



Filières SMP/SMC

Année Universitaire 2016-2017

## Travaux Dirigés : Analyse II

### Série 2

**Exercice I.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

1)  $(x^2 + 1) y' + x y = 0;$

2)  $y' = \frac{x^2}{y};$

3)  $x y' = y \left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right);$

4)  $2xyy' = y^2 - x^2;$

5)  $y' + x^2 y = 3e^{-x^3/3};$

6)  $y' + y = e^x(x - 1);$

7)  $y' \sin x - y \cos x = x;$

**Exercice II.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, +\infty[$  telle que

$$x \int_0^x f(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^x t f(t) dt, \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

1) Montrer que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2) Montrer que  $f$  est solution de l'équation

$$x y' - y = 0; \quad (E)$$

3) Donner l'expression de  $f$  en fonction de  $x$ .

**Exercice III.** Déterminer toutes les solutions de l'équation de Bernoulli suivante en précisant leurs domaines de définition.

$$x y' + y = x y^3.$$

**Exercice IV.** Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes.

1)  $y'' + 2y' + y = 2.$

2)  $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4.$

3)  $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}.$

4)  $y'' + 2y' + 2y = \sin x.$

5)  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x)).$

## Solutions des Exercices

## Série 2

## Exercice I.

$$1) (x^2 + 1) y' + x y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{x^2 + 1} y.$$

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{x^2 + 1} y &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-x}{x^2 + 1} dx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{-1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ \Rightarrow \ln |y| &= \frac{-1}{2} \ln(x^2 + 1) + cte = -\ln(\sqrt{x^2 + 1}) + cte \\ \Rightarrow |y| &= e^{-\ln(\sqrt{x^2 + 1})} e^{cte} \\ \Rightarrow y &= \pm e^{cte} \frac{1}{e^{\ln(\sqrt{x^2 + 1})}} \\ \Rightarrow y &= \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$2) y' = \frac{x^2}{y}.$$

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} &\Rightarrow y dy = x^2 dx \\ \Rightarrow \int y dy &= \int x^2 dx \\ \Rightarrow \frac{y^2}{2} &= \frac{x^3}{3} + cte \\ \Rightarrow y^2 &= \frac{2}{3} x^3 + \mu; \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, pour  $x \geq \left(\frac{-3}{2} \mu\right)^{1/3} = a$ , on a

$$|y(x)| = \sqrt{\frac{2}{3} x^3 + \mu}; \quad x \in [a, +\infty[.$$

D'où,

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + \mu}; \quad x \in [a, +\infty[.$$

$$3) \quad xy' = y \left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

C'est une équation homogène de la forme  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  avec  $f(t) = t(1 + \ln t)$ .

On pose  $u = \frac{y}{x}$  alors  $y = ux$  et  $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$ . Par suite,

$$\begin{aligned} x \frac{du}{dx} + u &= f(u) = u(1 + \ln u) \Rightarrow x \frac{du}{dx} = u(1 + \ln u) - u = u \ln u \\ &\Rightarrow \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u \ln u} \\ &\Rightarrow \ln|x| = \int \frac{du}{u \ln u} + cte = \int \frac{d(\ln u)}{\ln u} + cte = \ln(|\ln u|) + cte \\ &\Rightarrow |x| = e^{\ln(|\ln u|)} e^{cte} = e^{cte} |\ln u| \\ &\Rightarrow \ln u = Cx; \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow u = e^{Cx}; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc,  $y = ux = xe^{Cx}$ ;  $C \in \mathbb{R}$ .

$$4) \quad 2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} - 1\right) \left(1 + \frac{x}{y}\right).$$

C'est une équation homogène de la forme  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  avec  $f(t) = \frac{1}{2}(t-1)\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \frac{t^2 - 1}{2t}$ .

