &= signe(p_2). \end{aligned}$$

On note alors $\overline{u}$ et $\overline{T}$ les éléments optimums.
3) $\overline{T}$ est le temps tel que $Acc(x_0, \overline{T}) \cap \{x = 0\} = \left\{X(\overline{T})\right\}$, et pour $0 < t < \overline{T}$ on a $Acc(x_0, t) \cap \{x = 0\} = \varnothing$, d'après le principe de transversalité, le vecteur $p(\overline{T})$ est perpendiculaire au plan tangeant à la frontière de l'ensemble des points accessibles c'est à dire $p(\overline{T}) \perp \{x = 0\}$ donc $p_2(\overline{T}) = 0$.
Puisque p_2 est affine, elle n'admet qu'une seule racine $\overline{T}$, ce qui veut dire que $p_2(t)$ garde un signe constant sur $[0, \overline{T}[$.

Solution Exercice 2 (suite)

4) Le long d'une trajectoire optimale on a soit $\overline{u} = 1$ soit $\overline{u} = -1$.
Si $\overline{u} = 1$, la trajectoire optimale correspondante noté Γ^+ est donnée par :

$$(\Gamma^+) \ : \ \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_1 t + x_0, \\ x'(t) = t + x_1. \end{cases}$$

La trajectoire est parabolique de direction assymptotique l'axe $x \geq 0$.
Si $\overline{u} = -1$, la trajectoire optimale correspondante noté Γ^- est donnée par :

$$(\Gamma^-) \ : \ \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_1 t + x_0, \\ x'(t) = -t + x_1. \end{cases}$$

La trajectoire est parabolique de direction assymptotique l'axe $x \leq 0$.

Solution Exercice 2 (suite)

5) Si x_0 et x_1 sont strictement positifs, alors d'après la question précédente la trajectoire optimale doit suivre la courbe Γ^- pour atteidre la droite $\{x = 0\}$, donc $\overline{u} = -1$.

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant contrôlé par $u = (u_1, u_2)$:

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + u_1(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + u_2(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

où a, b, c et d sont des réels.
Soient $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On considère le coût

$$C(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\alpha x^2(t) + \beta y^2(t) + \lambda u_1^2(t) + \mu u_2^2(t)\right] dt.$$

1) Montrer que le système (S) est contrôlable.
2) Ecrire les équations permettant de trouver u_1 et u_2 correspondant à la solution optimum.
Application numérique : $a = b = c = 1$, $d = -1$; $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\lambda = \mu = 1$.
3) Calculer alors (u_1, u_2) et la trajectoire optimum associée.

Solution Exercice 3

On considère le système

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + u_1(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + u_2(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

1) Les matrices $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matrice de Kalman $C = [B,\ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$ est de rang 2. Donc le système est contrôlable.

2) En utilisant les notations du cours on a

$$Q = 0_{2\times 2}, \quad W = \begin{pmatrix} \alpha/2 & 0 \\ 0 & \beta/2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \lambda/2 & 0 \\ 0 & \mu/2 \end{pmatrix}.$$

Solution Exercice 3 (suite)

Donc l'état adjoint est donné par $(p = (p_1, p_2)\ ,\ X = (x, y))$,

$$p'(t) = -pA + X(t)^T W, \quad p(T) = -x(T)^T Q = 0,$$
$$\begin{cases} p_1'(t) = -ap_1(t) - cp_2(t) + \dfrac{\alpha}{2} x(t) \\ p_2'(t) = -bp_1(t) - dp_2(t) + \dfrac{\beta}{2} y(t) \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{cases}$$

Le contrôle est donné par

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = U^{-1} B^T p^T = U^{-1} p^T = \begin{pmatrix} 2/\lambda & 0 \\ 0 & 2/\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Donc, $u_1(t) = \dfrac{2}{\lambda} p_1(t)$ et $u_2(t) = \dfrac{2}{\mu} p_2(t)$.
On remarque que le vecteur adjoint p dépend de l'état (x, y). Donc pour trouver p on doit résoudre un système d'ordre 4 qui permet de calculer à la fois (x, y) et (p_1, p_2).

