Masters MAF2/MAP2 Année Universitaire 2015/2016

Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 2

Exercice 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

1) Montrer que $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

2) On suppose maintenant que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante.

2.1) Montrer que $\rho_k * f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

2.2) Montrer que $f = 0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$.

Exercice 2. Soient $p \in [1, +\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Soient $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

On désigne par $\widetilde{\xi u}$ le prolongement de ξu par 0 en dehors de Ω.

Montrer que $\widetilde{\xi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla(\widetilde{\xi u}) = \widetilde{\nabla(\xi u)}$ au sens des distributions.

Exercice 3. Soient $N \geq 1$ et $\Omega =]-1,1[^N$ un pavé de $\mathbb{R}^N$. Soit u une fonction définie par

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

1) Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_2\cdots dx_N - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(-1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_2\cdots dx_N.$$

2) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k = \left]1 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right[\times]-1,1[^{N-1}$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\begin{cases} 0 \leq \phi(x) \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R}^N, \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \notin A_1, \\ \phi(x) = 1 & \text{si } x = (1, x_2, \cdots, x_N) \text{ avec } |x_i| < \dfrac{1}{2} \ \forall i \in \{1, \cdots, N\}. \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction ϕ_k par

$$\phi_k(x) = \phi(1 + k(x_1 - 1), x_2, \cdots, x_N) \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}(x)\, dx \geq 1.$$

3) Montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 4**.** Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$.

1) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega u(x) \Delta\varphi(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \nabla\varphi(x)\, dx.$$

2) Montrer que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ et que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exercice 5**.** Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

On considère le problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (P).

Solutions des Exercices

Série 2

Exercice 1.

1) Comme $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors

$$|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x)| = |f(x)| \, \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \, dx = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty.$$

Donc, $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

2) 2.1) D'abord comme $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \varphi$ est défini partout sur $\mathbb{R}^N$.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(y) = \rho_k(x-y)$ pour $y \in \mathbb{R}^N$ (k fixé). Donc, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Par suite

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\rho_k(x-y) \, dy = 0.$$

Ce qui équivaut à $\rho_k * f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

2.2) Comme $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\rho_k * f \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^N).$$

Donc, il existe une suite extraite $(\rho_{k_j})_j$ telle que

$$\rho_{k_j} * f(x) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

Comme $\rho_{k_j} * f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, alors $f(x) = 0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$.

Exercice 2.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\xi u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, dx &= \int_\Omega \xi(x) u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, dx \\
&= \int_\Omega u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)\varphi(x)) - \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x)\varphi(x) \right) dx \\
&= \int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)\varphi(x)) \, dx - \int_\Omega u(x) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x)\varphi(x) \, dx.
\end{aligned}$$

Comme $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\xi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)\varphi(x))\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\xi(x)\varphi(x)\,dx.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\xi u}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx &= -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\xi(x) + u(x)\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x)\right)\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)u(x))\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi u)}(x)\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

On déduit que $\widetilde{\xi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et de plus pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\xi u}) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi u)} \qquad \text{au sens des distributions.}$$

Exercice 3**.**

1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,dx &= \int_{]-1,1[^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,dx \\ &= \int_{]-1,1[^{N-1}} \left(\int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,dx_1\right) dx_2 \cdots dx_N \\ &= \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\varphi(1, x_2, \cdots, x_n) - \varphi(-1, x_2, \cdots, x_n)\Big) dx_2 \cdots dx_N.\end{aligned}$$

2) Comme $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors d'après la première question

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}(x)\,dx &= \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\phi_k(1, x_2, \cdots, x_n) - \phi_k(-1, x_2, \cdots, x_n)\Big)\,dx_2 \cdots dx_N \\ &= \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\phi(1, x_2, \cdots, x_n) - \phi(1-2k, x_2, \cdots, x_n)\Big)\,dx_2 \cdots dx_N \\ &= \int_{]-1,1[^{N-1}} \phi(1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_2 \cdots dx_N \\ &\geq \int_{]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}[^{N-1}} \phi(1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_2 \cdots dx_N \\ &= \int_{]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}[^{N-1}} dx_2 \cdots dx_N = 1.\end{aligned}$$

3) On raisonne par l'absurde et on suppose que $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, il existe $g_i \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} g_i\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le fait que $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),\ 0 \leq \phi_k \leq 1$ et $\phi_k = 0$ sur $\mathbb{R}^N \backslash A_k$, alors

$$1 \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} g_1(x) \phi_k(x)\, dx \right| \leq \int_{A_k} |g_1(x)|\, dx \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Or ceci est impossible car $mes(A_k)$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$.

