



Filières SMP/SMC

Année Universitaire 2015/2016

Travaux Dirigés

Analyse II

Série 2

Exercice I. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1) $(x - 1)y' - 2y = 0;$

2) $y' = (1 - y)(2 - y);$

3) $xy' = x + y;$

4) $2xyy' = y^2 - x^2;$

5) $2x^2 y' + y = 1;$

6) $y' \sin x - y \cos x = x;$

7) $(x + 1)y' - y = \ln x.$

Exercice II.

1) Calculer $\int e^x(x - 1) dx.$

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x - 2)e^x.$

2) Montrer que $f(x) = e^{-x}g(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = x - 1; \quad (E)$$

3) Montrer que la solution générale y de l'équation (E) s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{-x} + f(x), \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

4) Déterminer la solution de l'équation (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

Exercice III. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ telle que

$$x \int_0^x f(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^x tf(t) dt, \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

1) Montrer que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2) Montrer que f est solution de l'équation

$$xy' - y = 0; \quad (E)$$

3) Donner l'expression de f en fonction de x .

Exercice IV. Déterminer toutes les solutions de l'équation de Bernoulli suivante en précisant leurs domaines de définition.

$$xy' + y = xy^3.$$

Exercice V. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes.

1) $y'' + 2y' = 4;$

2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4;$

3) $y'' + 6y' + 9y = x^2e^{2x};$

4) $y'' + y = \cos 2x;$

5) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2 \cos(2x) - 3 \sin(2x)).$

Solutions des Exercices

Série 2

Exercice I.

$$1) (x-1)y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-1}.$$

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-1} &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x-1} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x-1} \\ &\Rightarrow \ln |y| = 2 \ln |x-1| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{2 \ln |x-1|} e^{cte} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} (x-1)^2 \\ &\Rightarrow y = C(x-1)^2; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$2) y' = (1-y)(2-y).$$

C'est une équation à variables séparées (plus exactement elle est autonome).

On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = (1-y)(2-y) &\Rightarrow \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = \int dx \\ &\Rightarrow \int \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y} \right) dy = \int dx \\ &\Rightarrow -\ln |1-y| + \ln |2-y| = x + cte \Rightarrow \ln \left| \frac{2-y}{1-y} \right| = x + cte \\ &\Rightarrow \left| \frac{2-y}{1-y} \right| = e^x e^{cte} \Rightarrow \frac{2-y}{1-y} = \pm e^{cte} e^x \\ &\Rightarrow \frac{2-y}{1-y} = C e^x; \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow y = \frac{C e^x - 2}{C e^x - 1}; \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$3) \quad xy' = x + y \Rightarrow y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = 1 + t$.

On pose $u = \frac{y}{x}$ alors $y = ux$ et $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u = f(u) = 1 + u &\Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int du = \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow u = \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y = ux = x(\ln|x| + C); \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$4) \quad 2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - 1\right)\left(1 + \frac{x}{y}\right).$$

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = \frac{1}{2}(t-1)\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \frac{t^2 - 1}{2t}$.

On pose $u = \frac{y}{x}$ alors $y = ux$ et $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u = f(u) = \frac{u^2 - 1}{2u} &\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{2u} - u = \frac{-u^2 - 1}{2u} \\ \Rightarrow \frac{-2u}{u^2 + 1} du = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = - \int \frac{2u}{u^2 + 1} du \\ \Rightarrow \ln|x| = -\ln(u^2 + 1) + cte \\ \Rightarrow |x| = e^{cte} e^{-\ln(u^2 + 1)} = \frac{e^{cte}}{u^2 + 1} \\ \Rightarrow x = \frac{C}{u^2 + 1}; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y = xu = \frac{Cu}{u^2 + 1}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant u par $\frac{y}{x}$, on obtient

$$y^2 + x^2 - Cx = 0; \quad C \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$y = \sqrt{Cx - x^2}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$5) 2x^2 y' + y = 1.$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $2x^2 y' + y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} 2x^2 y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x^2} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2} \\ &\Rightarrow \ln |y| = \frac{1}{2x} + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{\frac{1}{2x}} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{\frac{1}{2x}}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $2x^2 y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = k e^{\frac{1}{2x}}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $2x^2 y' + y = 1$ de la forme

$$y_p(x) = k(x) e^{\frac{1}{2x}}.$$

On calcule y'_p et on remplace dans l'équation $2x^2 y' + y = 1$, on trouve que

$$y_p(x) = e^{\frac{1}{2x}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{2x^2} dx = e^{\frac{1}{2x}} e^{-\frac{1}{2x}} = 1.$$

Donc, la solution générale de l'équation $2x^2 y' + y = 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k e^{\frac{1}{2x}} + 1; \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$6) y' \sin x - y \cos x = x.$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' \sin x - y \cos x = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
 y' \sin x - y \cos x = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{\sin x} \\
 &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &\Rightarrow \ln |y| = \ln(|\sin x|) + cte \\
 &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{\ln(|\sin x|)} = e^{cte} |\sin x| \\
 &\Rightarrow y = \pm e^{cte} \sin x.
 \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' \sin x - y \cos x = 0$ est

$$y_h(x) = k \sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' \sin x - y \cos x = x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x) \sin x.$$

