Filières SMP2/SMC2/LEPC2 Année Universitaire 2019-2020

Travaux Dirigés : Analyse II

Série 2

Exercice I. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1) $(x-1)y' - 2y = 0$;

2) $y' = (1-y)(2-y)$;

3) $xy' = x + y$;

4) $2xyy' = y^2 - x^2$;

5) $2x^2\, y' + y = 1$;

6) $y' \sin x - y \cos x = x$;

7) $(x+1)\, y' - y = \ln x$.

Exercice II.

1) Calculer $\displaystyle\int e^x (x-1)\, dx$.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)e^x$.

2.1) Montrer que $f(x) = e^{-x} g(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = x - 1; \qquad (E)$$

2.2) Montrer que la solution générale y de l'équation (E) s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{-x} + f(x), \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2.3) Déterminer la solution de l'équation (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

Exercice III. Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ telle que

$$x\int_0^x f(t)\,dt = \frac{3}{2}\int_0^x t f(t)\,dt, \qquad \text{pour tout } x \in [0,+\infty[.$$

1) Montrer que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2) Montrer que f est solution de l'équation

$$x\,y' - y = 0; \qquad (E)$$

3) Donner l'expression de f en fonction de x.

Exercice IV. Déterminer toutes les solutions de l'équation de Bernoulli suivante en précisant leurs domaines de définition.

$$x\,y' + y = xy^3.$$

Exercice V. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes.

1) $y'' + 2y' = 4$;

2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$;

3) $y'' + 6y' + 9y = x^2e^{2x}$;

4) $y'' + y = \cos 2x$;

5) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$.

Solutions des Exercices

Série 2

Exercice I.

1) $(x-1)y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x-1}$.

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-1} &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x-1} \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x-1} \\
&\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x-1| + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{2\ln|x-1|} e^{cte} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}(x-1)^2 \\
&\Rightarrow y = C(x-1)^2; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2) $y' = (1-y)(2-y)$.

C'est une équation à variables séparées (plus exactement elle est autonome).

On a

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = (1-y)(2-y) &\Rightarrow \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = \int dx \\
&\Rightarrow \int \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y} \right) dy = \int dx \\
&\Rightarrow -\ln|1-y| + \ln|2-y| = x + cte \Rightarrow \ln\left|\frac{2-y}{1-y}\right| = x + cte \\
&\Rightarrow \left|\frac{2-y}{1-y}\right| = e^x\, e^{cte} \Rightarrow \frac{2-y}{1-y} = \pm e^{cte} e^x \\
&\Rightarrow \frac{2-y}{1-y} = Ce^x; \quad C \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow y = \frac{Ce^x - 2}{Ce^x - 1}; \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3) $xy' = x + y \Rightarrow y' = 1 + \dfrac{y}{x}$.

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = 1 + t$.

On pose $u = \dfrac{y}{x}$ alors $y = u\,x$ et $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u = f(u) = 1 + u \Rightarrow du &= \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int du = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow u = \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y = ux = x\left(\ln|x| + C\right); \quad C \in \mathbb{R}.$$

4) $2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x} - 1\right)\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$.

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = \dfrac{1}{2}(t-1)(1+\dfrac{1}{t}) = \dfrac{t^2-1}{2t}$.

On pose $u = \dfrac{y}{x}$ alors $y = u\,x$ et $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u = f(u) = \frac{u^2-1}{2u} &\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2-1}{2u} - u = \frac{-u^2-1}{2u} \\ &\Rightarrow \frac{-2u}{u^2+1}\,du = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2u}{u^2+1}\,du \\ &\Rightarrow \ln|x| = -\ln(u^2+1) + cte \\ &\Rightarrow |x| = e^{cte}e^{-\ln(u^2+1)} = \frac{e^{cte}}{u^2+1} \\ &\Rightarrow x = \frac{C}{u^2+1}; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y = x\,u = \frac{Cu}{u^2+1}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant u par $\dfrac{y}{x}$, on obtient

$$y^2 + x^2 - Cx = 0; \quad C \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$y = \sqrt{Cx - x^2}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