Exercice 4**.**

1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par définition de la dérivée par transposition, on a

$$< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)\, dx = \int_\Omega u(x) \Delta\varphi(x)\, dx.$$

D'autre part, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Donc

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \quad \forall i \in \{1, \cdots, N\}.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx.$$

C'est à dire

$$\int_\Omega u(x) \Delta\varphi(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx.$$

Il résulte que

$$< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega u(x) \Delta\varphi(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2) Comme Ω est borné, on considère sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $\|u\|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ (équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$).

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a en utilisant la question 1 et puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| = \left| \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{1,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega}.$$

Donc, l'application $\varphi \to < \Delta u, \varphi >$ est linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la norme de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Et comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, cette application se prolonge en une application linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ notée encore Δu, c'est à dire $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$. Ce prolongement par densité donne

$$< \Delta u, v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\left| < \Delta u, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| \leq \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Par suite

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{1,\Omega}.$$

D'autre part, on a

$$\left| < \Delta u, u >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{1,\Omega}^2 \leq \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{1,\Omega}.$$

D'où

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Il résulte que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exercice 5.

1) On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $H^1(\Omega)$ telle que

$$\|w_n\|_{H^1(\Omega)}^2 > n \left(\|w_n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

On considère la suite $v_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, alors $v_n \in H^1(\Omega)\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|v_n\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|\gamma_0(v_n)\|_{L^2(\partial\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte, il existe une sous suite extraite $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme par hypothèse

$$\|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors, la suite $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge nécessairement vers v dans $H^1(\Omega)$. Donc, $v \in H^1(\Omega)$ et par passage à la limite, on obtient $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$, $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$ et $\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} =$

0 puisque l'application trace γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Donc, $\nabla v = 0$ sur Ω et $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Par suite, v est constante sur Ω (car Ω est connexe) et comme la trace d'une fonction constante est la constante elle même, on a donc $v = 0$ dans tout Ω. Or ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

On peut raisonner de la façon suivante : Comme $v = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $v \in H_0^1(\Omega)$ et donc, d'après l'inégalité de Poincaré (Ω est borné) $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 0$, ce qui contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

Donc, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (P), on va procéder en trois étapes.

Etape 1**.** Recherche de la formulation variationnelle.

Formellement, on suppose que u est régulière et on multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v. On obtient en appliquant la formule de Green

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma + \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx.$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g - u$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, d\sigma.$$

La formulation variationnelle s'écrit : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \qquad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega),$$

où

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, d\sigma.$$

Etape 2**.** Résolution du problème variationnel.

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

L'application a est bien définie sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ car pour tous $u,\ v \in H^1(\Omega)$, on a $\nabla u,\ \nabla v \in L^2_N(\Omega)$ et en utilisant l'application trace γ_0 qui est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, on a $\gamma_0(u),\ \gamma_0(v) \in L^2(\partial\Omega)$. Ce qui donne en utilisant l'inégalité de Hölder que $\nabla u \nabla v \in L^1(\Omega)$ et $\gamma_0(u)\gamma_0(v) \in L^1(\partial\Omega)$.

La bilinéarité de a résulte de la linéarité du gradient et de l'intégrale. Montrons que a est continue. Soient $u,\ v \in H^1(\Omega)$, alors en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Comme la trace γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Donc

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} = (1 + C^2)\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ce qui prouve que a est continue.

a est coercive car d'après la question 1, on a

$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq \frac{1}{C}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Montrons maintenant que L est une application bien définie, linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $v \in H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors comme $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$, l'inégalité de Hölder implique que $fv \in L^1(\Omega)$ et $g\gamma_0(v) \in L^1(\partial\Omega)$. Donc, L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder, la continuité de la trace γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et le fait que $g = \gamma_0(w)$ avec $w \in H^1(\Omega)$ un relèvement de g, on obtient pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C^2 \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C^2 \|w\|_{H^1(\Omega)}\right) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où, L est continue sur $H^1(\Omega)$.

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,d\sigma = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,d\sigma \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Etape 3**.** Résolution du problème (P).

On montre que la solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème variationnel est une solution du poblème (P).

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Donc

$$< -\Delta u, \varphi >=< f, \varphi > \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et

$$-\Delta u = f \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Il reste à retrouver la condition sur $\partial\Omega$. On a

$$-\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En appliquant la formule de Green (car $u \in H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$), on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En utilisant le fait que u est solution du problème variationnel, on obtient

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u - g\right) v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ce qui entraine

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u - g\right) v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\partial\Omega).$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial u}{\partial n} + u = g$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout sur $\partial\Omega$.