Sciences Mathématiques et Applications (SMA/S6) Année Universitaire 2020-2021

Travaux Dirigés : Equations Différentielles Ordinaires

Série 2

Exercice I.

On se donne une fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $|u(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème (P) suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} y'(t) = & -y(t) + u(t)\, y^2(t) \\ y(0) = & y_0 \end{array} \right.$$

où y_0 est un réel.

1) Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale y. Soit $]\alpha, \beta[$ son domaine de définition.

2) Montrer que y vérifie l'équation intégrale suivante :

$$y(t) = e^{-t}y_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}u(s)y^2(s)ds \quad \forall t \in]\alpha, \beta[\,.$$

3) Soit $|y_0| = 1 - a,\ a \in]0, 1[$ et pour tout $b \in]0, a[$, on pose

$$I = \{t \in [0, \beta[\text{ tel que } |y(s)| \leq 1 - b \quad \forall s \in [0, t]\}\,.$$

Montrer que I est un intervalle.

4) En utilisant l'écriture intégrale et l'inégalité de Gronwall, montrer que pour tout $t \in I$ on a

$$|y(s)| \leq |y_0|e^{-b\, s} \quad \text{pour tout} \quad s \in [0, t]\,.$$

Exercice II.

On considère le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et f est une fonction continue qui au couple $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associe $f(t, u) \in \mathbb{R}$.

On suppose que f est localement Lipschitzienne en u uniformément par rapport à t et qu'il existe une fonction $g : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ continue vérifiant :

$$\begin{cases} |f(t, y)| \leq g(|y|) \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, \\ \displaystyle\int_a^\infty \frac{ds}{g(s)} = +\infty \qquad \forall a \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle maximal non borné.

Exercice III.

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, localement Lipschitzienne impaire et croissante. On se donne un réel a et on considère le problème suivant

$$(P)\begin{cases} y'(t) + ay(t) + f(y(t)) = 0, \\ y(0) = b. \end{cases}$$

1) Montrer que pour chaque $b \in \mathbb{R}$, le problème (P) admet une unique solution maximale notée y_b définie sur un intervalle maximale $]\alpha, \beta[$.

2) Déterminer y_{-b} en fonction de y_b.

On suppose dans ce qui suit que $b > 0$ et $a > 0$.

3) Montrer que β est infinie.

4) Montrer que si $\displaystyle\int_0^b \frac{ds}{as + f(s)} = +\infty$ alors $]\alpha, \beta[= \mathbb{R}$.

5) Montrer que $l(a) = \lim\limits_{t\to\infty} y_b(t) \exp(at)$ existe et qu'on a l'encadrement suivant :

$$be^{-at} L(b) \leq y_b(t) \leq be^{-at}.$$

où

$$L(b) = \exp\left(-\int_0^b \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)} ds\right).$$

Solutions des Exercices

Série 2

Exercice I.

1) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ f(s,v) = -v + u(s)v^2$. Comme u est de classe $\mathcal{C}^1$ alors les dérivées partielles de la fonction f par rapport à s et v existent et sont continues, c'est à dire f est de classe $\mathcal{C}^1$, en particulier elle est continue en s, localement Lipschitzienne par rapport à v uniformément en s. Donc d'après le Théorème de Cauchy Lipschitz le problème (P) admet une unique solution maximale y définie sur un intervalle maximal $]\alpha, \beta[$ contenant 0.

2) On a $y'(t) + y(t) = u(t)\, y^2(t)$. Donc $(y(t)e^t)' = e^t\, u(t)\, y^2(t)$. En intégrant cette dernière équation sur $[0,t] \subset]\alpha,\beta[$, on obtient

$$ye^t = y_0 + \int_0^t e^s\, u(s)\, y^2(s)\, ds.$$

D'où

$$y(t) = y_0\, e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} u(s) y^2(s) ds.$$

3) On veut montrer que I est un intervalle, c'est à dire

$$\forall\, t_1, t_2 \in I \text{ alors } \theta t_1 + (1-\theta)t_2 \ \in I \ \text{ pour tout } \theta \in [0,1]\,.$$

Pour cela on suppose que $t_1 < t_2$. Alors $\theta t_1 + (1-\theta)t_2 \in [t_1, t_2] \subset [0, t_2]$, et ainsi d'après la caractérisation de I on a bien $|y(s)| \leq 1 - b\ \ \forall s \in [0, \theta t_1 + (1-\theta)t_2]$, c'est à dire $\theta t_1 + (1-\theta)t_2 \in I$.

