Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Module Analyse II

Arij BOUZELMATE

Filières: **SMP-SMC**

1. **Théorème Fondamental de l'Analyse**
2. **Primitives usuelles**
3. **Intégration par parties**
4. **Changement de variable**
5. **Intégrales trigonométriques**

Exercice 1

Soit F la fonction définie sur $]-1,1[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$.

1) Montrer que la fonction F est continue et dérivable sur $]-1,1[$.

2) Montrer que la fonction F est strictement croissante sur $]-1,1[$.

3) Montrer que $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Solution

Soit F la fonction définie sur $]-1,1[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$.

1) Comme la fonction $f : t \to \dfrac{1}{1-t^2}$ est continue sur $]-1,1[$, alors d'après le Théorème Fondamental de l'Analyse, la fonction F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

Donc, F est continue et dérivable sur $]-1,1[$ et $F'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

2) Comme $\dfrac{1}{1-x^2} > 0$ pour tout $x \in]-1,1[$, alors $F'(x) > 0$ pour tout $x \in]-1,1[$. Donc F est strictement croissante sur $]-1,1[$.

3) Il est facile de voir que pour tout $t \in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}.$$

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t} \\
&= \frac{-1}{2}\int_0^x \frac{-dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t} \\
&= \frac{-1}{2}\Big[\ln|1-t|\Big]_0^x + \frac{1}{2}\Big[\ln|1+t|\Big]_0^x \\
&= \frac{-1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales simples suivantes.

1) $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{2x(\ln x)^2}\,dx.$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx.$

3) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,dx.$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx.$

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$

6) $\displaystyle\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx.$

Calcul de $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{2x\,(\ln x)^2}\,dx$

$$\int_2^4 \frac{3}{2x\,(\ln x)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int_2^4 (\ln x)'\,(\ln x)^{-2}\,dx = \frac{-3}{2}\left[\frac{1}{\ln x}\right]_2^4 = \frac{3}{4\ln 2}.$$

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Calcul de $\displaystyle\int_0^1 x \arctan x \, dx$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 x \arctan x \, dx$, on fait une intégration par parties. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \arctan x \, dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctan x \, dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} \arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big[\arctan x\Big]_0^1 dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx$, on effectue le changement de variable $t = \sqrt{2}\,x$. Donc, $x = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ et $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2}}$.

Par suite, on trouve

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{\sqrt{2}}\Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$, on effectue le changement de variable $t = e^x$. Alors, $x = \ln t$ et $dx = \dfrac{dt}{t}$. Par suite

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx &= \int_1^e \frac{t}{\sqrt{t+1}}\frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t+1}} \\ &= \left[2\sqrt{t+1}\right]_1^e = 2\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

Calcul de $\displaystyle\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx$

Pour calculer $\displaystyle\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx$, on effectue le changement de variable $t = x^2$. Alors, $x = \sqrt{t}$ et $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$. Par suite

$$\begin{aligned}
\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{1+x^4}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer les intégrales trigonométriques suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ puis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx.$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}.$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\, dx.$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\, dx.$

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$, on effectue le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors $x = 2\arctan t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ et $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{2}{t^2+2t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{2}{(t+1)^2}\,dt \\
&= \left[\frac{-2}{t+1}\right]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$

En utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{|\cos x|} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$, (car $\cos x > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).
On effectue le changement de variable $t = \sin x$ alors $x = \arcsin t$ et $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$

Comme $1-t^2 = (1-t)(1+t)$, on cherche deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$

Un simple calcul donne $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2(1-t)} + \dfrac{1}{2(1+t)}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1+t} \\
&= \frac{-1}{2}\Big[\ln(1-t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

On déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$.

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx$

On remarque que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2(x))}\,dx.$
On effectue le changement de variable $t = \cos x$, alors $dt = -\sin x\,dx$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

On cherche des réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Un simple calcul donne

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{t}{1+t^2}\,dt \\
&= \Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{2t}{1+t^2}\,dt \\
&= \Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \\
&= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1 + \tan x}\, dx.$$

On effectue le changement de variable $t = \tan x$, alors $x = \arctan t$ et $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}\, dt.$$

On cherche des réels a, b et c tels que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Il est facile de trouver que $\displaystyle \frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{-1}{2(1+t)} + \frac{t+1}{2(1+t^2)}.$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx &= \frac{-1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{-1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.\end{aligned}$$