On calcule y'_p et on remplace dans l'équation $y' \sin x - y \cos x = x$, on trouve que

$$y_p(x) = \sin x \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sin^2 x} dx &= \int x \left(\frac{-1}{\tan x} \right)' dx = \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x} dx \\
 &= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &= \frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|).
 \end{aligned}$$

Il résulte que

$$y_p(x) = \sin x \left(\frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|) \right) = -x \cos x + \sin x \ln(|\sin x|).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y' \sin x - y \cos x = x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k \sin x - x \cos x + \sin x \ln(|\sin x|) = -x \cos x + \left(k + \ln(|\sin x|) \right) \sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$7) (x+1)y' - y = \ln x.$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $(x+1)y' - y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} (x+1)y' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1} \\ &\Rightarrow \ln |y| = \ln |x+1| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} |x+1| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} (x+1). \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $(x+1)y' - y = 0$ est

$$y_h(x) = k(x+1); \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $(x+1)y' - y = \ln x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)(x+1).$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $(x+1)y' - y = \ln x$, on trouve que

$$y_p(x) = (x+1) \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx &= - \int \left((x+1)^{-1} \right)' \ln x dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx \\ &= \frac{-\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{-\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) = \frac{-\ln x}{x+1} + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = (x+1) \left(\frac{-\ln x}{x+1} + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \right) = -\ln x + (x+1) \ln \left(\frac{x}{x+1} \right).$$

Par suite, la solution générale de l'équation $(x+1)y' - y = \ln x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k(x+1) - \ln x + (x+1) \ln \left(\frac{x}{x+1} \right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice II.

1) $\int e^x(x-1) dx$ est une primitive de la fonction $e^x(x-1)$. On a

$$\begin{aligned} \int e^x(x-1) dx &= \int (e^x)'(x-1) dx = e^x(x-1) - \int e^x dx \\ &= e^x(x-1) - e^x + C = e^x(x-2) + C; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Soit $g(x) = (x-2)e^x$; $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est une primitive de la fonction $e^x(x-1)$ sur \mathbb{R} .

On a $f(x) = e^{-x}g(x) = x-2$. Donc, f est dérivable sur \mathbb{R} et on a $f' + f = 1 + x - 2 = x - 1$. Par suite, f est solution de l'équation $y' + y = x - 1$.

3) On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

$$\begin{aligned} y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int dx \\ &\Rightarrow \ln |y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = x - 1$ est de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y'_p et on remplace dans l'équation $y' + y = x - 1$, on trouve que

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x} \int e^x(x-1) dx = e^{-x}g(x) \quad (\text{car } g \text{ est primitive de } e^x(x-1)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y' + y = x - 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + f(x); \quad k \in \mathbb{R}.$$

4) Soit y la solution de (E) telle que $y(1) = 0$. On a

$$y(1) = 0 \Rightarrow ke^{-1} + 1 - 2 = 0 \Rightarrow ke^{-1} = 1 \Rightarrow k = e.$$

Donc, $y(x) = e^{1-x} + f(x) = e^{1-x} + x - 2$ est solution de (E) telle que $y(1) = 0$.

Exercice III.

1) On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x tf(t) dt.$$

Alors,

$$xF(x) = \frac{3}{2}G(x).$$

Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, alors les deux fonctions F et G sont dérivables sur $[0, +\infty[$ de dérivées respectives $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = xf(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} xF(x) &= \frac{3}{2}G(x) \Rightarrow (xF(x))' = \frac{3}{2}G'(x) \\ &\Rightarrow F(x) + xF'(x) = \frac{3}{2}G'(x) \\ &\Rightarrow F(x) + xf(x) = \frac{3}{2}xf(x) \\ &\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}xf(x) - xf(x) \\ &\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}xf(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) = 2\frac{F(x)}{x} = \frac{2}{x} \int_0^x f(t) dt$.

D'autre part, comme f est continue en 0, $F(0) = 0$, F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0)$, alors

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2\frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 2F'(0) = 2f(0).$$

Par suite, $f(0) = 0$.

2) On a pour tout $x \in [0, +\infty[$, $xf(x) = 2F(x)$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} xf(x) = 2F(x) &\Rightarrow (xf(x))' = 2F'(x) \\ &\Rightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x) \\ &\Rightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc, f est solution de l'équation $xy' - y = 0$.

3) L'équation $xy' - y = 0$ est linéaire sans second membre.

On a

$$\begin{aligned} xy' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} |x| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} x. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation $xy' - y = 0$ est

$$y(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il résulte que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = kx$; $k \in \mathbb{R}$.

Exercice IV.

On veut résoudre l'équation de Bernoulli $xy' + y = xy^3$.

On a $y = 0$ est solution de l'équation de Bernoulli.