Solution Exercice 3 (suite)

En regroupant les deux systèmes relativement à (x, y) et (p_1, p_2) on obtient

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + \dfrac{2}{\lambda} p_1(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + \dfrac{2}{\mu} p_2(t) \\ p_1'(t) = -ap_1(t) - cp_2(t) + \dfrac{\alpha}{2} x(t) \\ p_2'(t) = -bp_1(t) - dp_2(t) + + \dfrac{\beta}{2} y(t) \end{cases}$$

avec les conditions

$$\begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{cases}$$

Solution Exercice 3 (suite)

3) Application numérique

$$a = b = c = 1,\ d = -1\ ;\ \alpha = 1,\ \beta = 2,\ \lambda = \mu = 1.$$

Alors le dernier système devient

$$(S')\quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + 2p_1(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) + 2p_2(t) \\ p_1'(t) = \dfrac{1}{2}x(t) - p_1(t) - p_2(t) \\ p_2'(t) = y(t) - p_1(t) + p_2(t) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{cases}$$

Ecriture matricielle :

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution Exercice 3 (suite)

alors (S') s'écrit

$$(S'') \qquad Y' = MY \text{ et avec les conditions } \begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{cases}$$

Pour touver Y on procède par diagonalisation de M. Le polynôme caractéristique de M est

$$P_M(\lambda) = (1+\lambda)^2(1-\lambda)^2+5(1+\lambda)(1-\lambda)+6 = (1-\lambda^2)^2+5(1-\lambda^2)+6.$$

On pose $\gamma = 1 - \lambda^2$ et on a $P_M(\lambda) = \gamma^2 + 5\gamma + 6$. Pour touver λ on résout d'abord $\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0$ pour avoir deux racines $\gamma_1 = -2$ et $\gamma_2 = -3$, puis on résout $1 - \lambda^2 = \gamma_i$ ce qui donne en fin $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = \sqrt{3}$ et $\lambda_4 = -\sqrt{3}$.

Solution Exercice 3 (suite)

Si on disigne par D la matrice diagonnale formée de valeurs propres et P la matrice formée par les vecteurs propres (matrice de passage) on aura $M = PDP^{-1}$. Donc, les vecteurs Y et Y' dans la base canonique deviennent les vecteurs $V = P^{-1}Y$ et $V' = P^{-1}Y'$ dans la base des vecteurs propres.
Le système $Y' = MY$ donne $PV' = PDV$ soit $V' = DV$.
Donc pour chaque composante de V, on a

$$V_i'(t) = \lambda_i V_i(t).$$

D'où

$$V_i(t) = V_i(0)e^{\lambda_i t}.$$

Solution Exercice 3 (suite)

Autrement dit

$$\begin{aligned} V_1' = 2V_1 &\Rightarrow V_1(t) = V_1(0)e^{2t}, \\ V_2' = -2V_2 &\Rightarrow V_2(t) = V_2(0)e^{-2t}, \\ V_3' = \sqrt{3}V_3 &\Rightarrow V_3(t) = V_3(0)e^{\sqrt{3}\,t}, \\ V_4' = -\sqrt{3}V_4 &\Rightarrow V_4(t) = V_4(0)e^{-\sqrt{3}\,t}. \end{aligned}$$

D'où $V(t) = e^{tD}V_0$, où e^{tD} est la matrice diagonale dont les coefficients sont les $e^{\lambda_i t}$.
Connaissant V on peut avoir Y car en repassant la base canonique, on obtient

$$Y(t) = PV(t) = Pe^{tD}V_0 = Pe^{tD}P^{-1}Y_0$$

On note globalement

$$e^{tM} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Ce qui permet d'obtenir l'écriture $Y(t) = e^{tM}Y_0$ qui est analogue l'écriture de la solution d'une équation différentielle scalaire.