5) $2x^2\,y' + y = 1$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $2x^2\,y' + y = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
2x^2\,y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x^2} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2} \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2} \\
&\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2x} + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{\frac{1}{2x}} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{\frac{1}{2x}}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $2x^2\,y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = k e^{\frac{1}{2x}}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $2x^2\,y' + y = 1$ de la forme

$$y_p(x) = k(x) e^{\frac{1}{2x}}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $2x^2\,y' + y = 1$, on trouve que

$$y_p(x) = e^{\frac{1}{2x}} \int \frac{e^{\frac{-1}{2x}}}{2x^2}\,dx = e^{\frac{1}{2x}} e^{\frac{-1}{2x}} = 1.$$

Donc, la solution générale de l'équation $2x^2\,y' + y = 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k e^{\frac{1}{2x}} + 1; \quad k \in \mathbb{R}.$$

6) $y' \sin x - y \cos x = x$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' \sin x - y \cos x = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
y'\sin x - y\cos x = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x}{\sin x}\\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx\\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx\\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln(|\sin x|) + cte\\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{\ln(|\sin x|)} = e^{cte}|\sin x|\\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}\sin x.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y'\sin x - y\cos x = 0$ est

$$y_h(x) = k\sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y'\sin x - y\cos x = x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)\sin x.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y'\sin x - y\cos x = x$, on trouve que

$$y_p(x) = \sin x \int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = \int x\left(\frac{-1}{\tan x}\right)'\,dx &= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}\,dx\\
&= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx\\
&= \frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|).
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$y_p(x) = \sin x\left(\frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|)\right) = -x\cos x + \sin x\ln(|\sin x|).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'\sin x - y\cos x = x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k\sin x - x\cos x + \sin x\ln(|\sin x|) = -x\cos x + \Big(k + \ln(|\sin x|)\Big)\sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

7) $(x+1)\,y' - y = \ln x$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $(x+1)\,y' - y = 0$.

On a

$$\begin{aligned}(x+1)\,y' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}\\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}\\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}\\ &\Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + cte\\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}|x+1|\\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}(x+1).\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $(x+1)\,y' - y = 0$ est

$$y_h(x) = k(x+1); \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)(x+1).$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$, on trouve que

$$y_p(x) = (x+1)\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx = -\int \left((x+1)^{-1}\right)' \ln x\,dx &= \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx\\ &= \frac{-\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= \frac{-\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) = \frac{-\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = (x+1)\left(\frac{-\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = -\ln x + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Par suite, la solution générale de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k(x+1) - \ln x + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice II.

1) $\int e^x(x-1)\,dx$ est une primitive de la fonction $e^x(x-1)$. On a

$$\begin{aligned}\int e^x(x-1)\,dx &= \int (e^x)'(x-1)\,dx = e^x(x-1) - \int e^x\,dx \\ &= e^x(x-1) - e^x + C = e^x(x-2) + C; \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2.1) Soit $g(x) = (x-2)e^x$; $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est une primitive de la fonction $e^x(x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x) = e^{-x}g(x) = x-2$. Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f' + f = 1 + x - 2 = x - 1$. Par suite, f est solution de l'équation $y' + y = x - 1$.

2.2) On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

$$\begin{aligned}y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}.\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y' + y = x - 1$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = x - 1$, on trouve que

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x} \int e^x(x-1)\, dx = e^{-x} g(x) \qquad (\text{car } g \text{ est primitive de } e^x(x-1)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y' + y = x - 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + f(x); \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.3) Soit y la solution de (E) telle que $y(1) = 0$. On a

$$y(1) = 0 \Rightarrow ke^{-1} + 1 - 2 = 0 \Rightarrow ke^{-1} = 1 \Rightarrow k = e.$$

Donc, $y(x) = e^{1-x} + f(x) = e^{1-x} + x - 2$ est solution de (E) telle que $y(1) = 0$.