On pose  $u = \frac{y}{x}$  alors  $y = ux$  et  $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$ . Par suite,

$$\begin{aligned} x \frac{du}{dx} + u &= f(u) = \frac{u^2 - 1}{2u} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{2u} - u = \frac{-u^2 - 1}{2u} \\ &\Rightarrow \frac{-2u}{u^2 + 1} du = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = - \int \frac{2u}{u^2 + 1} du \\ &\Rightarrow \ln|x| = -\ln(u^2 + 1) + cte \\ &\Rightarrow |x| = e^{cte} e^{-\ln(u^2 + 1)} = \frac{e^{cte}}{u^2 + 1} \\ &\Rightarrow x = \frac{C}{u^2 + 1}; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y = xu = \frac{Cu}{u^2 + 1}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant  $u$  par  $\frac{y}{x}$ , on obtient

$$y^2 + x^2 - Cx = 0; \quad C \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$y = \sqrt{Cx - x^2}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

5)  $y' + x^2 y = 3e^{-x^3/3}$ .

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y' + x^2 y = 0$ .

On a

$$\begin{aligned} y' + x^2 y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -x^2 y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2 dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x^2 dx \\ &\Rightarrow \ln |y| = \frac{-x^3}{3} + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{-x^3/3} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{-x^3/3}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre  $y' + x^2 y = 0$  est

$$y_h(x) = k e^{-x^3/3}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation  $y' + x^2 y = 3e^{-x^3/3}$  de la forme

$$y_p(x) = k(x) e^{-x^3/3}.$$

On calcule  $y'_p$  et on remplace dans l'équation  $y' + x^2 y = 3e^{-x^3/3}$ , on trouve que  $k'(x) = 3$ , d'où  $k(x) = 3x$ .

Donc,

$$y_p(x) = 3x e^{-x^3/3}.$$

Donc, la solution générale de l'équation  $y' + x^2 y = 3e^{-x^3/3}$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k e^{-x^3/3} + 3x e^{-x^3/3} = (3x + k) e^{-x^3/3}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$6) y' + y = e^x(x - 1).$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y' + y = 0$ .

On a

$$\begin{aligned} y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int dx \\ &\Rightarrow \ln |y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre  $y' + y = 0$  est

$$y_h(x) = k e^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation  $y' + y = e^x(x - 1)$  de la forme

$$y_p(x) = k(x) e^{-x}.$$

On calcule  $y'_p$  et on remplace dans l'équation  $y' + y = e^x(x - 1)$ , on trouve que

$$k'(x) = e^{2x}(x - 1).$$

D'où

$$\begin{aligned} k(x) &= \int e^{2x}(x - 1) dx \\ &= \int \frac{1}{2} (e^{2x})' (x - 1) dx \\ &= \frac{e^{2x}(x - 1)}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \\ &= \frac{e^{2x}(x - 1)}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \\ &= e^{2x} \left( \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = e^x \left( \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \right).$$

Donc, la solution générale de l'équation  $y' + y = e^x(x - 1)$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + e^x \left( \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

7)  $y' \sin x - y \cos x = x.$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y' \sin x - y \cos x = 0.$

On a

$$\begin{aligned} y' \sin x - y \cos x = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{\sin x} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &\Rightarrow \ln |y| = \ln(|\sin x|) + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{\ln(|\sin x|)} = e^{cte} |\sin x| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} \sin x. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre  $y' \sin x - y \cos x = 0$  est

$$y_h(x) = k \sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation  $y' \sin x - y \cos x = x$  de la forme

$$y_p(x) = k(x) \sin x.$$

On calcule  $y'_p$  et on remplace dans l'équation  $y' \sin x - y \cos x = x$ , on trouve que

$$k'(x) = \frac{x}{\sin^2 x}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 k(x) &= \int \frac{x}{\sin^2 x} dx \\
 &= \int x \left( \frac{-1}{\tan x} \right)' dx \\
 &= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x} dx \\
 &= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &= \frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|).
 \end{aligned}$$

Il résulte que

$$y_p(x) = \sin x \left( \frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|) \right) = -x \cos x + \sin x \ln(|\sin x|).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y' \sin x - y \cos x = x$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k \sin x - x \cos x + \sin x \ln(|\sin x|) = -x \cos x + \left( k + \ln(|\sin x|) \right) \sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

### Exercice II.

1) On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x t f(t) dt.$$

Alors,

$$xF(x) = \frac{3}{2}G(x).$$

Comme  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , alors les deux fonctions  $F$  et  $G$  sont dérivables sur  $[0, +\infty[$  de dérivées respectives  $F'(x) = f(x)$  et  $G'(x) = xf(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

