



## Travaux Dirigés : Analyse II

### Série 2

**Exercice I.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

1)  $(x - 1)y' - 2y = 0;$

2)  $y' = (1 - y)(2 - y);$

3)  $xy' = x + y;$

4)  $2xyy' = y^2 - x^2;$

5)  $2x^2 y' + y = 1;$

6)  $y' \sin x - y \cos x = x;$

7)  $(x + 1)y' - y = \ln x.$

**Exercice II.**

1) Calculer  $\int e^x(x - 1) dx.$

2) On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (x - 2)e^x.$

2.1) Montrer que  $f(x) = e^{-x}g(x)$  est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = x - 1; \quad (E)$$

2.2) Montrer que la solution générale  $y$  de l'équation (E) s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{-x} + f(x), \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2.3) Déterminer la solution de l'équation (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

**Exercice III.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, +\infty[$  telle que

$$x \int_0^x f(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^x t f(t) dt, \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

1) Montrer que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2) Montrer que  $f$  est solution de l'équation

$$x y' - y = 0; \quad (E)$$

3) Donner l'expression de  $f$  en fonction de  $x$ .

**Exercice IV.** Déterminer toutes les solutions de l'équation de Bernoulli suivante en précisant leurs domaines de définition.

$$x y' + y = x y^3.$$

**Exercice V.** Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes.

1)  $y'' + 2y' = 4;$

2)  $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4;$

3)  $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x};$

4)  $y'' + y = \cos 2x;$

5)  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x)).$

## Solutions des Exercices

## Série 2

## Exercice I.

$$1) (x-1)y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-1}.$$

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-1} &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x-1} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x-1} \\ &\Rightarrow \ln |y| = 2 \ln |x-1| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{2 \ln |x-1|} e^{cte} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} (x-1)^2 \\ &\Rightarrow y = C(x-1)^2; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$2) y' = (1-y)(2-y).$$

C'est une équation à variables séparées (plus exactement elle est autonome).

On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = (1-y)(2-y) &\Rightarrow \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = \int dx \\ &\Rightarrow \int \left( \frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y} \right) dy = \int dx \\ &\Rightarrow -\ln |1-y| + \ln |2-y| = x + cte \Rightarrow \ln \left| \frac{2-y}{1-y} \right| = x + cte \\ &\Rightarrow \left| \frac{2-y}{1-y} \right| = e^x e^{cte} \Rightarrow \frac{2-y}{1-y} = \pm e^{cte} e^x \\ &\Rightarrow \frac{2-y}{1-y} = C e^x; \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow y = \frac{C e^x - 2}{C e^x - 1}; \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$3) \quad xy' = x + y \Rightarrow y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

C'est une équation homogène de la forme  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  avec  $f(t) = 1 + t$ .

On pose  $u = \frac{y}{x}$  alors  $y = ux$  et  $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ . Par suite,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u &= f(u) = 1 + u \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int du &= \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow u &= \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y = ux = x(\ln|x| + C); \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$4) \quad 2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - 1\right)\left(1 + \frac{x}{y}\right).$$

C'est une équation homogène de la forme  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  avec  $f(t) = \frac{1}{2}(t-1)\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \frac{t^2 - 1}{2t}$ .

On pose  $u = \frac{y}{x}$  alors  $y = ux$  et  $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ . Par suite,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u &= f(u) = \frac{u^2 - 1}{2u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{2u} - u = \frac{-u^2 - 1}{2u} \\ \Rightarrow \frac{-2u}{u^2 + 1} du &= \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int \frac{dx}{x} &= - \int \frac{2u}{u^2 + 1} du \\ \Rightarrow \ln|x| &= -\ln(u^2 + 1) + cte \\ \Rightarrow |x| &= e^{cte} e^{-\ln(u^2 + 1)} = \frac{e^{cte}}{u^2 + 1} \\ \Rightarrow x &= \frac{C}{u^2 + 1}; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y = xu = \frac{Cu}{u^2 + 1}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant  $u$  par  $\frac{y}{x}$ , on obtient

$$y^2 + x^2 - Cx = 0; \quad C \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$y = \sqrt{Cx - x^2}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$5) 2x^2 y' + y = 1.$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $2x^2 y' + y = 0$ .

