Filières SMP/SMC

Année Universitaire 2018-2019

Travaux Dirigés : Analyse II

Série 2

Exercice I. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1) $\left(x^2+1\right)\,y'+x\,y=0\,;$

2) $y'=\dfrac{x^2}{y}\,;$

3) $x\,y'=y\left(1+\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right);$

4) $2xyy'=y^2-x^2\,;$

5) $y'+x^2\,y=3e^{-x^3/3}\,;$

6) $y'+y=e^x(x-1)\,;$

7) $y'\sin x-y\cos x=x.$

Exercice II.

1) Calculer $\displaystyle\int e^x(x-1)\,dx.$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x-2)e^x$.

2) Montrer que $f(x)=e^{-x}g(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'+y=x-1; \qquad (E)$$

3) Montrer que la solution générale y de l'équation (E) s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{-x} + f(x), \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

4) Déterminer la solution de l'équation (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

Exercice III. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ telle que

$$x \int_0^x f(t)\,dt = \frac{3}{2} \int_0^x t f(t)\,dt, \qquad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

1) Montrer que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2) Montrer que f est solution de l'équation

$$x\,y' - y = 0; \qquad (E)$$

3) Donner l'expression de f en fonction de x.

Exercice IV. Déterminer toutes les solutions de l'équation de Bernoulli suivante en précisant leurs domaines de définition.

$$x\,y' + y = xy^3.$$

Exercice V. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes.

1) $y'' + 2y' + y = 2$.

2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$.

3) $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$.

4) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$.

5) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$.

Solutions des Exercices

Série 2

Exercice I.

1) $\left(x^2+1\right)\, y' + x\, y = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-x}{x^2+1}\, y.$

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{x^2+1}\, y \Rightarrow \frac{dy}{y} &= \frac{-x}{x^2+1}\, dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{-1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = \frac{-1}{2} \ln(x^2+1) + cte = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{-\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)} e^{cte} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte} \frac{1}{e^{\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)}} \\
&\Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2) $y' = \dfrac{x^2}{y}.$

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} &\Rightarrow y dy = x^2 dx \\
&\Rightarrow \int y dy = \int x^2 dx \\
&\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + cte \\
&\Rightarrow y^2 = \frac{2}{3}\, x^3 + \mu; \quad \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc, pour $x \geq \left(\dfrac{-3}{2}\, \mu\right)^{1/3} = a$, on a

$$|y(x)| = \sqrt{\frac{2}{3}\, x^3 + \mu}; \quad x \in [a, +\infty[.$$

D'où,

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\,x^3 + \mu}; \qquad x \in [a, +\infty[.$$

3) $x\,y' = y\left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) \Rightarrow y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = t(1 + \ln t)$.

On pose $u = \frac{y}{x}$ alors $y = u\,x$ et $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} + u = f(u) = u(1 + \ln u) &\Rightarrow x\frac{du}{dx} = u(1 + \ln u) - u = u\ln u \\
&\Rightarrow \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u\ln u} \\
&\Rightarrow \ln|x| = \int \frac{du}{u\ln u} + cte = \int \frac{d(\ln u)}{\ln u} + cte = \ln\left(|\ln u|\right) + cte \\
&\Rightarrow |x| = e^{\ln(|\ln u|)}e^{cte} = e^{cte}|\ln u| \\
&\Rightarrow \ln u = Cx; \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow u = e^{Cx}; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc, $y = ux = xe^{Cx}; \quad C \in \mathbb{R}$.

4) $2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - 1\right)\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = \frac{1}{2}(t-1)(1+\frac{1}{t}) = \frac{t^2-1}{2t}$.

