
Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Arij BOUZELMATE

Filière: Sciences Mathématiques et Applications (SMA)

① Exercice 5

② Exercice 6

③ Exercice 7

Exercice 5

On se donne une fonction $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $|u(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème (P) suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = -y(t) + u(t) y^2(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où y_0 est un réel.

- 1) Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale y . Soit $] \alpha, \beta [$ son domaine de définition.
- 2) Montrer que y vérifie l'équation intégrale suivante :

$$y(t) = e^{-t} y_0 + \int_0^t e^{-(t-s)} u(s) y^2(s) ds \quad \forall t \in] \alpha, \beta [.$$

Exercice 5 (suite)

3) Soit $|y_0| = 1 - a$, $a \in]0, 1[$ et pour tout $b \in]0, a[$, on pose

$$I = \{t \in [0, \beta[\text{ tel que } |y(s)| \leq 1 - b \quad \forall s \in [0, t]\}.$$

Montrer que I est un intervalle.

4) En utilisant l'écriture intégrale et l'inégalité de Gronwall, montrer que pour tout $t \in I$ on a

$$|y(s)| \leq |y_0|e^{-b s} \quad \text{pour tout } s \in [0, t].$$

Correction Exercice 5

1) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, f(s, v) = -v + u(s)v^2$. Comme u est de classe \mathcal{C}^1 alors les dérivées partielles de la fonction f par rapport à s et v existent et sont continues, c'est à dire f est de classe \mathcal{C}^1 , en particulier elle est continue en s , localement Lipschitzienne par rapport à v uniformément en s . Donc d'après le Théorème de Cauchy Lipschitz le problème (P) admet une unique solution maximale y définie sur un intervalle maximal $] \alpha, \beta [$ contenant 0.

2) On a $y'(t) + y(t) = u(t)y^2(t)$. Donc $(y(t)e^t)' = e^t u(t)y^2(t)$. En intégrant cette dernière équation sur $[0, t] \subset] \alpha, \beta [$, on obtient

$$ye^t = y_0 + \int_0^t e^s u(s) y^2(s) ds.$$

D'où

$$y(t) = y_0 e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} u(s) y^2(s) ds.$$

Correction Exercice 5 (suite)

3) On veut montrer que I est un intervalle, c'est à dire

$$\forall t_1, t_2 \in I \text{ alors } \theta t_1 + (1 - \theta)t_2 \in I \text{ pour tout } \theta \in [0, 1].$$

Pour cela on suppose que $t_1 < t_2$. Alors $\theta t_1 + (1 - \theta)t_2 \in [t_1, t_2] \subset [0, t_2]$, et ainsi d'après la caractérisation de I on a bien $|y(s)| \leq 1 - b \quad \forall s \in [0, \theta t_1 + (1 - \theta)t_2]$, c'est à dire $\theta t_1 + (1 - \theta)t_2 \in I$.

4) D'après la question 2, on a en particulier pour tout $t \in I$ la relation suivante

$$\begin{aligned} |e^s y(s)| &\leq |y_0| + \int_0^s e^x |u(x)| |y^2(x)| dx \\ &\leq |y_0| + (1 - b) \int_0^s |u(x)| |e^x y(x)| dx \quad \forall s \in [0, t]. \end{aligned}$$

Correction Exercice 5 (suite)

D'où d'après le Lemme de Gronwall et en utilisant le fait que $|u(x)| \leq 1$, on déduit que

$$|e^s y(s)| \leq |y_0| \exp\left((1-b) \int_0^s |u(x)| dx\right) \leq |y_0| e^{(1-b)s} \quad \forall s \in [0, t].$$

D'où

$$|y(s)| \leq |y_0| e^{-bs} \quad \forall s \in [0, t].$$

Exercice 6

On considère le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et f est une fonction continue qui au couple $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associe $f(t, u) \in \mathbb{R}$. On suppose que f est localement Lipschitzienne en u uniformément par rapport à t et qu'il existe une fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ continue vérifiant :

$$\begin{cases} |f(t, y)| \leq g(|y|) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, \\ \int_a^\infty \frac{ds}{g(s)} = +\infty \quad \forall a \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle maximal non borné.

Correction Exercice 6

La fonction f vérifie les conditions du Théorème de Cauchy-Lipschitz, donc le problème (P) admet une unique solution maximale y définie sur un intervalle maximal $] \alpha, \beta [$ contenant 0 .