Exercice III.

1) On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x t f(t)\, dt.$$

Alors,

$$xF(x) = \frac{3}{2} G(x).$$

Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, alors les deux fonctions F et G sont dérivables sur $[0, +\infty[$ de dérivées respectives $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = xf(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} xF(x) = \frac{3}{2} G(x) &\Rightarrow (xF(x))' = \frac{3}{2} G'(x) \\ &\Rightarrow F(x) + xF'(x) = \frac{3}{2} G'(x) \\ &\Rightarrow F(x) + xf(x) = \frac{3}{2} x f(x) \\ &\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2} x f(x) - x f(x) \\ &\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} x f(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) = 2\dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

D'autre part, comme f est continue en 0, $F(0) = 0$, F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0)$, alors

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 2F'(0) = 2f(0).$$

Par suite, $f(0) = 0$.

2) On a pour tout $x \in [0, +\infty[$, $xf(x) = 2F(x)$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} xf(x) = 2F(x) &\Rightarrow (xf(x))' = 2F'(x) \\ &\Rightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x) \\ &\Rightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc, f est solution de l'équation $x\,y' - y = 0$.

3) L'équation $x\,y' - y = 0$ est linéaire sans second membre.

On a

$$\begin{aligned} x\,y' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}|x| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} x. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation $x\,y' - y = 0$ est

$$y(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il résulte que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}$.

Exercice IV.

On veut résoudre l'équation de Bernoulli $x\,y' + y = xy^3$.

On a $y = 0$ est solution de l'équation de Bernoulli.

On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. On a

$$\begin{aligned} x\,y' + y = xy^3 &\Rightarrow x\,y'y^{-3} + y\,y^{-3} = x \\ &\Rightarrow \frac{-x}{2}\left(\frac{1}{y^2}\right)' + \frac{1}{y^2} = x. \end{aligned}$$

On pose $u = \dfrac{1}{y^2}$ alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$\frac{-x}{2}u' + u = x.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $\dfrac{-x}{2}u' + u = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{-x}{2}u' + u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{2u}{x} \\ &\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2}{x}\,dx \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{2}{x}\,dx \\ &\Rightarrow \ln|u| = 2\ln|x| + cte \\ &\Rightarrow |u| = e^{cte}e^{2\ln|x|} = e^{cte}x^2 \\ &\Rightarrow u = \pm e^{cte}x^2. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $\dfrac{-x}{2}u' + u = 0$ est

$$u_h(x) = kx^2; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $\dfrac{-x}{2}u' + u = x$ de la forme

$$u_p(x) = k(x)x^2.$$

On calcule u_p' et on remplace dans l'équation $\dfrac{-x}{2}u' + u = x$, on trouve que

$$u_p(x) = x^2 \int \frac{-2}{x^2}\,dx = x^2\,\frac{2}{x} = 2x$$

Par suite, la solution générale de l'équation $\dfrac{-x}{2}u' + u = x$ est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx^2 + 2x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, pour $k \in \mathbb{R}$, on considère l'intervalle réel I_k défini par

$$I_k = \begin{cases}]0, +\infty[& \text{si } k = 0, \\ \left]0, \dfrac{-2}{k}\right[& \text{si } k < 0. \\ \left]-\infty, \dfrac{-2}{k}\right[\cup]0, +\infty[& \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Comme $u = \dfrac{1}{y^2} = kx^2 + 2x$ et $kx^2 + 2x > 0$ pour tout $x \in I_k$, alors les solutions de l'équation de Bernoulli sont de la forme

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{-1}{\sqrt{kx^2 + 2x}} \quad \text{pour tout } x \in I_k.$$

Exercice V.