On a

$$\begin{aligned} 2x^2 y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x^2} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2} \\ &\Rightarrow \ln |y| = \frac{1}{2x} + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{\frac{1}{2x}} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{\frac{1}{2x}}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre  $2x^2 y' + y = 0$  est

$$y_h(x) = k e^{\frac{1}{2x}}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation  $2x^2 y' + y = 1$  de la forme

$$y_p(x) = k(x) e^{\frac{1}{2x}}.$$

On calcule  $y'_p$  et on remplace dans l'équation  $2x^2 y' + y = 1$ , on trouve que

$$y_p(x) = e^{\frac{1}{2x}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{2x^2} dx = e^{\frac{1}{2x}} e^{-\frac{1}{2x}} = 1.$$

Donc, la solution générale de l'équation  $2x^2 y' + y = 1$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k e^{\frac{1}{2x}} + 1; \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$6) y' \sin x - y \cos x = x.$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y' \sin x - y \cos x = 0$ .

On a

$$\begin{aligned}
 y' \sin x - y \cos x = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{\sin x} \\
 &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &\Rightarrow \ln |y| = \ln(|\sin x|) + cte \\
 &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{\ln(|\sin x|)} = e^{cte} |\sin x| \\
 &\Rightarrow y = \pm e^{cte} \sin x.
 \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre  $y' \sin x - y \cos x = 0$  est

$$y_h(x) = k \sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation  $y' \sin x - y \cos x = x$  de la forme

$$y_p(x) = k(x) \sin x.$$

On calcule  $y'_p$  et on remplace dans l'équation  $y' \sin x - y \cos x = x$ , on trouve que

$$y_p(x) = \sin x \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sin^2 x} dx &= \int x \left( \frac{-1}{\tan x} \right)' dx = \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x} dx \\
 &= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &= \frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|).
 \end{aligned}$$

Il résulte que

$$y_p(x) = \sin x \left( \frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|) \right) = -x \cos x + \sin x \ln(|\sin x|).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y' \sin x - y \cos x = x$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k \sin x - x \cos x + \sin x \ln(|\sin x|) = -x \cos x + \left( k + \ln(|\sin x|) \right) \sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$7) (x+1)y' - y = \ln x.$$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $(x+1)y' - y = 0$ .

On a

$$\begin{aligned} (x+1)y' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1} \\ &\Rightarrow \ln |y| = \ln |x+1| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} |x+1| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} (x+1). \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre  $(x+1)y' - y = 0$  est

$$y_h(x) = k(x+1); \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation  $(x+1)y' - y = \ln x$  de la forme

$$y_p(x) = k(x)(x+1).$$

On calcule  $y_p'$  et on remplace dans l'équation  $(x+1)y' - y = \ln x$ , on trouve que

$$y_p(x) = (x+1) \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx &= - \int \left( (x+1)^{-1} \right)' \ln x dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx \\ &= \frac{-\ln x}{x+1} + \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{-\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) = \frac{-\ln x}{x+1} + \ln \left( \frac{x}{x+1} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = (x+1) \left( \frac{-\ln x}{x+1} + \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) \right) = -\ln x + (x+1) \ln \left( \frac{x}{x+1} \right).$$

Par suite, la solution générale de l'équation  $(x+1)y' - y = \ln x$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k(x+1) - \ln x + (x+1) \ln \left( \frac{x}{x+1} \right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

### Exercice II.

1)  $\int e^x(x-1) dx$  est une primitive de la fonction  $e^x(x-1)$ . On a

$$\begin{aligned} \int e^x(x-1) dx &= \int (e^x)'(x-1) dx = e^x(x-1) - \int e^x dx \\ &= e^x(x-1) - e^x + C = e^x(x-2) + C; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.1) Soit  $g(x) = (x-2)e^x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $g$  est une primitive de la fonction  $e^x(x-1)$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $f(x) = e^{-x}g(x) = x-2$ . Donc,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a  $f' + f = 1 + x - 2 = x - 1$ . Par suite,  $f$  est solution de l'équation  $y' + y = x - 1$ .

2.2) On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y' + y = 0$ .

$$\begin{aligned} y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int dx \\ &\Rightarrow \ln |y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre  $y' + y = 0$  est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation  $y' + y = x - 1$  de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$



On calcule  $y'_p$  et on remplace dans l'équation  $y' + y = x - 1$ , on trouve que

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x} \int e^x(x-1) dx = e^{-x}g(x) \quad (\text{car } g \text{ est primitive de } e^x(x-1)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par suite, la solution générale de l'équation  $y' + y = x - 1$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + f(x); \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.3) Soit  $y$  la solution de (E) telle que  $y(1) = 0$ . On a

$$y(1) = 0 \Rightarrow ke^{-1} + 1 - 2 = 0 \Rightarrow ke^{-1} = 1 \Rightarrow k = e.$$

Donc,  $y(x) = e^{1-x} + f(x) = e^{1-x} + x - 2$  est solution de (E) telle que  $y(1) = 0$ .