On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. On a

$$\begin{aligned} xy' + y = xy^3 &\Rightarrow xy'y^{-3} + yy^{-3} = x \\ &\Rightarrow \frac{-x}{2} \left(\frac{1}{y^2} \right)' + \frac{1}{y^2} = x. \end{aligned}$$

On pose $u = \frac{1}{y^2}$ alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$\frac{-x}{2}u' + u = x.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $\frac{-x}{2}u' + u = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{-x}{2}u' + u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{2u}{x} \\ &\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2}{x} dx \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{2}{x} dx \\ &\Rightarrow \ln |u| = 2 \ln |x| + cte \\ &\Rightarrow |u| = e^{cte} e^{2 \ln |x|} = e^{cte} x^2 \\ &\Rightarrow u = \pm e^{cte} x^2. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $\frac{-x}{2}u' + u = 0$ est

$$u_h(x) = kx^2; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $\frac{-x}{2}u' + u = x$ de la forme

$$u_p(x) = k(x)x^2.$$

On calcule u'_p et on remplace dans l'équation $\frac{-x}{2}u' + u = x$, on trouve que

$$u_p(x) = x^2 \int \frac{-2}{x^2} dx = x^2 \frac{2}{x} = 2x$$

Par suite, la solution générale de l'équation $\frac{-x}{2}u' + u = x$ est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx^2 + 2x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, pour $k \in \mathbb{R}$, on considère l'intervalle réel I_k défini par

$$I_k = \begin{cases}]0, +\infty[& \text{si } k = 0, \\]0, \frac{-2}{k}[& \text{si } k < 0. \\]-\infty, \frac{-2}{k}[\cup]0, +\infty[& \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Comme $u = \frac{1}{y^2} = kx^2 + 2x$ et $kx^2 + 2x > 0$ pour tout $x \in I_k$, alors les solutions de l'équation de Bernoulli sont de la forme

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{-1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{pour tout } x \in I_k.$$

Exercice V.

1) $y'' + 2y' = 4$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda = 0$.

Elle admet deux racines réelles $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -2$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation complète $y'' + 2y' = 4$ est une constante (c'est à dire un polynôme de degré

0) et on a $2 \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax$; $a \in \mathbb{R}$.

On calcule $y'_p(x)$ et $y''_p(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' = 4$, on trouve que $a = 2$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = 2x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' = 4$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + 2x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$2) y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' - 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

Elle admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ est un polynôme de degré 2 et on a $-2 \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire $y_p(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$, on trouve

$$-2ax^2 + 2(a-b)x + 2a + b - 2c = 2x^2 - 2x + 4.$$

On obtient par identification $a = -1$, $b = 0$ et $c = -3$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = -(x^2 + 3).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - (x^2 + 3); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$3) y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 6y' + 9y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$.

Comme $\Delta = 0$, alors elle admet une racine réelle double $\lambda = -3$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-3x} (C_1 x + C_2); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$ est de la forme $e^{mx} P_n(x)$ avec $m = 2$ et $n = 2$.

Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{2x} Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{2x} (ax^2 + bx + c); \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax^2 + bx + c$. Alors, $y_p(x) = e^{2x} u(x)$.

On calcule $y'_p(x)$ et $y''_p(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$, on trouve

$$25ax^2 + (20a + 25b)x + 2a + 10b + 25c = x^2.$$

On obtient par identification $a = \frac{1}{25}$, $b = \frac{-4}{125}$ et $c = \frac{6}{625}$.

Donc

$$u(x) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{125}x + \frac{6}{625}.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{2x} u(x) = e^{2x} \left(\frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{125}x + \frac{6}{625} \right) = \frac{e^{2x}}{625} (25x^2 - 20x + 6).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$ est

$$y(x) = e^{-3x} (C_1 x + C_2) + \frac{e^{2x}}{625} (25x^2 - 20x + 6); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4) $y'' + y = \cos 2x$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 1 = 0$.

Elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y = \cos 2x$ est de la forme $e^{mx} \cos(\omega x)$ avec $m = 0$ et $\omega = 2$.

Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la

forme

$$y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y = \cos 2x$, on trouve

$$(3A + 1) \cos(2x) + 3B \sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que

$$A = \frac{-1}{3} \text{ et } B = 0.$$

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{-\cos(2x)}{3}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y = \cos 2x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{\cos(2x)}{3}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$5) \quad y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x)).$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 5y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

Comme $\Delta = -16 < 0$, alors elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = -1 + 2i$ et $\lambda_2 = -1 - 2i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x))$ est de la forme $e^{mx} (2 \cos(\omega x) - 3 \sin(\omega x))$ avec $m = -1$ et $\omega = 2$.

Comme $-1 + 2i$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = x e^{-x} (A \cos(2x) + B \sin(2x)); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On pose $z(x) = x (A \cos(2x) + B \sin(2x))$. Alors, $y_p(x) = e^{-x} z(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x))$, on

trouve

$$(4B - 2) \cos(2x) + (3 - 4A) \sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que

$$A = \frac{3}{4} \text{ et } B = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$z(x) = x \left(\frac{3}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right).$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-x} z(x) = x e^{-x} \left(\frac{3}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x))$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) + x e^{-x} \left(\frac{3}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = e^{-x} \left[\left(\frac{3}{4} x + C_1 \right) \cos(2x) + \left(\frac{x}{2} + C_2 \right) \sin(2x) \right]; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$