On pose $u = \frac{y}{x}$ alors $y = u\,x$ et $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} + u = f(u) = \frac{u^2-1}{2u} &\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2-1}{2u} - u = \frac{-u^2-1}{2u} \\
&\Rightarrow \frac{-2u}{u^2+1}\,du = \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2u}{u^2+1}\,du \\
&\Rightarrow \ln|x| = -\ln(u^2+1) + cte \\
&\Rightarrow |x| = e^{cte}e^{-\ln(u^2+1)} = \frac{e^{cte}}{u^2+1} \\
&\Rightarrow x = \frac{C}{u^2+1}; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$y = x\,u = \frac{Cu}{u^2+1}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant u par $\dfrac{y}{x}$, on obtient

$$y^2 + x^2 - Cx = 0; \quad C \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$y = \sqrt{Cx - x^2}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

5) $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + x^2\, y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} y' + x^2\, y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -x^2\, y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2\, dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x^2\, dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = \frac{-x^3}{3} + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{-x^3/3} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{-x^3/3}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + x^2\, y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x^3/3}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x^3/3}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$, on trouve que $k'(x) = 3$, d'où $k(x) = 3x$.

Donc,

$$y_p(x) = 3xe^{-x^3/3}.$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + x^2\, y = 3e^{-x^3/3}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x^3/3} + 3xe^{-x^3/3} = (3x + k)e^{-x^3/3}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

6) $y' + y = e^x(x-1)$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = e^x(x-1)$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = e^x(x-1)$, on trouve que

$$k'(x) = e^{2x}(x-1).$$

D'où

$$\begin{aligned} k(x) &= \int e^{2x}(x-1)\,dx \\ &= \int \frac{1}{2}\left(e^{2x}\right)'(x-1)\,dx \\ &= \frac{e^{2x}(x-1)}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx \\ &= \frac{e^{2x}(x-1)}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \\ &= e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$y_p(x) = e^x\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right).$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' + y = e^x(x-1)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + e^x\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

7) $y'\sin x - y\cos x = x$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'\sin x - y\cos x = 0$.

On a

$$\begin{aligned} y'\sin x - y\cos x = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x}{\sin x} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = \ln(|\sin x|) + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{\ln(|\sin x|)} = e^{cte}|\sin x| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}\sin x. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y'\sin x - y\cos x = 0$ est

$$y_h(x) = k\sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y'\sin x - y\cos x = x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)\sin x.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y'\sin x - y\cos x = x$, on trouve que

$$k'(x) = \frac{x}{\sin^2 x}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
k(x) &= \int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx \\
&= \int x\left(\frac{-1}{\tan x}\right)'\,dx \\
&= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}\,dx \\
&= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \\
&= \frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|).
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$y_p(x) = \sin x\left(\frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|)\right) = -x\cos x + \sin x\ln(|\sin x|).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'\sin x - y\cos x = x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k\sin x - x\cos x + \sin x\ln(|\sin x|) = -x\cos x + \Big(k + \ln(|\sin x|)\Big)\sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice II.

1) $\int e^x(x-1)\,dx$ est une primitive de la fonction $e^x(x-1)$. On a

$$\begin{aligned}
\int e^x(x-1)\,dx = \int (e^x)'(x-1)\,dx &= e^x(x-1) - \int e^x\,dx \\
&= e^x(x-1) - e^x + C = e^x(x-2) + C; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2) Soit $g(x) = (x-2)e^x; \quad x \in \mathbb{R}$. La fonction g est une primitive de la fonction $e^x(x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x) = e^{-x}g(x) = x-2$. Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f' + f = 1 + x - 2 = x - 1$. Par suite, f est solution de l'équation $y' + y = x - 1$.

3) On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

$$\begin{aligned} y' + y = 0 \Rightarrow y' &= \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = x - 1$ est de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = x - 1$, on trouve que

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x}\int e^x(x-1)\,dx = e^{-x}g(x) \qquad (\text{car } g \text{ est primitive de } e^x(x-1)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y' + y = x - 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + f(x); \quad k \in \mathbb{R}.$$

4) Soit y la solution de (E) telle que $y(1) = 0$. On a

$$y(1) = 0 \Rightarrow ke^{-1} + 1 - 2 = 0 \Rightarrow ke^{-1} = 1 \Rightarrow k = e.$$

Donc, $y(x) = e^{1-x} + f(x) = e^{1-x} + x - 2$ est solution de (E) telle que $y(1) = 0$.