### Exercice III.

1) On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x tf(t) dt.$$

Alors,

$$xF(x) = \frac{3}{2}G(x).$$

Comme  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , alors les deux fonctions  $F$  et  $G$  sont dérivables sur  $[0, +\infty[$  de dérivées respectives  $F'(x) = f(x)$  et  $G'(x) = xf(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

Soit  $x \in [0, +\infty[$ , alors

$$\begin{aligned} xF(x) &= \frac{3}{2}G(x) \Rightarrow (xF(x))' = \frac{3}{2}G'(x) \\ &\Rightarrow F(x) + xF'(x) = \frac{3}{2}G'(x) \\ &\Rightarrow F(x) + xf(x) = \frac{3}{2}xf(x) \\ &\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}xf(x) - xf(x) \\ &\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}xf(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = 2\frac{F(x)}{x} = \frac{2}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

D'autre part, comme  $f$  est continue en 0,  $F(0) = 0$ ,  $F$  est dérivable en 0 et  $F'(0) = f(0)$ , alors

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2\frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 2F'(0) = 2f(0).$$

Par suite,  $f(0) = 0$ .

2) On a pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $xf(x) = 2F(x)$ .

Soit  $x \in [0, +\infty[$ , alors

$$\begin{aligned} xf(x) = 2F(x) &\Rightarrow (xf(x))' = 2F'(x) \\ &\Rightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x) \\ &\Rightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc,  $f$  est solution de l'équation  $xy' - y = 0$ .

3) L'équation  $xy' - y = 0$  est linéaire sans second membre.

On a

$$\begin{aligned} xy' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} |x| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} x. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation  $xy' - y = 0$  est

$$y(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il résulte que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f(x) = kx$ ;  $k \in \mathbb{R}$ .

**Exercice IV.**

On veut résoudre l'équation de Bernoulli  $xy' + y = xy^3$ .

On a  $y = 0$  est solution de l'équation de Bernoulli.

On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. On a

$$\begin{aligned} xy' + y = xy^3 &\Rightarrow xy'y^{-3} + yy^{-3} = x \\ &\Rightarrow \frac{-x}{2} \left( \frac{1}{y^2} \right)' + \frac{1}{y^2} = x. \end{aligned}$$

On pose  $u = \frac{1}{y^2}$  alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$\frac{-x}{2}u' + u = x.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $\frac{-x}{2}u' + u = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{-x}{2}u' + u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{2u}{x} \\ &\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2}{x} dx \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{2}{x} dx \\ &\Rightarrow \ln |u| = 2 \ln |x| + cte \\ &\Rightarrow |u| = e^{cte} e^{2 \ln |x|} = e^{cte} x^2 \\ &\Rightarrow u = \pm e^{cte} x^2. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre  $\frac{-x}{2}u' + u = 0$  est

$$u_h(x) = kx^2; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation  $\frac{-x}{2}u' + u = x$  de la forme

$$u_p(x) = k(x)x^2.$$

On calcule  $u'_p$  et on remplace dans l'équation  $\frac{-x}{2}u' + u = x$ , on trouve que

$$u_p(x) = x^2 \int \frac{-2}{x^2} dx = x^2 \frac{2}{x} = 2x$$

Par suite, la solution générale de l'équation  $\frac{-x}{2}u' + u = x$  est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx^2 + 2x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, pour  $k \in \mathbb{R}$ , on considère l'intervalle réel  $I_k$  défini par

$$I_k = \begin{cases} ]0, +\infty[ & \text{si } k = 0, \\ ]0, \frac{-2}{k}[ & \text{si } k < 0. \\ ]-\infty, \frac{-2}{k}[ \cup ]0, +\infty[ & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Comme  $u = \frac{1}{y^2} = kx^2 + 2x$  et  $kx^2 + 2x > 0$  pour tout  $x \in I_k$ , alors les solutions de l'équation de Bernoulli sont de la forme

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{-1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{pour tout } x \in I_k.$$

### Exercice V.

1)  $y'' + 2y' = 4$ .

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y'' + 2y' = 0$ .

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ .

Elle admet deux racines réelles  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = -2$ .

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation complète  $y'' + 2y' = 4$  est une constante (c'est à dire un polynôme de degré

0) et on a  $2 \neq 0$ , alors on cherche une solution particulière de la forme  $y_p(x) = ax$ ;  $a \in \mathbb{R}$ .