Si β est fini alors

$$\forall M > 0 \exists T \in]0, \beta[\text{ tel que } |x(T)| > M.$$

Or $|f(t, x(t))| \leq g(|x(t)|)$, d'où

$$\int_0^T \frac{|x'(s)|}{g(|x(s)|)} ds \leq \int_0^T \frac{|x'(s)|}{|f(s, x(s))|} ds = \int_0^T 1 ds = T.$$

Correction Exercice 6 (suite)

Donc, en utilisant le changement de variables et le fait que g est positive, on obtient

$$\int_{x_0}^{x(T)} \frac{dy}{g(|y|)} = \int_0^T \frac{x'(s)}{g(|x(t)|)} ds \leq \int_0^T \frac{|x'(s)|}{g(|x(t)|)} ds \leq T.$$

Comme $\left| \int_{x_0}^{x(T)} \frac{dy}{g(|y|)} \right| \geq \left| \int_{|x_0|}^{|x(T)|} \frac{du}{g(u)} \right|$ et g est positive, alors

$$\int_{|x_0|}^{|x(T)|} \frac{du}{g(u)} \leq \int_{x_0}^{x(T)} \frac{dy}{g(|y|)} \leq T.$$

Correction Exercice 6 (suite)

En particulier pour tout $M > |x_0|$, on aura $\int_{|x_0|}^M \frac{du}{g(u)} \leq T$; d'où

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{|x_0|}^M \frac{du}{g(u)} \leq T \leq \beta.$$

Ce qui est impossible, car β est finie et l'intégrale est divergente.

Conclusion : l'intervalle maximal est non borné.

Exercice 7

Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} , localement Lipschitzienne impaire et croissante. On se donne un réel a et on considère le problème suivant

$$(P) \begin{cases} y'(t) + ay(t) + f(y(t)) = 0, \\ y(0) = b. \end{cases}$$

1) Montrer que pour chaque $b \in \mathbb{R}$, le problème (P) admet une unique solution maximale notée y_b définie sur un intervalle maximale $] \alpha, \beta [$.

2) Déterminer y_{-b} en fonction de y_b .

On suppose dans ce qui suit que $b > 0$ et $a > 0$.

3) Montrer que β est infinie.

4) Montrer que si $\int_0^b \frac{ds}{as + f(s)} = +\infty$ alors $] \alpha, \beta [= \mathbb{R}$.

Exercice 7 (suite)

5) Montrer que $l(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_b(t) \exp(at)$ existe et qu'on a l'encadrement suivant :

$$be^{-at}L(b) \leq y_b(t) \leq be^{-at}.$$

où

$$L(b) = \exp\left(-\int_0^b \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)} ds\right).$$

Correction Exercice 7

1) On a une équation différentielle autonome. Soit la fonction g définie par

$$g(u) = -au - f(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Comme f est localement Lipschitzienne, il existe $k > 0$ et il existe un voisinage V de u_0 tels que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in V.$$

D'où

$$|g(x) - g(y)| \leq (k + |a|)|x - y| \quad \forall x, y \in V.$$

Ce qui montre que g est localement Lipschitzienne. D'où d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour chaque $b \in \mathbb{R}$ le problème (P) admet une unique solution y_b définie sur un intervalle maximal $] \alpha, \beta [$ contenu dans \mathbb{R} et contenant 0.

Correction Exercice 7 (suite)

2) On introduit la fonction u définie sur $] \alpha, \beta [$ par

$$u(t) = -y_b(t) \quad \forall t \in] \alpha, \beta [.$$

Alors $u'(t) = -y_b'(t) = ay_b(t) + f(y_b(t)) = -au(t) + f(-u(t)) = -au(t) - f(u(t))$. De plus $u(0) = -y_b(0) = -b$. Par suite u vérifie sur $] \alpha, \beta [$ le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + au(t) + f(u(t)) = 0. \\ u(0) = -b \end{cases}$$

D'après l'unicité on doit avoir $u(t) = y_{-b}(t)$ pour tout $t \in] \alpha, \beta [$. Montrons que u est exactement la solution maximale du problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) + f(y(t)) = 0 \\ y(0) = -b \end{cases}$$

Correction Exercice 7 (suite)

Supposons par l'absurde que y_{-b} est définie sur un intervalle $]\alpha_1, \beta_1[\not\subseteq]\alpha, \beta[$. Alors en prenant

$$v(t) = -y_{-b}(t) \quad \forall t \in]\alpha_1, \beta_1[,$$

la fonction v sera une solution du problème (P) sur $]\alpha_1, \beta_1[$; ce qui contredit la définition de l'intervalle maximal d'existence $]\alpha, \beta[$. En conséquence on a bien $y_{-b}(t) = u(t) = -y_b(t)$ pour tout $t \in]\alpha, \beta[$.