Exercice III.

1) On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x tf(t)\,dt.$$

Alors,

$$xF(x) = \frac{3}{2}G(x).$$

Comme f est continue sur $[0,+\infty[$, alors les deux fonctions F et G sont dérivables sur $[0,+\infty[$ de dérivées respectives $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = xf(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

Soit $x \in [0,+\infty[$, alors

$$\begin{aligned}
xF(x) = \frac{3}{2}G(x) \Rightarrow (xF(x))' &= \frac{3}{2}G'(x) \\
\Rightarrow F(x) + xF'(x) &= \frac{3}{2}G'(x) \\
\Rightarrow F(x) + xf(x) &= \frac{3}{2}xf(x) \\
\Rightarrow F(x) &= \frac{3}{2}xf(x) - xf(x) \\
\Rightarrow F(x) &= \frac{1}{2}xf(x).
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) = 2\dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

D'autre part, comme f est continue en 0, $F(0) = 0$, F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0)$, alors

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 2F'(0) = 2f(0).$$

Par suite, $f(0) = 0$.

2) On a pour tout $x \in [0,+\infty[$, $xf(x) = 2F(x)$.

Soit $x \in [0,+\infty[$, alors

$$\begin{aligned}
xf(x) = 2F(x) \Rightarrow (xf(x))' &= 2F'(x) \\
\Rightarrow f(x) + xf'(x) &= 2f(x) \\
\Rightarrow xf'(x) - f(x) &= 0
\end{aligned}$$

Donc, f est solution de l'équation $x\,y' - y = 0$.

3) L'équation $x\,y' - y = 0$ est linéaire sans second membre.

On a

$$
\begin{aligned}
x\,y' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}\\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}\\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + cte\\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}|x|\\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}x.
\end{aligned}
$$

Donc, la solution générale de l'équation $x\,y' - y = 0$ est

$$y(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il résulte que pour tout $x \in [0, +\infty[,\ f(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$

Exercice IV.

On veut résoudre l'équation de Bernoulli $x\,y' + y = xy^3$.

On a $y = 0$ est solution de l'équation de Bernoulli.

On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. On a

$$
\begin{aligned}
x\,y' + y = xy^3 &\Rightarrow x\,y'y^{-3} + y\,y^{-3} = x\\
&\Rightarrow \frac{-x}{2}\left(\frac{1}{y^2}\right)' + \frac{1}{y^2} = x.
\end{aligned}
$$

On pose $u = \dfrac{1}{y^2}$ alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$\frac{-x}{2}u' + u = x.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $\dfrac{-x}{2}u' + u = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{-x}{2}u' + u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{2u}{x} \\
&\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2}{x}\,dx \\
&\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{2}{x}\,dx \\
&\Rightarrow \ln|u| = 2\ln|x| + cte \\
&\Rightarrow |u| = e^{cte}e^{2\ln|x|} = e^{cte}x^2 \\
&\Rightarrow u = \pm e^{cte}x^2.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $\dfrac{-x}{2}u' + u = 0$ est

$$u_h(x) = kx^2; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $\dfrac{-x}{2}u' + u = x$ de la forme

$$u_p(x) = k(x)x^2.$$

On calcule u_p' et on remplace dans l'équation $\dfrac{-x}{2}u' + u = x$, on trouve que

$$k'(x) = \frac{-2}{x^2}.$$

D'où

$$u_p(x) = x^2 \int \frac{-2}{x^2}\,dx = x^2\,\frac{2}{x} = 2x$$

Par suite, la solution générale de l'équation $\dfrac{-x}{2}u' + u = x$ est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx^2 + 2x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, pour $k \in \mathbb{R}$, on considère l'intervalle réel I_k défini par

$$I_k = \begin{cases}]0, +\infty[& \text{si } k = 0, \\ \left]0, \dfrac{-2}{k}\right[& \text{si } k < 0. \\ \left]-\infty, \dfrac{-2}{k}\right[\cup]0, +\infty[& \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Comme $u = \dfrac{1}{y^2} = kx^2 + 2x$ et $kx^2 + 2x > 0$ pour tout $x \in I_k$, alors les solutions de l'équation de Bernoulli sont de la forme

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{-1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{pour tout } x \in I_k.$$

Exercice V.