4) D'après la question 2, on a en particulier pour tout $t \in I$ la relation suivante

$$\begin{aligned} |e^s y(s)| &\leq |y_0| + \int_0^s e^x\ |u(x)|\ y^2(x) dx \\ &\leq |\, y_0| + (1-b) \int_0^s |u(x)|\ |e^x\ y(x)|\, dx \quad \forall s \in [0,t]\,. \end{aligned}$$

D'où d'après le Lemme de Gronwall et en utilisant le fait que $|u(x)|\ \leq 1$, on déduit que

$$|e^s y(s)| \leq |y_0|\ \exp((1-b) \int_0^s |u(x)|\ dx) \leq |y_0|\, e^{(1-b)s}\ \ \forall s \in [0,t]\,.$$

D'où

$$|y(s)| \leq |y_0|\, e^{-bs} \qquad \forall s \in [0,t]\,.$$

Exercice II.

La fonction f vérifie les conditions du Théorème de Cauchy-Lipschitz, donc le problème (P) admet une unique solution maximale y définie sur un intervalle maximal $]\alpha,\beta[$ contenant 0.

Si β est fini alors

$$\forall M > 0\; \exists T \in\,]0,\beta[\;\text{ tel que }\; |x(T)| > M.$$

Or $|f(t,x(t))| \leq g(|x(t)|)$, d'où

$$\int_0^T \frac{|x'(s)|}{g(|x(t)|)}ds \leq \int_0^T \frac{|x'(s)|}{|f(s,x(s))|}ds = \int_0^T 1.ds = T.$$

Donc, en utilisant le changement de variables et le fait que g est positive, on obtient

$$\int_{x_0}^{x(T)} \frac{dy}{g(|y|)} = \int_0^T \frac{x'(s)}{g(|x(t)|)}ds \leq \int_0^T \frac{|x'(s)|}{g(|x(t)|)}ds \leq T.$$

Comme $\left|\displaystyle\int_{x_0}^{x(T)} \frac{dy}{g(|y|)}\right| \geq \left|\displaystyle\int_{|x_0|}^{|x(T)|} \frac{du}{g(u)}\right|$ et g est positive, alors

$$\int_{|x_0|}^{|x(T)|} \frac{du}{g(u)} \leq \int_{x_0}^{x(T)} \frac{dy}{g(|y|)} \leq T.$$

En particulier pour tout $M > |x_0|$, on aura $\displaystyle\int_{|x_0|}^{M} \frac{du}{g(u)} \leq T;$ d'où $\displaystyle\lim_{M\to\infty} \int_{|x_0|}^{M} \frac{du}{g(u)} \leq T \leq \beta.$

Ce qui est impossible, car β est finie et l'intégrale est divergente.

Conclusion : l'intervalle maximal est non borné.

Exercice III.

1) On a une équation différentielle autonome. Soit la fonction g définie par

$$g(u) = -au - f(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Comme f est localement Lipschitzienne, il existe $k > 0$ et il existe un voisinage V de u_0 tels que

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y| \qquad \forall x,y \in V.$$

D'où

$$|g(x) - g(y)| \leq (k + |a|) \, |x - y| \qquad \forall x, y \in V.$$

Ce qui montre que g est localement Lipschitzienne. D'où d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour chaque $b \in \mathbb{R}$ le problème (P) admet une unique solution y_b définie sur un intervalle maximal $]\alpha, \beta[$ contenu dans $\mathbb{R}$ et contenant 0.

2) On introduit la fonction u définie sur $]\alpha, \beta[$ par

$$u(t) = -y_b(t) \quad \forall t \in \,]\alpha, \beta[\, .$$

Alors $u'(t) = -y_b'(t) = ay_b(t) + f(y_b(t)) = -au(t) + f(-u(t)) = -au(t) - f(u(t))$. De plus $u(0) = -y_b(0) = -b$.

Par suite u vérifie sur $]\alpha, \beta[$ le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + au(t) + f(u(t)) = 0. \\ u(0) = -b \end{cases}$$

D'après l'unicité on doit avoir $u(t) = y_{-b}(t)$ pour tout $t \in \,]\alpha, \beta[\, .$

Montrons que u est exactement la solution maximale du problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) + f(y(t)) = 0 \\ y(0) = -b \end{cases}$$

Supposons par l'absurde que y_{-b} est définie sur un intervalle $]\alpha_1, \beta_1[\, \supsetneq \,]\alpha, \beta[\,$. Alors en prenant

$$v(t) = -y_{-b}(t) \quad \forall t \in \,]\alpha_1, \beta_1[\, ,$$

la fonction v sera une solution du problème (P) sur $]\alpha_1, \beta_1[$; ce qui contredit la définition de l'intervalle maximal d'existence $]\alpha, \beta[\,$. En conséquence on a bien $y_{-b}(t) = u(t) = -y_b(t)$ pour tout $t \in \,]\alpha, \beta[\,$.