1) $y'' + 2y' = 4.$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda = 0.$

Elle admet deux racines réelles $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -2.$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^0 + C_2\, e^{-2x} = C_1 + C_2\, e^{-2x}; \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation complète $y'' + 2y' = 4$ est une constante (c'est à dire un polynôme de degré 0) et on a $2 \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax; \; a \in \mathbb{R}.$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' = 4$, on trouve que $a = 2.$

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = 2x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' = 4$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2\, e^{-2x} + 2x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4.$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' - 2y = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$

Elle admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2.$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x}; \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ est un polynôme de degré 2 et on a $-2 \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire $y_p(x) = ax^2 + bx + c; \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}.$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$, on trouve

$$-2ax^2 + 2(a-b)x + 2a + b - 2c = 2x^2 - 2x + 4.$$

On obtient par identification $a = -1,\, b = 0$ et $c = -3.$

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = -(x^2 + 3).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x} - (x^2 + 3); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3) $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}.$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 6y' + 9y = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0.$

Comme $\Delta = 0$, alors elle admet une racine réelle double $\lambda = -3.$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-3x}\Big(C_1 x + C_2\Big); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$ est de la forme $e^{mx}\, P_n(x)$ avec $m = 2$ et $n = 2$.

Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{2x}\, Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{2x}\left(ax^2 + bx + c\right); \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax^2 + bx + c$. Alors, $y_p(x) = e^{2x}\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$, on trouve

$$25ax^2 + (20a + 25b)x + 2a + 10b + 25c = x^2.$$

On obtient par identification $a = \dfrac{1}{25}$, $b = \dfrac{-4}{125}$ et $c = \dfrac{6}{625}$.

Donc

$$u(x) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{125}x + \frac{6}{625}.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{2x}\, u(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{125}x + \frac{6}{625}\right) = \frac{e^{2x}}{625}\Big(25x^2 - 20x + 6\Big).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-3x}\Big(C_1 x + C_2\Big) + \frac{e^{2x}}{625}\Big(25x^2 - 20x + 6\Big); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4) $y'' + y = \cos 2x$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 1 = 0$.

Elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, \cos(x) + C_2\, \sin(x); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y = \cos 2x$ est de la forme $e^{mx}\, \cos(\omega x)$ avec $m = 0$ et $\omega = 2$.

Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y = \cos 2x$, on trouve

$$\Big(3A+1\Big)\cos(2x) + 3B\sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = \dfrac{-1}{3}$ et $B = 0$.

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{-\cos(2x)}{3}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y = \cos 2x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\,\cos(x) + C_2\,\sin(x) - \frac{\cos(2x)}{3}; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 5y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

Comme $\Delta = -16 < 0$, alors elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = -1 + 2i$ et $\lambda_2 = -1 - 2i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\Big(C_1\,\cos(2x) + C_2\,\sin(2x)\Big); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$ est de la forme $e^{mx}\Big(2\cos(\omega x) - 3\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = -1$ et $\omega = 2$.

Comme $-1 + 2i$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = xe^{-x}\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

On pose $z(x) = x\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big)$. Alors, $y_p(x) = e^{-x}\,z(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$, on trouve

$$\Big(4B-2\Big)\cos(2x)+\Big(3-4A\Big)\sin(2x)=0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A=\dfrac{3}{4}$ et $B=\dfrac{1}{2}$.

Donc

$$z(x)=x\left(\frac{3}{4}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par suite , la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x)=e^{-x}\,z(x)=xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y''+2y'+5y=e^{-x}\Big(2\cos(2x)-3\sin(2x)\Big)$ est

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=e^{-x}\Big(C_1\ \cos(2x)+C_2\ \sin(2x)\Big)+xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)\right);\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x)=e^{-x}\left[\left(\frac{3}{4}x+C_1\right)\cos(2x)+\left(\frac{x}{2}+C_2\right)\sin(2x)\right];\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$