Correction Exercice 7 (suite)

3) a) Tout d'abord montrons que

$$\forall b > 0, \forall t \in]\alpha, \beta[\text{ on a } y_b(t) \neq 0.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in]\alpha, \beta[$ tel que $y_b(t_1) = 0$. Comme la fonction f est impaire et continue alors $f(0) = 0$. Or la fonction nulle θ est solution de l'équation ; c'est à dire $(\theta'(t) + a\theta(t) + f(\theta(t))) = 0$. Donc y_b et θ se croisent au point t_1 ; donc elles sont identiques ; c'est à dire $y_b(t) = 0$ pour tout $t \in]\alpha, \beta[$. En particulier on doit avoir $y_b(0) = 0$; ce qui n'est pas le cas.

b) Comme y_b est continue et non nulle alors elle garde un signe constant et puisque $y_b(0) = b > 0$, alors $y_b(t) > 0$ pour tout $t \in]\alpha, \beta[$. Or f est croissante et $f(0) = 0$, d'où $f(y_b(t)) > f(0) = 0$. Ce qui implique

$$y_b'(t) = -ay_b(t) - f(y_b(t)) < 0 \text{ pour tout } t \in]\alpha, \beta[.$$

Correction Exercice 7 (suite)

Donc y_b est décroissante et comme elle est minorée par 0 alors $\lim_{t \rightarrow \beta^-} y_b(t)$ existe. Posons $L = \lim_{t \rightarrow \beta^-} y_b(t)$.

Si β est finie, (on suit la méthode du cours) pour cela on considère le problème suivant :

$$(Q) \begin{cases} x'(t) + ax(t) + f(x(t)) = 0. \\ x(\beta) = L \end{cases}$$

Les conditions du Théorème de l'existence locale sont vérifiées ; alors il existe une solution locale φ autour de β , c'est à dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(Q) \begin{cases} \varphi'(t) + a\varphi(t) + f(\varphi(t)) = 0 \quad \forall t \in [\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon] \\ \varphi(\beta) = L \end{cases}$$

Ceci contredit la définition de β . Par conséquent $\beta = +\infty$.

Correction Exercice 7 (suite)

4) Comme $ay(t) + f(y(t)) > 0$, alors

$$\frac{y'(t)}{ay(t) + f(y(t))} = -1 \quad \forall t \in]\alpha, +\infty[.$$

D'où

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{ay(s) + f(y(s))} ds = -t \quad \forall t \in]\alpha, +\infty[.$$

C'est à dire

$$\int_b^{y(t)} \frac{ds}{as + f(s)} = -t \quad \forall t \in]\alpha, +\infty[. \quad (0.1)$$

Or si α est fini, alors le second membre de l'égalité est fini et si l'intégrale est divergente on obtient une contradiction.

Conclusion $] \alpha, \beta[= \mathbb{R}$.

Correction Exercice 7 (suite)

5) a) On a

$$y_b'(t) + ay_b(t) = -f(y_b(t)).$$

Donc

$$(y_b(t)e^{at})' = -e^{at}f(y_b(t)) < 0.$$

On pose

$$Z(t) = y_b(t)e^{at}.$$

Alors $Z(t) > 0$ et $Z'(t) < 0$; d'où Z est décroissante et est minorée par 0 et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = l(a)$ existe. Comme $Z(t) \leq Z(0) = b$. alors

$$y_b(t) \leq b e^{-at}.$$

Correction Exercice 7 (suite)

b) D'après la relation (0.1) on a pour tout $t \in]\alpha, +\infty[$.

$$t = \int_{y(t)}^b \frac{ds}{as + f(s)}.$$

Il faut noter que

$$\frac{1}{as + f(s)} = \frac{as + f(s) - f(s)}{as(as + f(s))} = \frac{1}{as} - \frac{1}{a} \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)}.$$

D'où, en intégrant sur $(y(t), b)$, on obtient

$$t = \frac{1}{a} \ln(b/y(t)) - \frac{1}{a} \int_{y(t)}^b \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)} ds.$$

Correction Exercice 7 (suite)

Donc

$$t \geq \frac{1}{a} \ln(b/y(t)) - \frac{1}{a} \int_0^b \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)} ds.$$

Par suite

$$\ln b - at - \int_0^b \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)} ds \leq \ln(y(t))$$

D'où

$$b \exp(-at) \exp\left(-\int_0^b \frac{f(s)}{as^2 + sf(s)} ds\right) \leq y_b(t).$$

C'est à dire

$$b \exp(-at) L(b) \leq y_b(t).$$

D'où l'encadrement de y_b .