3) $a)$ Tout d'abord montrons que

$$\forall b > 0, \; \forall t \in \,]\alpha, \beta[\;\; \text{on a } y_b(t) \neq 0.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in \,]\alpha, \beta[$ tel que $y_b(t_1) = 0$.

Comme la fonction f est impaire et continue alors $f(0) = 0$. Or la fonction nulle θ est solution de l'équation ;

c'est à dire $(\theta'(t) + a\,\theta(t) + f(\theta(t)) = 0$. Donc y_b et θ se croisent au point t_1 ; donc elles sont identiques ; c'est à dire $y_b\ (t) = 0$ pour tout $t \in \,]\alpha, \beta[\,$. En particulier on doit avoir $y(0) = b = 0$; ce qui n'est pas le cas.

$b)$ Comme y_b est continue et non nulle alors elle garde un signe constant et puisque $y_b(0) = b > 0$, alors y_b $(t) > 0$ pour tout $t \in \,]\alpha, \beta[\,$. Or f est croissante et $f(0) = 0$, d'où $f(y_b(t)) > f(0) = 0$. Ce qui implique

$$y_b'(t) = -ay_b(t) - f(y_b(t)) < 0 \quad \text{pou tout } t \in \,]\alpha, \beta[\,.$$

Donc y_b est décroissante et comme elle est minorée par 0 alors $\lim\limits_{t\to\beta^-} y_b(t)$ existe. Posons $L = \lim\limits_{t\to\beta^-} y_b(t)$.

Si β est fini, (on suit la méthode du cours) pour cela on considère le problème suivant :

$$(Q)\begin{cases} x'(t) + ax(t) + f(x(t)) = 0. \\ x(\beta) = L \end{cases}$$

Les conditions du Théorème de l'existence locale sont vérifées ; alors il existe une solution locale φ autour de β, c'est à dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(Q)\begin{cases} \varphi'(t) + a\varphi(t) + f(\varphi(t)) = 0 \; \forall t \in [\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon] \\ \varphi(\beta) = L \end{cases}$$

Ceci contredit la définition de β. Par conséquent $\beta = +\infty$.

$4)$ Comme $ay(t) + f(y(t)) > 0$, alors

$$\frac{y'(t)}{a\,y(t) + f(y(t))} = -1 \quad \forall t \in \,]\alpha, +\infty[\,.$$

D'où

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{ay(s) + f(y(s))} ds = -t \quad \forall t \in \,]\alpha, +\infty[\,.$$

C'est à dire

$$\int_b^{y(t)} \frac{ds}{a\,s + f(s)} = -t \quad \forall t \in \,]\alpha, +\infty[\,. \tag{0.1}$$

Or si α est fini, alors le second membre de l'égalité est fini et si l'integrale est divergente on obtient une contradiction.

Conclusion $]\alpha, \beta[= \mathbb{R}$.

5) $a)$ On a

$$y_b'(t) + a y_b(t) = -f(y_b(t)).$$

Donc

$$(y_b(t)e^{at})' = -e^{at} f(y_b(t)) < 0.$$

On pose $Z(t) = y_b(t)e^{at}$. Alors $Z(t) > 0$ et $Z\,'(t) < 0$; d'où Z est décroissante et est minorée par 0 et donc $\lim_{t\to\infty} Z(t) = l(a)$ existe. Comme $Z(t) \leq Z(0) = b$. alors

$$y_b(t) \leq b\, e^{-at}.$$

$b)$ D'après la relation (0.1) on a pour tout $t \in \,]\alpha, +\infty[$.

$$t = \int_{y(t)}^{b} \frac{ds}{as + f(s)}.$$

Il faut noter que

$$\frac{1}{as + f(s)} = \frac{as + f(s) - f(s)}{as(as + f(s))} = \frac{1}{as} - \frac{1}{a}\,\frac{f(s)}{as^2 + sf(s)}.$$

D'où, en intégrant sur $(y(t), b)$, on obtient

$$t = \frac{1}{a}\ln(b/y(t)) - \frac{1}{a}\int_{y(t)}^{b} \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)} ds.$$

Donc

$$t \geq \frac{1}{a}\ln(b/y(t)) - \frac{1}{a}\int_{0}^{b} \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)} ds.$$

Par suite

$$\ln b - at - \int_{0}^{b} \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)} ds \leq \ln(y(t)$$

D'où

$$b\, \exp(-at)\, \exp(-\int_{0}^{b} \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)} ds) \leq y_b(t).$$

C'est à dire

$$b\, \exp(-at)\, L(b) \leq y_b(t).$$

D'où l'encadrement de y_b.