Soit  $x \in [0, +\infty[$ , alors

$$\begin{aligned}
 xF(x) &= \frac{3}{2}G(x) \Rightarrow (xF(x))' = \frac{3}{2}G'(x) \\
 &\Rightarrow F(x) + xF'(x) = \frac{3}{2}G'(x) \\
 &\Rightarrow F(x) + xf(x) = \frac{3}{2}xf(x) \\
 &\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}xf(x) - xf(x) \\
 &\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}xf(x).
 \end{aligned}$$



Donc, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = 2\frac{F(x)}{x} = \frac{2}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

D'autre part, comme  $f$  est continue en 0,  $F(0) = 0$ ,  $F$  est dérivable en 0 et  $F'(0) = f(0)$ , alors

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2\frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 2F'(0) = 2f(0).$$

Par suite,  $f(0) = 0$ .

2) On a pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $xf(x) = 2F(x)$ .

Soit  $x \in [0, +\infty[$ , alors

$$\begin{aligned} xf(x) = 2F(x) &\Rightarrow (xf(x))' = 2F'(x) \\ &\Rightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x) \\ &\Rightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc,  $f$  est solution de l'équation  $xy' - y = 0$ .

3) L'équation  $xy' - y = 0$  est linéaire sans second membre.

On a

$$\begin{aligned} xy' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} |x| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} x. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation  $xy' - y = 0$  est

$$y(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il résulte que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f(x) = kx$ ;  $k \in \mathbb{R}$ .

**Exercice III.**

On veut résoudre l'équation de Bernoulli  $xy' + y = xy^3$ .

On a  $y = 0$  est solution de l'équation de Bernoulli.

On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. On a

$$\begin{aligned} xy' + y = xy^3 &\Rightarrow xy'y^{-3} + yy^{-3} = x \\ &\Rightarrow \frac{-x}{2} \left( \frac{1}{y^2} \right)' + \frac{1}{y^2} = x. \end{aligned}$$

On pose  $u = \frac{1}{y^2}$  alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$\frac{-x}{2}u' + u = x.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $\frac{-x}{2}u' + u = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{-x}{2}u' + u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{2u}{x} \\ &\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2}{x} dx \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{2}{x} dx \\ &\Rightarrow \ln |u| = 2 \ln |x| + cte \\ &\Rightarrow |u| = e^{cte} e^{2 \ln |x|} = e^{cte} x^2 \\ &\Rightarrow u = \pm e^{cte} x^2. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre  $\frac{-x}{2}u' + u = 0$  est

$$u_h(x) = kx^2; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation  $\frac{-x}{2}u' + u = x$  de la forme

$$u_p(x) = k(x)x^2.$$

On calcule  $u'_p$  et on remplace dans l'équation  $\frac{-x}{2}u' + u = x$ , on trouve que

$$k'(x) = \frac{-2}{x^2}.$$

D'où

$$u_p(x) = x^2 \int \frac{-2}{x^2} dx = x^2 \frac{2}{x} = 2x$$

Par suite, la solution générale de l'équation  $\frac{-x}{2}u' + u = x$  est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx^2 + 2x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, pour  $k \in \mathbb{R}$ , on considère l'intervalle réel  $I_k$  défini par

$$I_k = \begin{cases} ]0, +\infty[ & \text{si } k = 0, \\ ]0, \frac{-2}{k}[ & \text{si } k < 0, \\ ]-\infty, \frac{-2}{k}[ \cup ]0, +\infty[ & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Comme  $u = \frac{1}{y^2} = kx^2 + 2x$  et  $kx^2 + 2x > 0$  pour tout  $x \in I_k$ , alors les solutions de l'équation de Bernoulli sont de la forme

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{-1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{pour tout } x \in I_k.$$

#### Exercice IV.

1)  $y'' + 2y' + y = 2$ .

On commence d'abord par résoudre l'équation sans second membre  $y'' + 2y' + y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ .

Elle admet une racine réelle double  $\lambda = -1$ . Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}(C_1 x + C_2); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme 2 est une solution constante évidente de l'équation  $y'' + 2y' + y = 2$ , alors la solution générale de cette équation est

$$y(x) = y_h(x) + 2 = e^{-x}(C_1 x + C_2) + 2; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2)  $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ .

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y'' + y' - 2y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ .

Comme  $\Delta = 9 > 0$ , alors, elle admet deux racines réelles distinctes  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -2$ .

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation  $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$  est un polynôme de degré 2 et on a  $-2 \neq 0$ , alors on cherche une solution particulière de la forme  $y_p(x) = Q_2(x)$  où  $Q_2$  est un polynôme de degré 2, c'est à dire  $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

On calcule  $y_p'(x)$  et  $y_p''(x)$  et on remplace dans l'équation  $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ , on trouve

$$-2ax^2 + 2(a-b)x + 2a + b - 2c = 2x^2 - 2x + 4.$$

On obtient par identification  $a = -1$ ,  $b = 0$  et  $c = -3$ .

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = -(x^2 + 3).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - (x^2 + 3); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3)  $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$ .

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y'' + y' - 2y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ .

Comme  $\Delta = 9 > 0$ , alors elle admet deux racines réelles distinctes  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -2$ .

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation  $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$  est de la forme  $e^{mx} P_n(x)$  avec  $m = -2$  et  $n = 2$ .

comme  $-2$  est racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme  $y_p(x) = e^{-2x} x Q_2(x)$  où  $Q_2$  est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{-2x} x (ax^2 + bx + c) = e^{-2x} (ax^3 + bx^2 + cx); \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

On pose  $u(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ . Alors,  $y_p(x) = e^{-2x} u(x)$ .

On calcule  $y'_p(x)$  et  $y''_p(x)$  et on remplace dans l'équation  $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$ , on trouve

$$-9ax^2 + (6a - 6b)x + 2b - 3c = x^2.$$

On obtient par identification  $a = \frac{-1}{9}$ ,  $b = \frac{-1}{9}$  et  $c = \frac{-2}{27}$ .

Donc

$$u(x) = \frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-2x} u(x) = e^{-2x} \left( \frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x \right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^{-2x} \left( \frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x \right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = C_1 e^x + e^{-2x} \left( \frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + C_2 \right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4)  $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ .

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y'' + 2y' + 2y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ .

Comme  $\Delta = -4 < 0$ , alors elle admet deux racines complexes  $\lambda_1 = -1 + i$  et  $\lambda_2 = -1 - i$ .

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation  $y'' + 2y' + 2y = \sin x$  est de la forme  $e^{mx} \sin(\omega x)$  avec  $m = 0$  et  $\omega = 1$ .

Comme  $i$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = A \cos x + B \sin x; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On calcule  $y'_p(x)$  et  $y''_p(x)$  et on remplace dans l'équation  $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ , on trouve

$$(A + 2B) \cos x + (B - 2A - 1) \sin x = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions  $\cos x$  et  $\sin x$  sont linéairement indépendantes, que

$$A = \frac{-2}{5} \text{ et } B = \frac{1}{5}.$$

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{-2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y'' + 2y' + 2y = \sin x$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$5) \quad y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x)).$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ .

Comme  $\Delta = -16 < 0$ , alors elle admet deux racines complexes  $\lambda_1 = -1 + 2i$  et  $\lambda_2 = -1 - 2i$ .

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x))$  est de la forme  $e^{mx} (2 \cos(\omega x) - 3 \sin(\omega x))$  avec  $m = -1$  et  $\omega = 2$ .

comme  $-1 + 2i$  est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = x e^{-x} (A \cos(2x) + B \sin(2x)); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On pose  $z(x) = x (A \cos(2x) + B \sin(2x))$ . Alors,  $y_p(x) = e^{-x} z(x)$ .

On calcule  $y'_p(x)$  et  $y''_p(x)$  et on remplace dans l'équation  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x))$ , on trouve

$$(4B - 2) \cos(2x) + (3 - 4A) \sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions  $\cos x$  et  $\sin x$  sont linéairement indépendantes, que

$$A = \frac{3}{4} \text{ et } B = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$z(x) = x \left( \frac{3}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right).$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-x} z(x) = x e^{-x} \left( \frac{3}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x))$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) + x e^{-x} \left( \frac{3}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = e^{-x} \left[ \left( \frac{3}{4}x + C_1 \right) \cos(2x) + \left( \frac{x}{2} + C_2 \right) \sin(2x) \right]; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$