1) $y'' + 2y' + y = 2.$

On commence d'abord par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + y = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$

Elle admet une racine réelle double $\lambda = -1$. Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\Big(C_1\, x + C_2\Big); \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme 2 est une solution constante évidente de l'équation $y'' + 2y' + y = 2,$ alors la solution générale de cette équation est

$$y(x) = y_h(x) + 2 = e^{-x}\Big(C_1\, x + C_2\Big) + 2; \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4.$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' - 2y = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$

Comme $\Delta = 9 > 0$, alors, elle admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2.$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x}; \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ est un polynôme de degré 2 et on a $-2 \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire $y_p(x) = ax^2 + bx + c; \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}.$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$, on trouve

$$-2ax^2 + 2(a - b)x + 2a + b - 2c = 2x^2 - 2x + 4.$$

On obtient par identification $a = -1,\ b = 0$ et $c = -3$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = -(x^2 + 3).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-2x} - (x^2 + 3); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3) $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' - 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

Comme $\Delta = 9 > 0$, alors elle admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$ est de la forme $e^{mx}\, P_n(x)$ avec $m = -2$ et $n = 2$.

comme -2 est racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{-2x}\, x\, Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{-2x}\, x \left(ax^2 + bx + c\right) == e^{-2x} \left(ax^3 + bx^2 + cx\right); \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Alors, $y_p(x) = e^{-2x}\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$, on trouve

$$-9ax^2 + (6a - 6b)x + 2b - 3c = x^2.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{-1}{9}$, $b = \dfrac{-1}{9}$ et $c = \dfrac{-2}{27}$.

Donc

$$u(x) = \frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-2x}\, u(x) = e^{-2x} \left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^x + +C_2\, e^{-2x} + e^{-2x}\left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = C_1\, e^x + e^{-2x}\left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + C_2\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$.

Comme $\Delta = -4 < 0$, alors elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\left(C_1\, \cos x + C_2\, \sin x\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ est de la forme $e^{mx}\,\sin(\omega x)$ avec $m = 0$ et $\omega = 1$.

Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin x$, on trouve

$$\Big(A + 2B\Big)\cos x + \Big(B - 2A - 1\big)\sin x = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = \dfrac{-2}{5}$ et $B = \dfrac{1}{5}$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{-2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\left(C_1\, \cos x + C_2\, \sin x\right) - \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 5y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

Comme $\Delta = -16 < 0$, alors elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = -1 + 2i$ et $\lambda_2 = -1 - 2i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\Big(C_1\ \cos(2x) + C_2\ \sin(2x)\Big); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$ est de la forme $e^{mx}\Big(2\cos(\omega x) - 3\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = -1$ et $\omega = 2$.

comme $-1+2i$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = xe^{-x}\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

On pose $z(x) = x\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big)$. Alors, $y_p(x) = e^{-x}\, z(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$, on trouve

$$\Big(4B - 2\Big)\cos(2x) + \Big(3 - 4A\Big)\sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = \dfrac{3}{4}$ et $B = \dfrac{1}{2}$.

Donc

$$z(x) = x\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par suite , la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-x}\, z(x) = xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\Big(C_1\ \cos(2x) + C_2\ \sin(2x)\Big) + xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = e^{-x}\left[\left(\frac{3}{4}x + C_1\right)\cos(2x) + \left(\frac{x}{2} + C_2\right)\sin(2x)\right]; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$