On calcule  $y'_p(x)$  et  $y''_p(x)$  et on remplace dans l'équation  $y'' + 2y' = 4$ , on trouve que  $a = 2$ .

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = 2x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y'' + 2y' = 4$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + 2x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$2) y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y'' + y' - 2y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ .

Elle admet deux racines réelles distinctes  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -2$ .

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation  $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$  est un polynôme de degré 2 et on a  $-2 \neq 0$ , alors on cherche une solution particulière de la forme  $y_p(x) = Q_2(x)$  où  $Q_2$  est un polynôme de degré 2, c'est à dire  $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

On calcule  $y_p'(x)$  et  $y_p''(x)$  et on remplace dans l'équation  $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ , on trouve

$$-2ax^2 + 2(a-b)x + 2a + b - 2c = 2x^2 - 2x + 4.$$

On obtient par identification  $a = -1$ ,  $b = 0$  et  $c = -3$ .

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = -(x^2 + 3).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - (x^2 + 3); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$3) y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y'' + 6y' + 9y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ .

Comme  $\Delta = 0$ , alors elle admet une racine réelle double  $\lambda = -3$ .

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-3x} (C_1 x + C_2); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation  $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$  est de la forme  $e^{mx} P_n(x)$  avec  $m = 2$  et  $n = 2$ .

Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme  $y_p(x) = e^{2x} Q_2(x)$  où  $Q_2$  est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{2x} (ax^2 + bx + c); \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

On pose  $u(x) = ax^2 + bx + c$ . Alors,  $y_p(x) = e^{2x} u(x)$ .

On calcule  $y'_p(x)$  et  $y''_p(x)$  et on remplace dans l'équation  $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$ , on trouve

$$25ax^2 + (20a + 25b)x + 2a + 10b + 25c = x^2.$$

On obtient par identification  $a = \frac{1}{25}$ ,  $b = \frac{-4}{125}$  et  $c = \frac{6}{625}$ .

Donc

$$u(x) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{125}x + \frac{6}{625}.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{2x} u(x) = e^{2x} \left( \frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{125}x + \frac{6}{625} \right) = \frac{e^{2x}}{625} (25x^2 - 20x + 6).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-3x} (C_1 x + C_2) + \frac{e^{2x}}{625} (25x^2 - 20x + 6); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4)  $y'' + y = \cos 2x$ .

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y'' + y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 + 1 = 0$ .

Elle admet deux racines complexes  $\lambda_1 = i$  et  $\lambda_2 = -i$ .

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation  $y'' + y = \cos 2x$  est de la forme  $e^{mx} \cos(\omega x)$  avec  $m = 0$  et  $\omega = 2$ .

Comme  $2i$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la

forme

$$y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On calcule  $y_p'(x)$  et  $y_p''(x)$  et on remplace dans l'équation  $y'' + y = \cos 2x$ , on trouve

$$(3A + 1) \cos(2x) + 3B \sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions  $\cos x$  et  $\sin x$  sont linéairement indépendantes, que

$$A = \frac{-1}{3} \text{ et } B = 0.$$

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{-\cos(2x)}{3}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y'' + y = \cos 2x$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{\cos(2x)}{3}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$5) \quad y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x)).$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ .

Comme  $\Delta = -16 < 0$ , alors elle admet deux racines complexes  $\lambda_1 = -1 + 2i$  et  $\lambda_2 = -1 - 2i$ .

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x))$  est de la forme  $e^{mx} (2 \cos(\omega x) - 3 \sin(\omega x))$  avec  $m = -1$  et  $\omega = 2$ .

Comme  $-1 + 2i$  est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = x e^{-x} (A \cos(2x) + B \sin(2x)); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On pose  $z(x) = x (A \cos(2x) + B \sin(2x))$ . Alors,  $y_p(x) = e^{-x} z(x)$ .

On calcule  $y_p'(x)$  et  $y_p''(x)$  et on remplace dans l'équation  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x))$ , on

trouve

$$(4B - 2) \cos(2x) + (3 - 4A) \sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions  $\cos x$  et  $\sin x$  sont linéairement indépendantes, que

$$A = \frac{3}{4} \text{ et } B = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$z(x) = x \left( \frac{3}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right).$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-x} z(x) = x e^{-x} \left( \frac{3}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} (2 \cos(2x) - 3 \sin(2x))$  est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) + x e^{-x} \left( \frac{3}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = e^{-x} \left[ \left( \frac{3}{4} x + C_1 \right) \cos(2x) + \left( \frac{x}{2} + C_2 \right) \sin(2x) \right]; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$